

Examen : théorie des langages

Exercice 1 (6.5 pts) : Les langages algébriques

On considère L l'ensemble de tous les mots sur $\{a, b\}$ tel que le nombre de b est égal au nombre de a plus un.

- Montrez que si u et v sont deux mots de L alors uav , auv , uva sont également des mots de L . Quel est le plus court mot de L ?
- Donnez alors une grammaire hors-contexte générant L .
- On admet que L soit accepté par l'automate à pile suivant : $(\{a, b\}, \{A, B, \triangleright\}, \{0, 1, 2\}, 0, \{2\}, \delta)$ tel que :

$$\begin{aligned}\delta(0, a, \triangleright) &= (0, A\triangleright) & \delta(0, a, B) &= (0, \varepsilon) & \delta(0, \varepsilon, B) &= (1, \varepsilon) \\ \delta(0, b, \triangleright) &= (0, B\triangleright) & \delta(0, a, A) &= (0, AA) & \delta(1, \varepsilon, \triangleright) &= (2, \triangleright) \\ \delta(0, b, B) &= (0, BB) & \delta(0, b, A) &= (0, \varepsilon)\end{aligned}$$

- Donnez le comportement de l'automate pour les mots bab , abb et $abab$.
- Expliquez brièvement pourquoi cet automate arrive à accepter L .

Exercice 2 (4.5 pts) : Application des langages réguliers

Lorsqu'on imprime un document, on indique la liste des pages à imprimer comme suit : "1 ;5 ;6-10 ;20". L'utilisation du symbole "-" indique un intervalle de pages.

- Donnez un AEF acceptant ce langage.
- Donnez une expression régulière UNIX décrivant ce langage.
- Dans la notation " $n\mathbf{b} - m\mathbf{b}$ ", peut-on utiliser un AEF pour accepter juste les mots où le premier nombre est inférieur ou égal au deuxième ? Expliquez.

Exercice 3 (9 pts) : Propriétés des langages réguliers

On considère ici un alphabet ne contenant pas le symbole ' \blacksquare '. Soit w un mot, on note par $\text{Ins}(w)$ l'ensemble des mots $\{u\blacksquare v \mid w = uv\}$. Par exemple, on a : $\text{Ins}(b) = \{\blacksquare b, b\blacksquare\}$.

- Calculez : $\text{Ins}(\varepsilon)$ et $\text{Ins}(abb)$.
- Soit L un langage, on note par $\text{Ins}(L)$ le langage obtenu en appliquant Ins à tous les mots de L . Calculez : $\text{Ins}(a^*)$, $\text{Ins}(a^*b^*)$ et $\text{Ins}(\{a^n b^n \mid n \geq 0\})$. Expliquez à chaque fois.
- Donnez l'AEF minimal reconnaissant $L_1 = a^*b$ (il faut montrer qu'il est minimal).
- En utilisant la méthode de Thompson, donnez un AEF de $\text{Ins}(L_1)$. Déterminez puis minimisez-le.
- En comparant les automates, dites comment obtenir l'automate de $\text{Ins}(L)$ à partir de celui de L . Expliquez cette construction.