Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Alger1 – Benyoucef Benkhadda
Faculté des Sciences
Département Mathématiques Informatique

Nature : Rattrapage		Module : THL
Durée : 1h30	Date :	Filière : L2-INF/S3

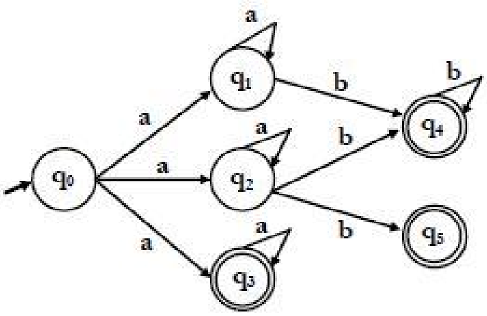
Exercice 1 (7pts)

1- Calculer le résultat de chacune des dérivées suivantes:
$(a^+.b)//a$; $(a^+.b)//b$; $(a^*.b)//a$; $(a^*.b)//b$

2- Construire l'AEF qui reconnait le langage défini comme suit :
$L = \{\ b + a^+b^{*}\ a + b\ \}$

Exercice 2 (8pts)

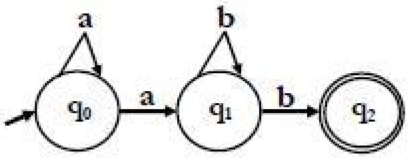
Soit A l'AEF défini comme suit :



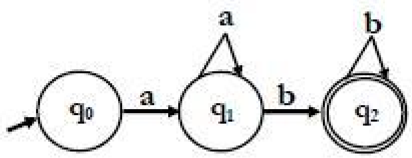
1- Trouver le sous-langage que l'on peut reconnaitre en partant de chacune des états : q_1, q_2, q_4 , q_5
2- En déduire la relation entre les deux états q_1 et q_2
3- Déterminiser l'AEF A.
4- Minimiser l'AEF A.

Exercice 3 (5pts)

Deux AEFs A_1 et A_2 sont dits équivalents s'ils reconnaissent le même langage (c-à-d $L(A_1)=L(A_2)$). Sur la base de cette définition, montrer que les deux AEFs suivants sont équivalents :



A_1



A_2

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Alger1 – Benyoucef Benkhadda
Faculté des Sciences
Département Mathématiques Informatique

Corrigé de l'examen de Rattrapage THL

Exercice 1 (7pts)

- $(a^+.b)//a=(a^+)//a.b+f(a^+).b//a$; $f(a^+)=\emptyset$ donc $f(a^+).b//a=\emptyset$ $\Big\}$ $(a^+)//a.b=(a.a^*)//a.b=[(a)//a.a^*+f(a).(a^*)//a].b$ $=[\varepsilon.a^*+\emptyset].b=\mathbf{a^*.b}$ **(0.5)**

- $(a^+.b)//b=(a^+)//b.b+f(a^+).b//b=(a)//b.a^*.b=\emptyset$ **(0.5)**

- $(a^*.b)//a=(a^*)//a.b+f(a^*).b//a$; $f(a^*).b//a=\varepsilon.\emptyset=\emptyset$ $\Big\}$ $(a^*)//a.b=(a)//a.a^*.b=\mathbf{a^*.b}$ **(0.5)**

- $(a^*.b)//b=(a^*)//b.b+f(a^*).b//b=\emptyset.b+\varepsilon.\varepsilon=\boldsymbol{\varepsilon}$ **(0.5)**

1- $q_0=L=\{(b+a^+b)^*(a+b)\}$

- $q_0 \parallel a=[(b+a^+b)^*(a+b)]\parallel a=(b+a^+b)^*\parallel a.(a+b)+f((b+a^+b)^*).(a+b)\parallel a$
$=[(b+a^+b)\parallel a.(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.[(a\parallel a)+(b\parallel a)]$
$=[((b\parallel a)+(a^+b)\parallel a).(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.[(a\parallel a)+(b\parallel a)]$
$=[(\emptyset+a^*.b).(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.(\varepsilon+\emptyset)$
$=[(\emptyset+a^*.b).(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.(\varepsilon+\emptyset)$
$=\mathbf{(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)+\varepsilon}=\boldsymbol{q_1}$ **(état final) (0.5)**

- $q_0 \parallel b=[(b+a^+b)^*(a+b)]\parallel b=(b+a^+b)^*\parallel b.(a+b)+f((b+a^+b)^*).(a+b)\parallel b$
$=[(b+a^+b)\parallel b.(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.[(a\parallel b)+(b\parallel b)]$
$=[((b\parallel b)+(a^+b)\parallel b).(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.[(a\parallel b)+(b\parallel b)]$
$=[(\varepsilon+\emptyset)(b+a^+b)^*].(a+b)+\varepsilon.(\emptyset+\varepsilon)$
$=\mathbf{(b+a^+b)^*.(a+b)+\varepsilon=q_2}$ **(état final) (0.5)**

- $q_1 \parallel a=[(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)+\varepsilon]\parallel a=[(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel a+\varepsilon\parallel a$
$=(a^*.b)\parallel a.[(b+a^+b)^*.(a+b)]+f(a^*.b).[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel a+\emptyset$
$=(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)+\emptyset.[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel a$
$=\mathbf{(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)=q_3}$ **(0.5)**

- $q_1 \parallel b=[(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)+\varepsilon]\parallel b=[(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel b+\varepsilon\parallel b$
$=(a^*.b)\parallel b.[(b+a^+b)^*.(a+b)]+f(a^*.b).[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel b+\emptyset$
$=\varepsilon.(b+a^+b)^*.(a+b)+\emptyset.[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel b$
$=\mathbf{(b+a^+b)^*.(a+b)=q_0}$ **(0.5)**

- $q_2 \parallel a=[(b+a^+b)^*(a+b)+\varepsilon]\parallel a=[(b+a^+b)^*(a+b)]\parallel a+\varepsilon\parallel a=\mathbf{q_0\parallel a+\emptyset=q_1}$ **(0.5)**

- $q_2 \parallel b=[(b+a^+b)^*(a+b)+\varepsilon]\parallel b=[(b+a^+b)^*(a+b)]\parallel b+\varepsilon\parallel b=\mathbf{q_0\parallel b+\emptyset=q_2}$ **(0.5)**

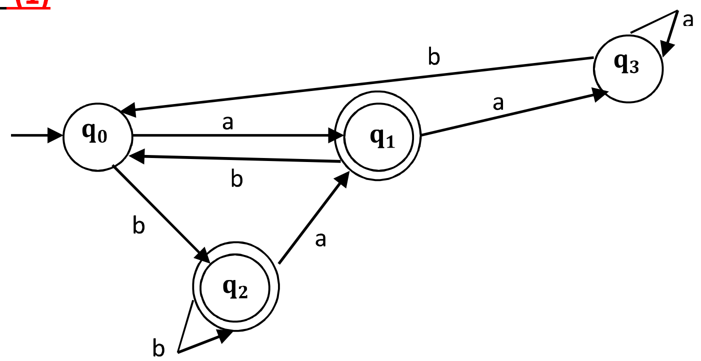
- $q_3 \parallel a=[(a^*.b)(b+a^+b)^*(a+b)]\parallel a$
$=(a^*.b)\parallel a.[(b+a^+b)^*.(a+b)]+f(a^*.b).[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel a$
$=(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)+\emptyset.[(b+a^+b)^*.(a+b)]\parallel a$
$=\mathbf{(a^*.b).(b+a^+b)^*.(a+b)=q_3}$ **(0.5)**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Alger1 – Benyoucef Benkhadda
Faculté des Sciences
Département Mathématiques Informatique

Corrigé de l'examen de Rattrapage THL

- $q_3 \parallel b = [(a^*.b)(b+a^+b)^*(a+b)] \parallel b$
  $= (a^*.b) \parallel b.[\,(b+a^+b)^*.(a+b)] + f(a^*.b).[\,(b+a^+b)^*.(a+b)] \parallel b$
  $= \varepsilon.(b+a^+b)^*.(a+b) + \emptyset.[\,(b+a^+b)^*.(a+b)] \parallel a$
  $= \mathbf{(b+a^+b)^*.(a+b) = q_0}$ **(0.5)**

<u>L'AEF résultat : (1)</u>



Exercice 2 (8 pts)

1- Le sous-langage :

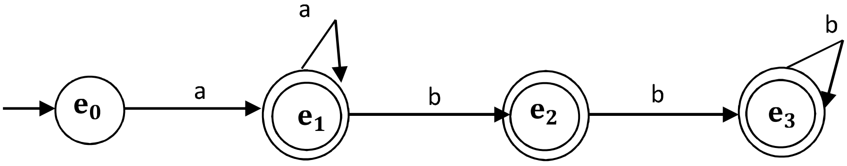
$\mathbf{q_1} \longrightarrow a^*.b^+$ **(0.25)** ; $\mathbf{q_2} \longrightarrow a^*.b^+ + a^*.b = a^*(b^+ + b) = a^*.b^+$ **(0.25)**
$\mathbf{q_4} \longrightarrow b^*$ **(0.25)** ; $\mathbf{q_5} \longrightarrow \varepsilon$ **(0.25)**

2- Les deux états $\mathbf{q_1}$ **et** $\mathbf{q_2}$ permettent de reconnaitre le même sous-langage, d'où $\mathbf{q_1}$ **et** $\mathbf{q_2}$ **sont $\boldsymbol{\beta}$-équivalents** **(0.5)**

3- **Déterminisation : (3pts)**

	a	B
$\rightarrow \{\mathbf{q_0}\} = \mathbf{e_0}$	$\{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\}$	---
$* \{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\} = \mathbf{e_1}$	$\{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\}$	$\{\mathbf{q_4}, \mathbf{q_5}\}$
$* \{\mathbf{q_4}, \mathbf{q_5}\} = \mathbf{e_2}$	---	$\{\mathbf{q_4}\}$
$* \{\mathbf{q_4}\} = \mathbf{e_3}$	---	$\{\mathbf{q_4}\}$

Automate A' : (0.5pt)



Corrigé de l'examen de Rattrapage THL

4- Minimisation de A' :

Etape 1 : classe B={ états finaux}={e_1, e_2, e_3 } ; classe C={états simples}={e_0} **(0.5)**

Considérons la classe B={e_1, e_2, e_3 }

	a	b
$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_1 \in B}$	$\mathbf{e_2 \in B}$
$\mathbf{e_2}$	---	$\mathbf{e_3 \in B}$
$\mathbf{e_3}$	---	$\mathbf{e_3 \in B}$

Donc, séparer $\mathbf{e_1}$ **de la classe B , $\mathbf{e_2}$ et $\mathbf{e_3}$ doivent être regroupés** **(1)**

On obtient une nouvelle classe D={ e_1 } d'où D={ e_1 } ; B={ e_2, e_3} ; C={e_0}

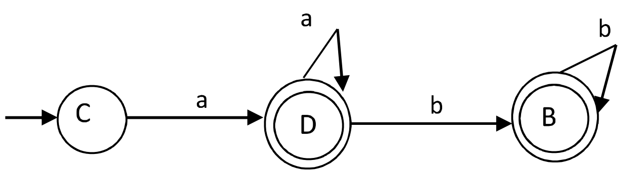
Etape 2 : considérons la classe B={ $\mathbf{e_2, e_3}$}

	a	b
$\mathbf{e_2}$	---	$\mathbf{e_3 \in B}$
$\mathbf{e_3}$	---	$\mathbf{e_3 \in B}$

Donc $\mathbf{e_2}$ **et $\mathbf{e_3}$ doivent être regroupés** **(0.75)**

Etape 3 : arrêt **(0.25)**

AEF minimal résultat : **(0.5)**



Exercice 3 (5 pts)

1- Langage reconnu par A_1 :

$L(A_1)=L_0 \rightarrow \begin{cases} L_0=a.L_0 + a.L_1 \\ L_1=b.L_1 + b.L_2 \\ L_2=\varepsilon \end{cases} \Rightarrow L_1=b.L_1+b=b^*.b=b^+$

$\Rightarrow L_0=a.L_0 + a.b^+=a^*.a.b^+=\mathbf{a^+b^+}$ **(2.5)**

d'où **L(A_1)={ a^+b^+}**

2- Langage reconnu par A_2:

$L(A_2)=L_0 \rightarrow \begin{cases} L_0= a.L_1 \\ L_1=a.L_1 + b.L_2 \\ L_2= b.L_2+ \varepsilon \end{cases} \Rightarrow L_2=b^*.\varepsilon=b^*$

$\Rightarrow L_1=a.L_1 + b.b^*=a^*b^+=a^*b^+$

L0=a. a^*b^+ $\mathbf{=a^+b^+}$ **(2.5)**

D'où **L(A_2)={ a^+b^+}**

$L(A_1)=L(A_2)$ donc les deux AEFs A_1 et A_2 sont équivalents