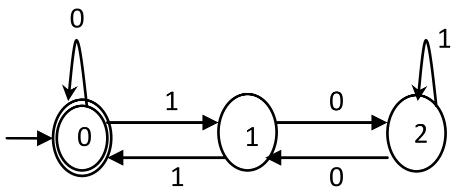
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Alger1 – Benyoucef Benkhadda
Faculté des Sciences
Département Mathématiques Informatique

Corrigé Examen THL

Exercice 1 :

Il est clair que $a^n b^n$ est un sous ensemble de $a^* b^*$, ce qui donne $L \cap M = a^n b^n$. Par conséquent la réponse **III** est incorrecte. De plus nous avons vu que $a^n b^n$ ne peut être représenté par un AEF (Automate à Etats Finis). Ceci nous permet de conclure que **II** est incorrecte **(2pt)**. Donc la seule réponse correcte c'est le choix **B**. **(1pt)**

Exercice2 :



a-Génération de l'expression régulière par le théorème d'Arden

Système d'équations :

$$\begin{cases} L_0 = 0.L_0 + 1.L_1 + \varepsilon & (1) \\ L_1 = 0.L_2 + 1.L_0 + \emptyset & (2) \\ L_2 = 0.L_1 + 1.L_2 + \emptyset & (3) \end{cases}$$ **(1pt)**

Solution : X = A.X + B → X=A*B

$L_2 = 1.L_2 + 0.L_1 \implies L_2 = 1^*.0.L_1$ **(0.5)**

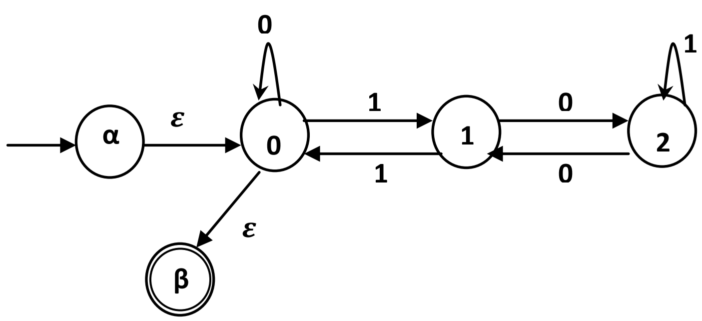
On remplace L_2 par sa valeur dans (2) : $L_1 = 0.1^*.0.L_1 + 1.L_0 = (01^*0)^*.1.L_0$ **(0.75)**

On remplace L_1 par sa valeur dans (1) : $L_0 = 0.L_0 + 1(01^*0)^*.1.L_0 + \varepsilon = (0 + 1(01^*0)^*1)L_0 + \varepsilon$ **(0.75)**

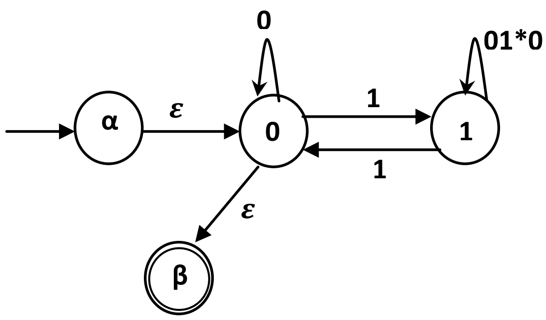
$\boldsymbol{L_0 = (0 + 1(01^*0)^*1)^*.\varepsilon = (0 + 1(01^*0)^*1)^* = ER}$

b- Génération de l'expression régulière par la méthode d'élimination des états

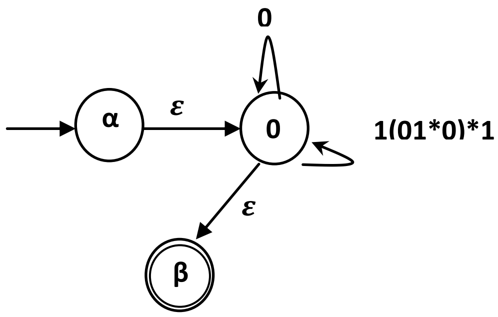
Ajoutons 2 états (initial et final) (0.75)



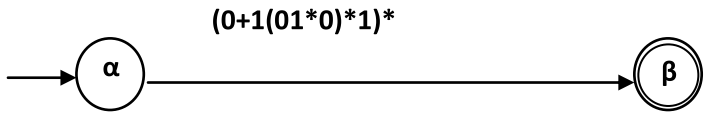
Eliminons l'état 2 : (0.75)



Eliminons l'état 1 : (0.75)



Eliminons l'état 0 : (0.75)



Donc : $\boldsymbol{ER = (0 + 1(01^*0)^*1)^*}$

Exercice 3 :

$\boldsymbol{ER = aa(a + ab)^*b = q_0}$

$\boldsymbol{q_0 \parallel a = (aa(a + ab)^*b) \parallel a = (aa) \parallel a.(a + ab)^*b + f(aa).[(a + ab)^*b] \parallel a}$

$\boldsymbol{= a.(a + ab)^*b + \emptyset.[(a + ab)^*b] \parallel a = a.(a + ab)^*b = q_1}$ **(0.5)**

$\boldsymbol{q_0 \parallel b = (aa(a + ab)^*b) \parallel b = (aa) \parallel b.(a + ab)^*b + f(aa).[(a + ab)^*b] \parallel a}$

$\boldsymbol{= \emptyset.(a + ab)^*b + \emptyset.[(a + ab)^*b] \parallel a = \emptyset}$ **(0.5)**

$\boldsymbol{q_1 \parallel a = (a(a + ab)^*b) \parallel a = (a) \parallel a.(a + ab)^*b + f(a).[(a + ab)^*b] \parallel a}$

$\boldsymbol{= \varepsilon.(a + ab)^*b + \emptyset.[(a + ab)^*b] \parallel a = (a + ab)^*b = q_2}$ **(0.25)**

$\boldsymbol{q_1 \parallel b = (a(a + ab)^*b) \parallel b = (a) \parallel b.(a + ab)^*b + f(a).[(a + ab)^*b] \parallel a}$

$\boldsymbol{= \emptyset.(a + ab)^*b + \emptyset.[(a + ab)^*b] \parallel a = \emptyset + \emptyset = \emptyset}$ **(0.25)**

$q_2 \parallel a = ((a+ab)^*b) \parallel a = (a+ab)^* \parallel a.b + f((a+ab)^*).b \parallel a$

$= (a+ab) \parallel a.(a+ab)^*.b + f((a+ab)^*).b \parallel a$

$= [a \parallel a + (ab) \parallel a].(a+ab)^*.b + \varepsilon.b \parallel a = (\varepsilon + b).(a+ab)^*.b + \varepsilon.\emptyset$

$= (a+ab)^*b + b.(a+ab)^*.b = q_3$ **(0.5)**

$q_2 \parallel b = ((a+ab)^*b) \parallel b = (a+ab)^* \parallel b.b + f((a+ab)^*).b \parallel b$

$= (a+ab) \parallel b.(a+ab)^*.b + f((a+ab)^*).b \parallel b = [a \parallel b + (ab) \parallel b].(a+ab)^*.b + \varepsilon.b \parallel b$

$= [\emptyset + \emptyset](a+ab)^*.b + \varepsilon.\varepsilon = \varepsilon = q_4$ **(0.5)**

$q_3 \parallel a = ((a+ab)^*b + b.(a+ab)^*.b) \parallel a = [(a+ab).^*\, b] \parallel a + [b.(a+ab)^*.b] \parallel a$

$= q_2 \parallel a + \emptyset = q_3$ **(0.5)**

$q_3 \parallel b = ((a+ab)^*b + b.(a+ab)^*.b) \parallel b = [(a+ab).^*\, b] \parallel b + [b.(a+ab)^*.b] \parallel b$

$= q_2 \parallel b + (a+ab)^*b = \varepsilon + q_2 = q_5$ **(0.5)**

$q_4 \parallel a = \varepsilon \parallel a = \emptyset$; $q_4 \parallel b = \varepsilon \parallel b = \emptyset$ **(0.25)**

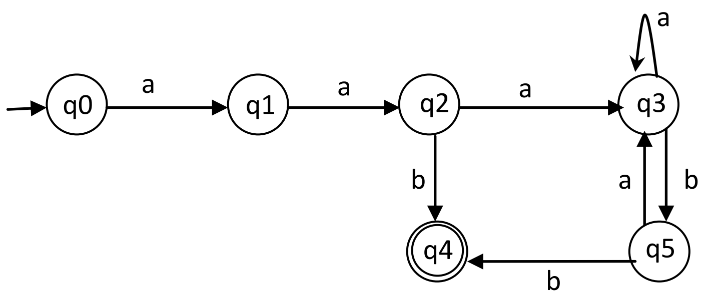
$q_5 \parallel a = (\varepsilon + q_2) \parallel a = \varepsilon \parallel a + q_2 \parallel a = \emptyset + q_3 = q_3$ **(0.25)**

$q_5 \parallel b = (\varepsilon + q_2) \parallel b = \varepsilon \parallel b + q_2 \parallel b = \emptyset + q_4 = q_4$ **(0.25)**

Table de transition : (0.75)

	a	b
→ q0	q1	---
q1	q2	---
q2	q3	q4
q3	q3	q5
*q4	----	----
q5	q3	q4

Automate déterministe :



Exercice 4 :

a- La grammaire du langage est la suivante:

G = < T = {a,b}, N = {S,X,Y}, S = S, P = { S→ XY; X→ a | aX; Y→ ε | aYb }> (2pt)

(Ou G = < T = {a,b}, N = {S,X,Y}, S = S, P = { S→ XY|X ; X→ a | aX; Y→ ab | aYb }>)

On remarque que les règles respectent bien le format des grammaires de type 2. Par contre, cette grammaire ne respecte pas le format de type 3.

Une autre grammaire possible : **G = <T = {a,b}, N = {S,X}, S = S, P = { S→ aSb |aX ; X→ aX |ε }>**

Corrigé Examen THL

(ou **G = <T = {a,b}, N = {S,X}, S = S, P = { S→ aSb |aX |a , X→ aX |a }>)** qui est aussi une grammaire de type 2. Tout langage engendré par une grammaire de type 2 est un langage algébrique **(1pt)**.

Donc le langage L est un langage algébrique.

b- Automate à pile **(2pt)**

1ière représentation	2ième représentation	Description
$\neq S_0 a \rightarrow \neq a S_1$	$\delta(q_0, a, \#)=(q_1,a\#)$	Empiler le 1ier "a".
$aS_1a \rightarrow aaS_1$	$\delta(q_1, a, a)=(q_1,aa)$	Tant que des "a" à lire on les empile .
$aS_1 \rightarrow S_1$ (final)	$\delta(q_1, \varepsilon, a)=(q_1,a)$	Aucune lettre à lire, cas où le mot contient que des "a" (n>p) (sans changer l'état de la pile), q_1 état final.
$aS_1b \rightarrow S_2$	$\delta(q_1, b, a)=(q_2,\varepsilon)$	Dés que le 1ier "b" arrive on dépile un "a".
$aS_2b \rightarrow S_2$	$\delta(q_2, b, a)=(q_2,\varepsilon)$	Tant que un "b" est à lire on dépile un "a".
$aS_2 \rightarrow aS_2$ (final)	$\delta(q_2, \varepsilon, a)=(q_2,a)$	Aucune lettre à lire mais la pile contient au moins un "a", q_2 état final (sans changer l'état de la pile) .

(1pt) La première transition sert à compter au moins un a de plus que de b.