Université A/Mira de Béjaia — Date : 09/02/2013

Département d'Informatique

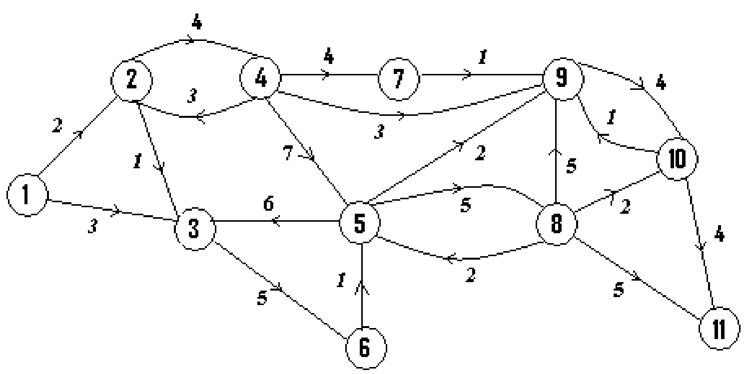
3^e année Licence Académique (2012/2013).

Examen de Théorie des Graphes
Durée 2h00

Exercice 1. (05 pts)

1. Peut-on construire un graphe simple ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés différents ? (Raisonner par l'absurde).
2. • Existe-t-il un graphe d'ordre 6 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ? Justifiez ?
   • Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ? Justifiez ?
3. • Montrer que dans un graphe simple complet d'ordre $n \geq 2$, le nombre d'arêtes est $\frac{n(n-1)}{2}$.
   • Combien d'arêtes contiennent les graphes K_{11} et $K_{6,7}$?

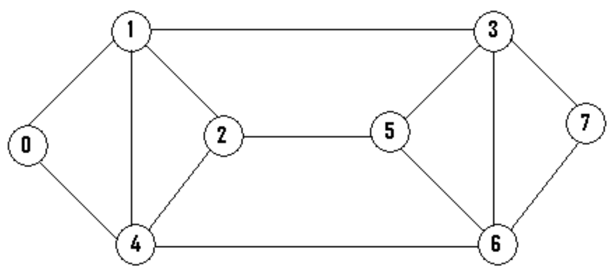
Exercice 2. (10 pts) Considérons le graphe $G = (X, U)$ suivant :



1. • Soit $A = \{2, 3, 4, 5, \}$ une partie de l'ensemble des sommets X du graphe. Déterminer le cocycle engendré par A. Est-il élémentaire ? Justifiez ?
   • Peut on décomposer ce cocycle en réunion de cocycles disjoints ? conclure.
   • Déterminer un cycle Hamiltonien ? Quelle est sa cardinalité ?
2. Ce graphe est-il fortement connexe ? Sinon, déterminer ses composantes fortement connexes ?
3. Donner le graphe réduit Gr associé au graphe G (on retiendra l'arc de poids le plus faible dans le cas de l'existence de plusieurs arcs de même orientation allant d'une composante fortement connexe C_i à une composante fortement connexe C_j.
4. Donnez la matrice d'adjacence associée au graphe réduit Gr. Etudiez les propriétés du graphe réduit Gr.
5. Donnez sa fermeture transitive (on ne vous demande pas d'utiliser l'algorithme).
6. Déterminer un arbre recouvrant, qui soit une arborescence, associé au graphe Gr.
7. Déterminer une base de cycles et une base de cocycles associées à cet arbre.
8. Déterminer un arbre de poids minimum du graphe réduit Gr.

Exercice 3. (05 pts) Soient $G = (X, U)$ un graphe et $S \subset \mathbb{N}$ un ensemble de couleurs disponibles. Une coloration des sommets de ce graphe est une fonction $c : X \to S$ qui associe à chaque sommet une couleur tel que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Le problème de coloration d'un graphe consiste à déterminer le nombre minimum de couleur à utiliser pour colorier tous les sommets du graphe. L'heuristique suivante permet d'obtenir une bonne solution réalisable (pas forcément la meilleure). Le principe est de ranger les sommets $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ dans l'ordre décroissant de leurs degrés. On colorie ces sommets dans l'ordre précédemment défini avec pour règle de donner à chaque sommet la couleur la plus petite non encore utilisée, en fonction des sommets voisins qui sont déjà colorés.

1. Ecrire un algorithme qui implémente cette heuristique
2. Appliquez-le au graphe suivant :



$* \mathcal{A}$*fud igerrzen* $* \mathcal{B}$*on courage* $*$