

Examen de rattrapage de Théorie des Graphes
Durée 2 heures

Exercice 1. (06 pts) Le conseil d'administration d'une entreprise est composé de 7 membres M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7. Chacun de ces membres influence un certain nombre de ses collègues conformément au tableau suivant :

Les membres	Les influences
M1	M2, M3, M4, M5, M6 et M7
M2	_____
M3	M2
M4	M2, M3, M5 et M7
M5	M2 et M3
M6	M2, M3, M4, M5 et M7
M7	M2, M3 et M5

1. Modéliser cette situation sous forme d'un graphe $G = (X, U)$ et donner sa matrice d'adjacence.
2. Calculer le demi-degré intérieur et le demi-degré extérieur de chaque sommet du graphe ; que représentent-ils ? préciser en particulier le cas des personnes M1 et M2.
3. Etudier les propriétés du graphe G.
4. Le graphe G admet-il un circuit ou un chemin Eulerien, un chemin Hamiltonien ? Justifier. Pour chaque cas, si c'est oui, il faut le déterminer.

Exercice 2. (07 pts) Considérons le graphe $G = (X, U)$ de la figure suivante :

1. Déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe G.
2. Dresser un tableau désignant les successeurs, les prédécesseurs, les voisins, le degré extérieur, le degré intérieur et le degré de chaque sommet.

3. Le graphe est-il réflexif, antisymétrique, transitif, complet ? Justifier.
4. Le graphe G possède t-il des circuits ? Justifier
5. Déterminer les niveaux du graphe G .
6. Le graphe G admet il un noyau ? Justifier. Déterminer le s'il existe.
7. Déterminer un arbre maximal de G .

Exercice 3. (07 pts) Le responsable de la sécurité présidentielle est chargé de tracer l'itinéraire adéquat du président de la république qui devait partir de la ville A, lieu de sa résidence, et rejoindre la ville F pour une visite de travail. Avant de déterminer son itinéraire, le responsable a consulté une voyante (Mme Soleil!) qui lui a dit entre autres choses. « Après la ville B, méfiez-vous du ciel. A la ville C, attention aux bandits. Dans D, méfiez-vous de l'eau et surtout prenez garde partout d'un blond aux yeux vert... ». Le responsable avait reporté sur une carte pour chaque liaison entre deux villes les « chances » de réussite de sa mission. La table suivante résume les différentes chances de réussite.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.0 & 1.0 & 0.9 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Ignorant le calcul des probabilités et les techniques de recherche opérationnelle, il avait choisi l'itinéraire $[A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F]$.

1. Formuler ce problème. Discuter l'existence de solution à ce problème.
2. Modifier l'algorithme de Dijkstra pour déterminer une solution optimale à ce problème. Comparer la solution obtenue avec celle du responsable de sécurité. Quelle est la probabilité de réussite de la mission du responsable, sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires « chances de succès » ?

* *Afud igerrzen* * *Bon courage* *