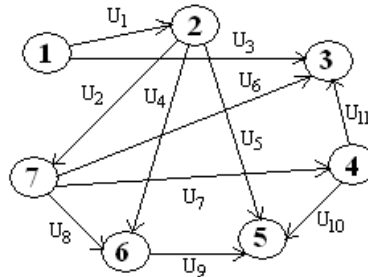


Examen de rattrapage de Théorie des Graphes
Durée 1h30

Exercice 1. (10 pts) Considérons le graphe $G = (X, U)$ de la figure suivante :

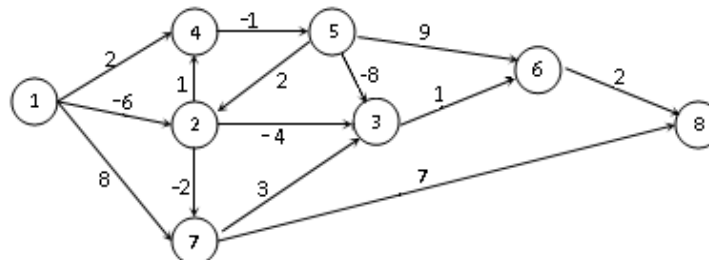


1. Déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe G .
2. Dresser un tableau désignant les successeurs, les prédécesseurs, les voisins, le degré extérieur, le degré intérieur et le degré de chaque sommet.
3. Le graphe est-il réflexif, antisymétrique, transitif, complet ? Justifier.
4. Le graphe G possède-t-il des circuits ? Justifier
5. Déterminer les niveaux du graphe G .
6. Le graphe G admet-il un noyau ? Justifier. Déterminer le s'il existe.
7. Déterminer un arbre couvrant maximal de G .
8. Donner le nombre chromatique et les ensembles stables de G .

Exercice 2. (10 pts) Soit $R = (X, U, d)$ un réseau. Considérons l'algorithme suivant :

- (0) Déterminer un graphe partiel $A = (X, V)$ du réseau donné R qui soit une arborescence de racine s (on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra pour l'obtenir) ;
- (1) Tester s'il existe un arc $u = (x, y) \in U \setminus V$ qui vérifie $\delta_u = \Pi(y) - \Pi(x) - d(x, y) > 0$;
 (On rappelle que Π est l'application définie : $X \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque sommet $x \in X$ son potentiel $\Pi(x)$ qui représente la plus courte distance de s à x .)
 – Si oui, aller en (2)
 – Si non, terminer A est optimale.
- (2) Tester si $A \cup \{u\}$ contient un circuit ;
 – Si oui, terminer ce circuit est absorbant.
 – Si non, aller en (3) ;
- (3) Chercher un arc $v \in V$ tel que $T(v) = y$.
 Soit $D(z) = \{z \in X : z = y \text{ ou } z \text{ est un descendant de } y \text{ dans } A\}$.
 Poser $A = A \cup \{u\} \setminus \{v\}$ et $\Pi(z) = \Pi(z) - \delta_u, \forall z \in D(z)$, aller en (1) ;

1. Que fait cet algorithme ? Comparer son principe à celui de Bellman et de Dijkstra.
 Considérons le réseau suivant :



2. Peut-on utiliser l'algorithme de Bellman ?
3. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour obtenir une solution réalisable.
4. Cette solution est-elle optimale ? sinon utiliser l'algorithme ci-dessus pour déterminer une solution optimale.