

Exercice 1 (5 points)

1) Oui, il est correct, car il respecte les conditions suivantes :

a) $\forall u, f(u) \leq c(u)$, exemple : l'arc (3,5) : $4 < 5$

b) Le sommet 1 étant la source et 10 le puits : $\sum_{u \in P^-(1)} f(u) = \sum_{u \in P^+(10)} f(u) = 15$

c) Soit x un sommet intermédiaire :

$$\sum_{u \in P^-(x)} f(u) = \sum_{u \in P^+(x)} f(u), \text{ par exemple pour le sommet 2 : } \sum_{u \in P^-(2)} f(u) = 3 + 3 = 6$$

$$\text{et } \sum_{u \in P^+(2)} f(u) = 6$$

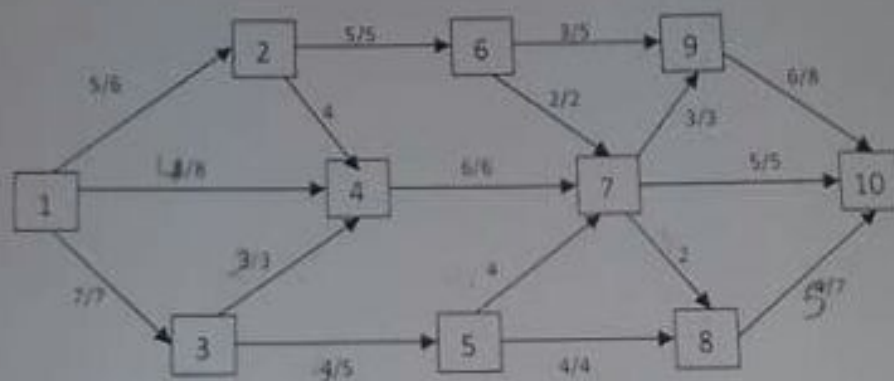
2) Le flot complet = 15, (6+5+4)

3) Tous les chemins sont saturés, et le flot complet obtenu est 15.

Pour la deuxième partie de l'algorithme, nous devons saturer les chaînes.

Une chaîne augmentante par exemple est 1 → 4 → 3 → 5 → 8 → 10, elle sera augmentée par le minimum (c'est-à-dire 1).

Le 1 est enlevé des arcs inverses et ajouté aux arcs directs :



Il n'existe plus de chaîne augmentante, le flot maximal est égale à 16

Exercice 2 : (5 points)

Soit la matrice suivante d'un graphe orienté (1 indique la présence d'un arc allant de X_i à X_j , 0 sinon):

- 1- Matrice d'adjacence
- 2- Parce que c'est une matrice sommet-sommet.
- 3- Sommet source
- 4- Il n'existe pas de boucle
- 5- Sommet puits
- 6- La somme des 1 dans une ligne ou La somme des 1 dans une colonne.

Exercice 3 (4 points)

Application de l'algorithme de Bellman-Ford.

Initialisation

$$\Pi(A) = 0, \Pi(B) = \Pi(C) = \Pi(D) = \Pi(E) = \infty$$

Itération 1 :

$$\Pi(B) = \min(\Pi(B), \Pi(A) + l_{AB}) = 20$$

$$\Pi(C) = \min(\Pi(C), \Pi(A) + l_{AC}, \Pi(B) + l_{BC}) = 50$$

$$\Pi(D) = \min(\Pi(D), \Pi(C) + l_{CD}, \Pi(E) + l_{ED}) = 70$$

$$\Pi(E) = \min(\Pi(E), \Pi(A) + l_{AE}, \Pi(B) + l_{BE}) = 10$$

Itération 2 :

$$\Pi(B) = 20$$

$$\Pi(C) = 50$$

$$\Pi(D) = 70$$

$$\Pi(E) = 10$$

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
Initialisation	0	∞	∞	∞	∞		/	/	/	/	/
Itération 1	0	20	50	70	10		/	A	B	C	A
Itération 2	0	20	50	70	10		/	A	B	C	A

Le système est stable, le plus court chemin est :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$$

La quantité consommée dans ce chemin est 70 litres.