

Durée de l'examen : Deux (2) Heurs

EXERCICE 1: (Micro Interrogation) (5 pts)

Soit L' Le langage $\{a, b, c\}$ et f le code $f : L' \rightarrow \{0, 1\}$ définit par :

$$f(a) = 00, f(b) = 01 \text{ et } f(c) = 10.$$

Construisez des Machines de Turing reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{x : f^{-1}(x) \text{ termine par la lettre } c\}.$
2. $L_2 = \{x : f^{-1}(x) \text{ possède au moins 1 a, 1 b et 1 c}\}.$
3. $L_3 = \{x : f^{-1}(x) \text{ est un palindrome}\}.$

EXERCICE 2 : (Micro Interrogation) (5 pts)

Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour-là, la Maman demande à chacun de ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

- Chabane : Katia a mangé le quart du gâteau ;
Saliha : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;
Katia : Djamal a mangé le quart du gâteau ;
Djamal : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seulement une de ces quatre propositions est vraie et seulement un des quatre enfants est coupable, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

EXERCICE 3 : (5 pts)

Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :

1. $Ax1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $Ax2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $Ax3 : (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Et la règle du Modus Ponens : si $\vdash A$ et $\vdash A \rightarrow B$ alors $\vdash B$.

Montrer que l'on a :

- 1) $A \models (B \rightarrow A),$
- 2) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \models (A \rightarrow C)$
- 3) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \models B \rightarrow (A \rightarrow C)$

EXERCICE 4 : (5 pts)

Soit le langage $L = \{f_1, g_1, h_2, R_1, S_2, T_2, =_2\}$ (explication f_i signifie que la fonction a un seul argument ; R_2 signifie la relation ou prédicat a 2 arguments ; etc.) où les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \exists x (\exists y (\exists z (R(x))) \vee (\exists y) (\neg (\forall z (S(h(x, z), x)))) \\ \Phi_2 &= (\forall x (T(f(x), y))) \rightarrow (\neg (\exists x (y(x, y)))) \\ \Phi_3 &= (\forall z (T(x, y))) \rightarrow (\exists y ((\forall x (\neg (f(x) = y))) \vee T(y, z))) \\ \Phi_4 &= (\forall x (\exists y ((g(y) = x) \vee (\neg T(g, y)))) \rightarrow (\exists z (\forall x (T(y, g(x))))) \end{aligned}$$

1. Quelles sont les formules de L ?
2. Pour celles qui sont des formules. supprimez les parenthèses à l'aide des conventions et propriétés vues en cours ?
3. Déterminer les occurrences liées des variables dans les formules ?
4. Déterminer parmi les formules, les formules atomiques, les clauses et les termes ?
5. Ramener les formules à la forme préfixe.

Bonne Chance