

Durée de l'examen : Deux (2) Heurs

**EXERCICE 1 : (Micro Interrogation) (5 pts)**

Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :

1. Ax1 :  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. Ax2 :  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. Ax3 :  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Et la règle du Modus Ponens : si  $\vdash A$  et  $\vdash A \rightarrow B$  alors  $\vdash B$ .

Montrer que l'on a :

- 1)  $A \vDash (B \rightarrow A)$ ,
- 2)  $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vDash (A \rightarrow C)$
- 3)  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vDash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

**EXERCICE 2 : (Micro Interrogation) (5 pts)**

Soit le langage  $L = \{f_1, g_1, h_2, R_1, S_2, T_2, =_2\}$  (explication  $f_1$  signifie que la fonction a un seul argument ;  $R_2$  signifie la relation ou prédicat a 2 arguments ; etc.) où les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \exists x (\exists y (\exists z (R(x))) \vee (\exists y ((\neg (\forall z (S(h(x, z), x)))))) \\ \Phi_2 &= (\forall x (T(f(x), y))) \rightarrow (\neg (\exists x (y(x, y)))) \\ \Phi_3 &= (\forall z (T(x, y))) \rightarrow (\exists y ((\forall x (\neg (f(x) = y))) \vee T(y, z))) \\ \Phi_4 &= (\forall x (\exists y ((g(y) = x) \vee (\neg T(g, y)))) \rightarrow (\exists z (\forall x (T(y, g(x)))))\end{aligned}$$

1. Quelles sont les formules de L ?
2. Pour celles qui sont des formules. supprimez les parenthèses à l'aide des conventions et propriétés vues en cours ?
3. Déterminer les occurrences liées des variables dans les formules ?
4. Déterminer parmi les formules, les formules atomiques, les clauses et les termes ?
5. Ramener les formules à la forme prénexe.

**EXERCICE 3 : (5 pts)**

Soit  $L'$  Le langage  $\{a, b, c\}$  et  $f$  le code  $f : L' \rightarrow \{0, 1\}$  définit par :  
 $f(a) = 00, f(b) = 01$  et  $f(c) = 10$ .

Construisez des Machines de Turing reconnaissant les langages suivants :

1.  $L_1 = \{x : f^{-1}(x) \text{ termine par la lettre } c\}$ .
2.  $L_2 = \{x : f^{-1}(x) \text{ possède au moins } 1 a, 1 b \text{ et } 1 c\}$ .
3.  $L_3 = \{x : f^{-1}(x) \text{ est un palindrome}\}$ .

**EXERCICE 4 : (5 pts)**

Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour-là, la Maman demande à chacun de ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

Chabane : Katia a mangé le quart du gâteau ;

Saliha : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;

Katia : Djamel a mangé le quart du gâteau ;

Djamel : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seulement une de ces quatre propositions est vraie et seulement un des quatre enfants est coupable, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

**Bonne Chance**