

Durée de l'examen : Deux (2) Heurs

EXERCICE 1: (5 pts)

Soit L' Le langage $\{a, b, c\}$ et f le code $f : L' \rightarrow \{0, 1\}$ définit par :

$$f(a) = 00, f(b) = 01 \text{ et } f(c) = 10.$$

Construisez des Machines de Turing reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{x : f^{-1}(x) \text{ termine par la lettre } c\}.$
2. $L_2 = \{x : f^{-1}(x) \text{ possède au moins 1 a, 1 b et 1 c}\}.$
3. $L_3 = \{x : f^{-1}(x) \text{ est un palindrome}\}.$

EXERCICE 2 : (5 pts)

Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour-là, la Maman demande à chacun de ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

Chabane : Katia a mangé le quart du gâteau ;

Saliha : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;

Katia : Djamel a mangé le quart du gâteau ;

Djamel : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seulement une de ces quatre propositions est vraie et seulement un des quatre enfants est coupable, qui des quatre a effectivement a mangé le quart du gâteau ?

EXERCICE 3 : (5 pts)

- 1) Montrez que les deux systèmes de connecteurs NAND ' \uparrow ' et NOR ' \downarrow ' sont complet.

Sachant que :

$$\checkmark \quad A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$$

$$\checkmark \quad A \downarrow B = \neg(A \vee B)$$

EXERCICE 4 : (5 pts)

Une formule de la logique des prédicats avec (exactement) une variable libre exprime une propriété qu'un individu peut avoir ou manquer. Supposons qu'on considère un vocabulaire $\{c, P, R\}$ où « c » est une constante, « P » un prédicat unaire et « R » un prédicat binaire. Le domaine D consiste des individus X, Y, Z dont X et Y (mais non pas Z) ont la propriété exprimée par le prédicat unaire « P » ; et X est relié à Z selon la relation exprimée par le prédicat binaire « R » (mais il n'y a pas des autres cas des individus reliés selon cette relation). En plus on spécifie que « c » est un nom de X .

- (1) Ci-dessus on a décrit un modèle avec le domaine D et les interprétations des items du vocabulaire $\{c, P, R\}$. On rappelle qu'un modèle est une structure (D, Int) , où D est un domaine et Int est une fonction qui fournit une interprétation de tout item du vocabulaire considéré. Selon la description $Int(c) = X$. Exprimez en termes d'ensembles quelle est l'interprétation $Int(P)$ de « P » et l'interprétation $Int(R)$ de « R ».
- (2) Est-ce qu'un des individus du domaine du modèle décrit possède la propriété exprimée par la formule suivante (avec la variable v libre) ? Si oui, lequel / lesquels ? Si non, pourquoi pas ?

- (i) $\neg P(v)$? (ii) $R(c, v)$? (iii) $\neg R(v, v)$? (iv) $\exists w R(v, w)$? (v) $\exists w R(w, v)$?
(vi) $(\neg P(v) \wedge \exists w R(v, w))$?

Bonne Chance