

Epreuve de Moyenne Durée N°01
 (02 Heures)

Exercice 1

Pour la figure ci-dessous, les corps A et B ne sont pas solidaires (il n'y a pas de collage entre les deux corps A et B)

Déterminer la charge critique « q » (charge limite) que doit appliquer le corps B sur le corps A pour le rompre par cisaillement ?

On donne :

- Contrainte admissible de cisaillement $[\tau] = 100 \text{ N/mm}^2$.
- Dimensions : $a = 100 \text{ mm}$, $e = 10 \text{ mm}$

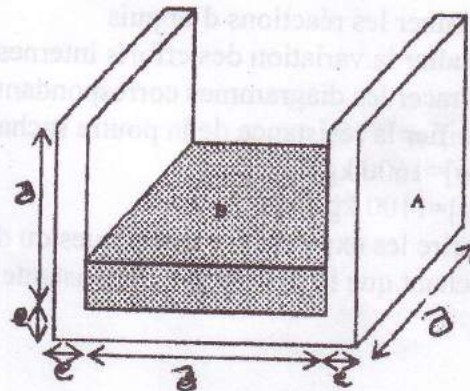


Figure 1

Exercice 2 :

Trois tiges métalliques (1, 2 et 3) soutiennent une membrure rigide BCD. Avant l'application de la charge P, la membrure reste horizontale. Tous les joints sont du type rotule. Si on applique une charge P de 72 kN, calculer :

- a) La contrainte normale qui s'exerce dans chacune des tiges
- b) Le déplacement du point où est appliquée la force P

Données : $A_1 = 960 \text{ mm}^2$, $A_2 = A_3 = 640 \text{ mm}^2$.

$E_1 = 105000 \text{ MPa}$, $E_2 = 210000 \text{ MPa}$ et $E_3 = 70000 \text{ MPa}$

$L_1 = 1512 \text{ mm}$, $L_2 = 2016 \text{ mm}$ et $L_3 = 672 \text{ mm}$

$a = 900 \text{ mm}$, $b = 600 \text{ mm}$

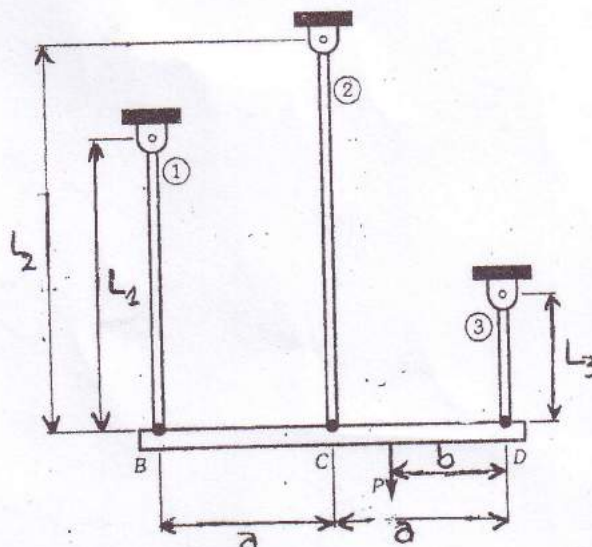


Figure 2

Exercice 3

Soit la poutre AE encastrée en A et simplement appuyée en D, soumise à Trois types de chargement, sa section droite à la forme indiquée selon la figure ci-dessous (figure 3) :

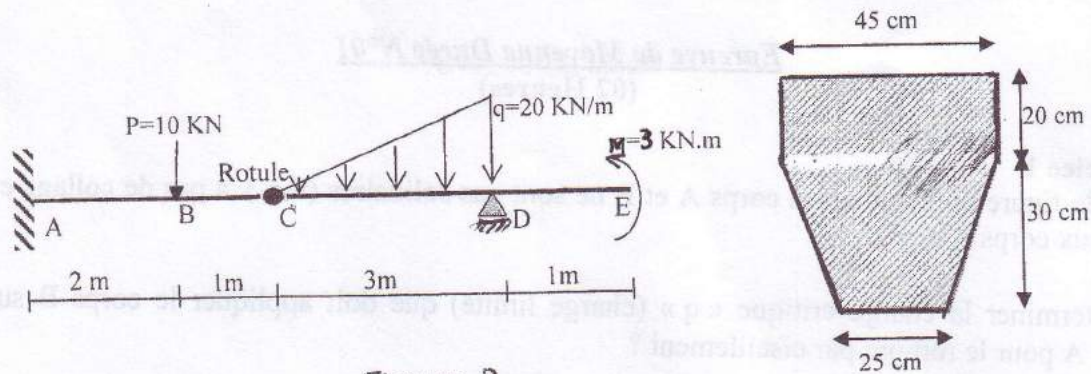


Figure 3

- 1) Déterminer les réactions d'appuis
- 2) Etudier la variation des efforts internes (efforts tranchants et moments fléchissant) et tracer les diagrammes correspondants.
- 3) Vérifier la résistance de la poutre sachant que les contraintes admissibles sont:
 $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$
 $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$
- 4) Ecrire les expressions analytiques du déplacement $V(x)$, et de la rotation $\theta(x)$ sachant que la rigidité EI est constante.

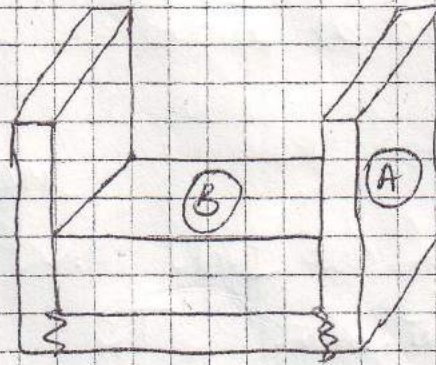
Bonne chance

Exo1

03 pts

La charge critique "q"
pour que les bords A se
rompent ? il faut que :

$$\tau = \frac{F}{S_c} > [\tau] \quad (0,50)$$



0,25

$$\Rightarrow F > [\tau] \cdot S_c \quad (1) \quad (0,25)$$

on $F = q \cdot a^2 \quad (0,5)$

$$S_c = (e \cdot a) \times 2 \quad (0,5)$$

$$(1) \Rightarrow q \cdot a^2 > [\tau] \cdot 2 e a \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow q > \frac{2e}{a} [\tau] = \frac{2 \cdot 10}{100} \cdot 100 = 20 \text{ N/mm}^2 \quad (0,25)$$

on prend $q = 20 \text{ N/mm}^2 \quad (0,5)$

Exo2

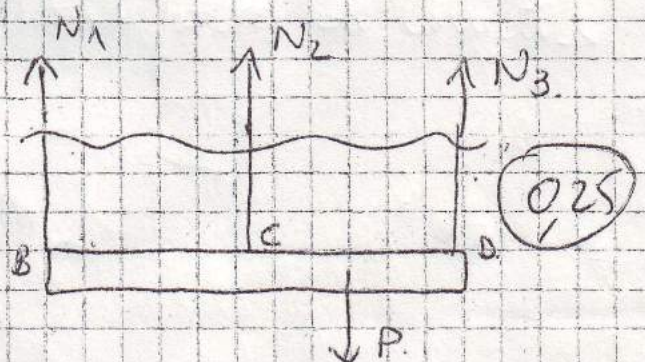
05 pts

1) les contraintes normales dans les tiges

$$D = 3 - 2 = 1$$

\Rightarrow système hyperstatique

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M/B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



0,25

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = P \quad (0,25)$$

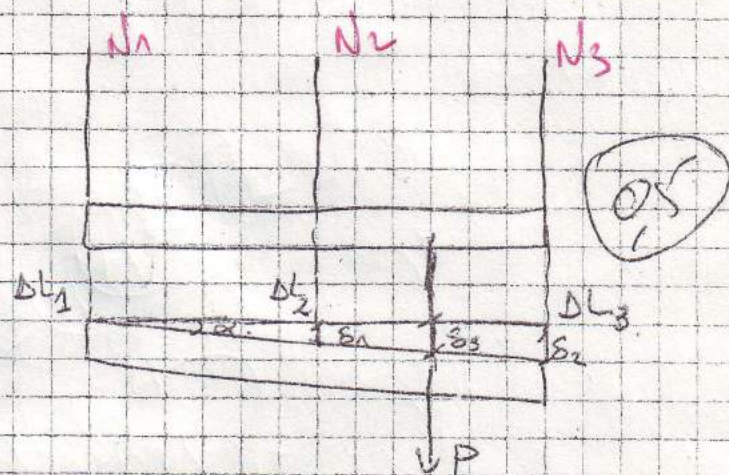
$$\sum M/B = 0 \Rightarrow 2a N_3 + a N_2 = P(2a - b) \quad (0,25)$$

on cherche une 3^{ème} équation (équation de déformation)

Après déformation :

on a :

$$\delta_2 \tan \alpha = \frac{\delta_2}{2a} = \frac{\delta_1}{a} \quad (0,25)$$



$$\delta_2 = \delta L_3 - \delta L_1$$

$$\delta_1 = \delta L_3 - \delta L_2$$

$$\Rightarrow \frac{\delta L_3 - \delta L_1}{2a} = \frac{\delta L_3 - \delta L_2}{a}$$

$$\Rightarrow \delta L_3 - \delta L_1 = 2\delta L_3 - 2\delta L_2$$

$$\Rightarrow \delta L_3 = 2\delta L_2 - \delta L_1 \quad (0,25)$$

on a

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{N \cdot L}{E A}$$

$$\Rightarrow \frac{N_3 \cdot L_3}{E_3 A_3} = 2 \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} - \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} \quad (0,25)$$

AN

$$N_1 + N_2 + N_3 = 72 \times 10^3 \quad (0,25)$$

$$1800 N_3 + 900 N_2 = 864 \times 10^5 \quad (0,25)$$

$$1,5 \times 10^{-5} N_3 = 3 \times 10^{-5} N_2 - 1,5 \times 10^{-5} N_1 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = 12 \text{ kN} \\ N_2 = 24 \text{ kN} \\ N_3 = 36 \text{ kN} \end{cases} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{12000}{960} = 12,5 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{24000}{640} = 37,5 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{A_3} = \frac{36000}{640} = 56,25 \text{ MPa} \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{l} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{array}$$

2) Le déplacement du pt on est appliquée la force P.

on a:

$$\tan \alpha = \frac{\delta_1}{a} = \frac{\delta_2}{2a} = \frac{\delta_3}{2a - b} \quad 0,25$$

$$\Rightarrow \delta_3 = \frac{\delta_1}{a} (2a - b)$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \Delta L_2 - \Delta L_1$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{12000 \cdot 1512}{105000 \cdot 960} = 0,18 \text{ mm} /$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{24000 \times 2016}{210000 \times 640} = 0,36 \text{ mm} /$$

$$\Rightarrow \delta_1 = 0,36 - 0,18 = 0,18 \text{ mm} \quad 0,25$$

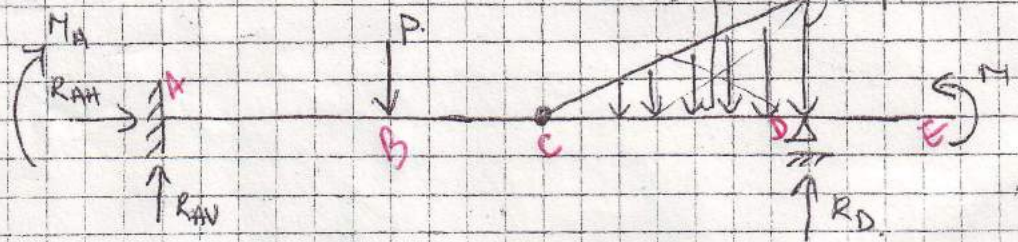
$$\Rightarrow \delta_3 = \frac{0,18}{900} (1800 - 600) = 0,24$$

$$\Rightarrow \Delta L_P = \Delta L_1 + \delta_3 = 0,18 + 0,24 = 0,42 \text{ mm} \quad 0,25$$

Exo3

12 p5

1) les réactions d'appuis:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AH} = 0$$

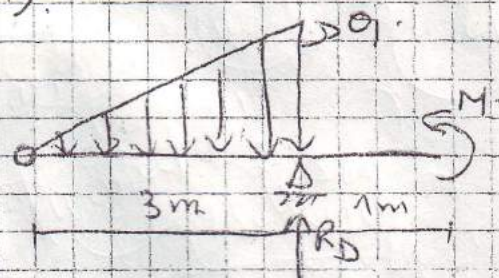
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AV} + R_D - 10 - \frac{20 \times 3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow R_{AV} + R_D = 40 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum M / \text{droite} = \sum M / \text{gauche} = 0$$

$$\Rightarrow M + R_D \times 3 - R \cdot \frac{2}{3} \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow R_D = 19 \text{ kN}$$



$$\sum M / A = 0 \Rightarrow M + (R_D \times 6) - R \left(\frac{2}{3} \times 3 + 3 \right) - P \times 2 - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 3 + (19 \times 6) - (30 \times 5) - (10 \times 2)$$

$$= -53 \text{ kN.m}$$

$$\sum M / D = 0 \Rightarrow M + R \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) + P(4) - (R_{AV} \times 6) - M_A = 0$$

$$\Rightarrow R_{AV} = \frac{3 + 30 + 40 + 53}{6} = 21 \text{ kN}$$

Verification:

$$(1) \Rightarrow 21 + 19 = 40 \text{ kN (vérifié)}$$

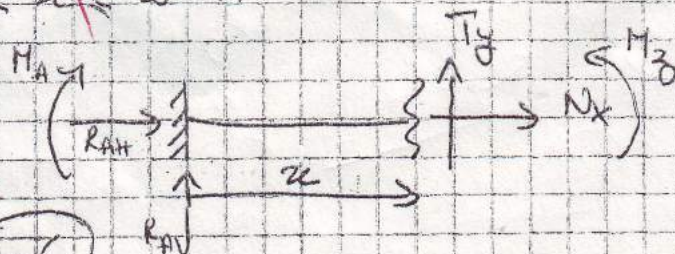
2) les efforts internes: il y a 04 tranches

1er trançon AB: $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -R_{AV}$$

$$\Rightarrow T_y = -21 \text{ kN}$$



$$\sum M/i = 0 \Rightarrow M_3 - R_{AV} \cdot x - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_3 = 21x - 53 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

$$M_3 = -53$$

$$M_3 = -11$$

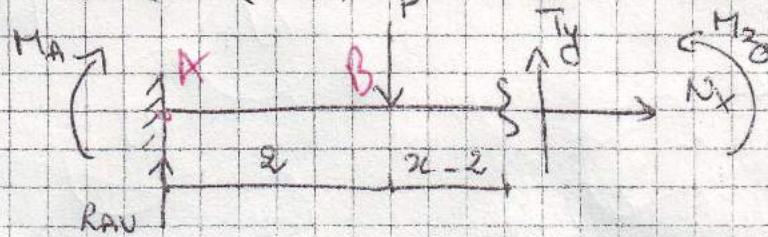
2eme tronçon BC : $2 \leq x \leq 3m$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$T_y = -R_{AV} + P$$

$$= -21 + 10 = -11 \text{ kN}$$



$$\sum M/i = 0 \Rightarrow M_3 - R_{AV}x + P(x-2) - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_3 = 21x - 10x + 20 - 53$$

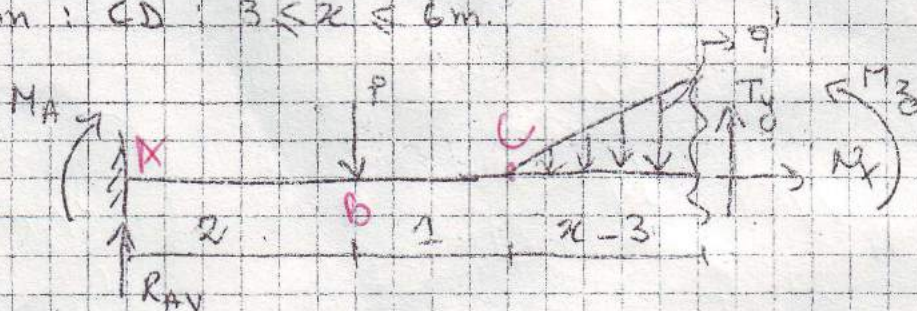
$$= 11x - 33$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array} \right.$$

$$M_3 = -11$$

$$M_3 = 0$$

3eme tronçon : CD : $3 \leq x \leq 6m$



$$\tan \alpha = \frac{20}{3} = \frac{q'}{x-3}$$

$$\Rightarrow q' = \frac{20(x-3)}{3}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y + R_{AV} - P - \frac{q'(x-3)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T_y = -11 + \frac{10(x-3)^2}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ x=6 \end{array} \right.$$

$$x=4.82$$

$$T_y = -11$$

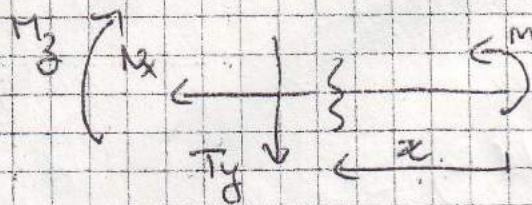
$$T_y = 19$$

$$T_y = 0$$

$$\begin{aligned}\sum M/i = 0 &\Rightarrow M_z = 21x - P(x-2) + M_A - \frac{10}{3}(x-3)^2 \cdot \frac{(x-3)}{3} \\ &= 21x - 10x + 20 - 53 - \frac{10}{9}(x-3)^3 \\ &= 11x - 33 - \frac{10}{9}(x-3)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x = 3 & \quad M_z = 0 \\ x = 6 & \quad M_z = 3 \text{ kN.m} \\ x = 4,82 & \quad M_z^{\max} = 13,32 \text{ kN.m}\end{aligned}$$

4^{eme} tronçon : ED : $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

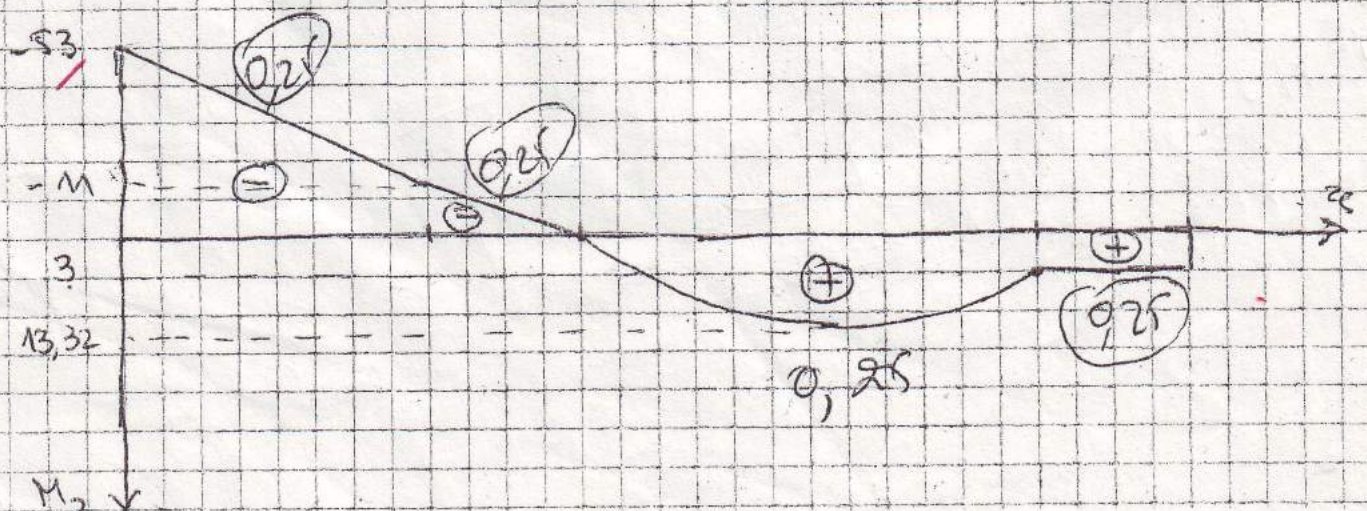
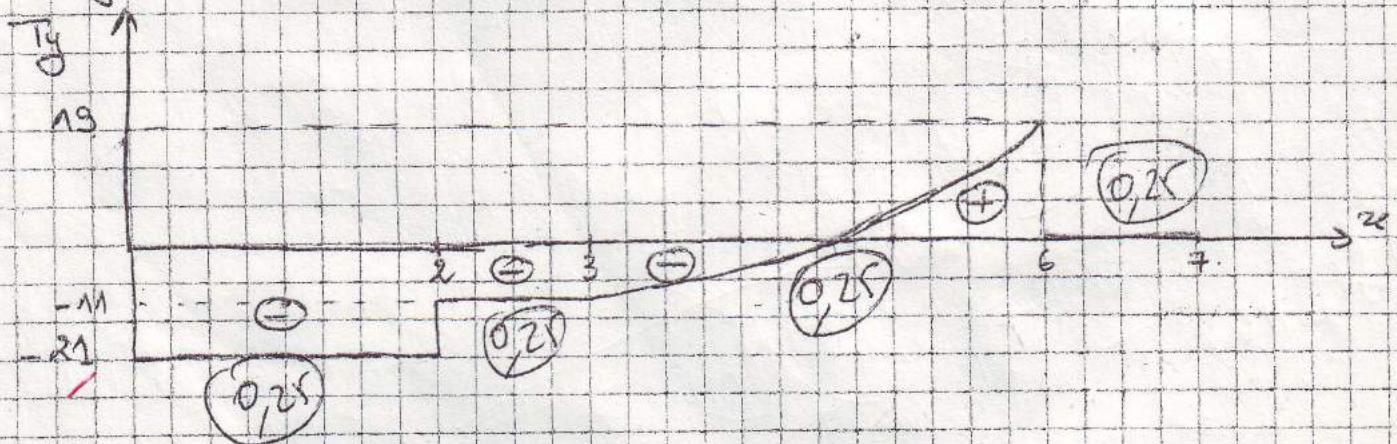


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 0$$

$$\sum M/i = 0 \Rightarrow M_z = 3 \text{ kN.m}$$

* Diagrammes



3) Vérification de la résistance

3.1) Sections dangereuses :

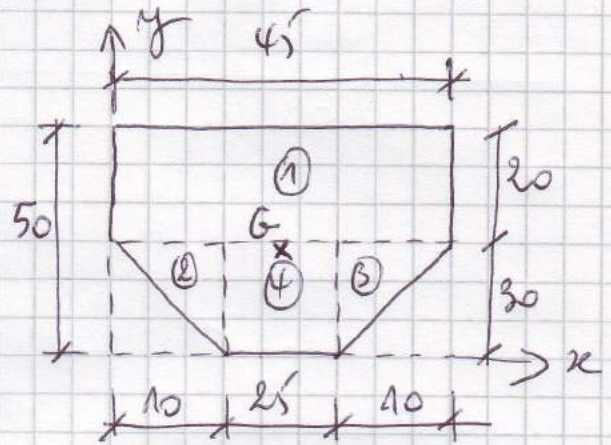
$$\text{I} \left| \begin{array}{l} M_z^{\max} = -53 \text{ kN.m.} \\ T_y^{\max} = -21 \text{ kN.} \end{array} \right.$$

$$\text{II} \left| \begin{array}{l} M_z = 13,32 \text{ kN.m.} \\ T_y = 0 \text{ kN.} \end{array} \right.$$

3.2/ Calcul de y_{\max}^+ et y_{\max}^-

$$x_G = 22,50 \text{ cm.}$$

le calcul de y_G se resume dans le tableau :



$$y_G = 27,30 \text{ (cm).}$$

0,25

Section	$A_i (\text{cm}^2)$	$y_{Gi} (\text{cm})$	$A_i y_i (\text{cm}^3)$
1	900	40	36000.
2	150	20	3000
3	150	20	3000.
4	750	15	11250.
Σ	1950	X	53250.

3.3/ Calcul de I_{Gz} :

$$I_{Gz} = (I_z)_1 + (I_z)_2 + (I_z)_3 + (I_z)_4.$$

$$(I_z)_1 = I_z + (y_G - y_{G1})^2 A_1 = \frac{45 \cdot 20^3}{12} + (40 - 27,30)^2 \times 900 = 175161,0 \text{ cm}^4$$

$$(I_z)_2 = (I_z)_3 = \frac{10 \cdot 30^3}{12} + (27,30 - 20)^2 \times 150 = 15493,50 \text{ cm}^4.$$

$$(I_z)_4 = \frac{25 \cdot 30^3}{12} + (27,30 - 15)^2 \times 750 = 169717,50 \text{ cm}^4.$$

$$I_{Gz} = 375865,50 \text{ cm}^4.$$

Vérifications :

Section I : Flexion Simple.

$$\left. \begin{array}{l} M_z^{\max} = -53 \text{ kN.m.} \\ T_y = -21 \text{ kN.} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y_{\max}^+ = 22,70 \text{ cm.} \\ y_{\max}^- = 27,30 \text{ cm.} \end{array} \right\}$$

0,25

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_z^{\max}}{I_{Gz}} \cdot y_{\max}^+ = \frac{53 \times 10^4}{375865,50} \times 22,70 = 32,40 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M_z^{\max}}{I_{Gz}} \cdot y_{\max}^- = \frac{53 \times 10^4}{375865,50} \times 27,30 = 38,48 \text{ Kg/cm}^2$$

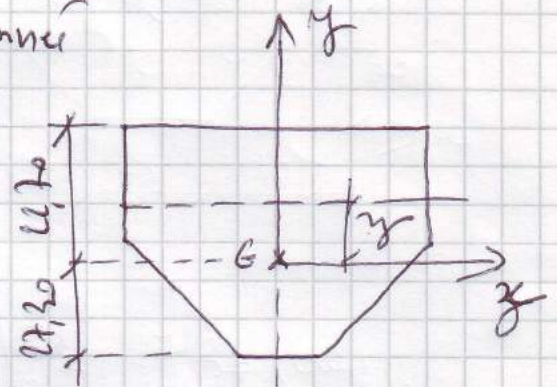
$$\text{Max}(\sigma_{\max}^+, \sigma_{\max}^-) = 38,48 \text{ Kg/cm}^2 < [\sigma] = 1600 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

⇒ Condition de résistance vérifiée.

La Contrainte de cisaillement est donnée

Par :

$$\tau = \frac{T_y^{\max} \cdot S_z^*}{b \cdot I_{Gz}}$$



$$S_z^* = (22,70 - y) \cdot 45 \times \left(\frac{22,70 - y}{2} + y \right)$$

$$= 45 \cdot (22,70 - y) \left(\frac{22,70 + y}{2} \right) = 22,50 \cdot (515,29 - y^2)$$

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (S_z^*)_{\max} = 22,50 \times 515,29 = 11594,02 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{21 \times 10^2}{45 \times 375865,50} \times 11594,02 = 1,44 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} < [\tau]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{38,48^2 + 3 \times (1,44)^2} = 38,57 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

0,25

$$38,57 \text{ Kg/cm}^2 \leq [\sigma] = 1600 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

⇒ Critère vérifié

Section II:

$$M_z^{\max} = 13,32 \text{ KN.m}, y_{\max}^+ = 27,30 \text{ cm} \\ y_{\max}^- = 22,70 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{13,32 \times 10^4}{375865,50} \times 27,30 = 9,67 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{13,32 \times 10^4}{375865,50} \times 22,70 = 8,04 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\max(\sigma_{\max}^+, \sigma_{\max}^-) = 9,67 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} < [\sigma] = 1600 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

La résistance de la poutre est vérifiée.

4- $v(x)$ et $\theta(x)$:

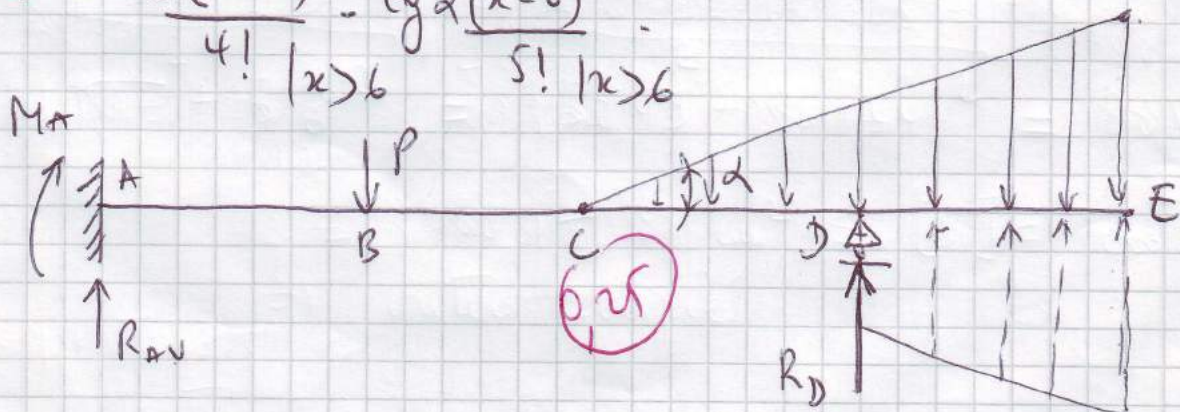
conditions initiales: $V_0 = 0$
 $\theta_0 = 0$ } encastrement

$$T_0 = -R_{AV} = -21 \text{ KN.}$$

$$M_0 = -M_A = 53 \text{ KN.m.}$$

$$; \quad \text{tg} \alpha = \frac{20}{3} \approx 6,67$$

$$EI v(x) = -\frac{21x^3}{3!} + \frac{53x^2}{2!} + \frac{10(x-2)^3}{3!} + \text{tg} \alpha \frac{(x-3)^5}{5!} - \frac{19(x-6)^3}{3!} \\ - \frac{20(x-6)^4}{4!} - \text{tg} \alpha \frac{(x-6)^5}{5!} \quad \begin{matrix} |x>2 \\ |x>3 \\ |x>6 \end{matrix}$$



$$\Rightarrow EI \theta(x) = -\frac{21x^2}{2!} + 53x + \frac{10(x-2)^2}{2!} + \text{tg} \alpha \frac{(x-3)^4}{4!} - \frac{19(x-6)^2}{2!} \\ - \frac{20(x-6)^3}{3!} - \text{tg} \alpha \frac{(x-6)^4}{4!} \quad \begin{matrix} |x>2 \\ |x>6 \end{matrix}$$

Fin

3) Verification de la resistance

1) Sections dangereuses

I $\begin{cases} M_z^{\max} = -53 \text{ kN.m.} \\ T_y^{\max} = -21 \text{ kN.} \end{cases}$

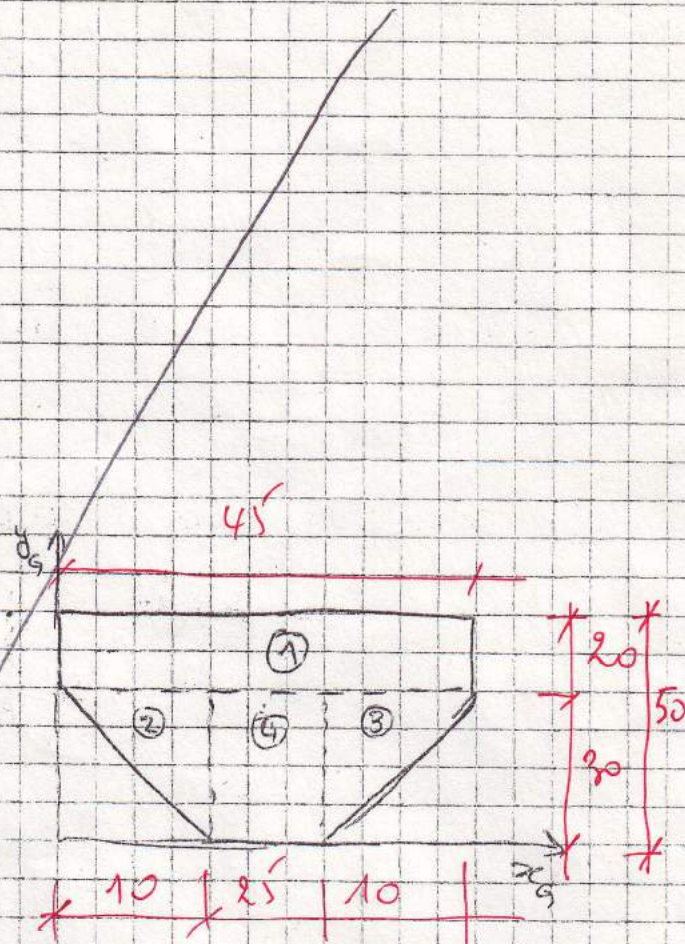
II $\begin{cases} M_z = 13,32 \text{ kN.m.} \\ T_y = 0 \end{cases}$

2) calcul y_{\max}^+ , y_{\max}^-

$x_G = 22,5 \text{ cm}$

Section	A_i	$y_{G_{i,1}}$	$A_i y_{G_{i,1}}$
1	900	40	36000
2	200 150	20	2000 3000
3	200 150	20	2000 3000
4	750	15	11250
Σ	1850 1950		51250 53250

$\Rightarrow y_G = \frac{53250}{1950} = 27,30 \text{ cm}$



2) Section

3) calcul I_z

$I_z = (I_z)_1 + (I_z)_2 + (I_z)_3 + (I_z)_4$

$(I_z)_1 = I_{z_1} + (y_G - y_{G_{i,1}})^2 A_1$

$= \frac{45(20)^3}{12} + (40 - 27,3)^2 \cdot 900 = 17161,0 \text{ cm}^4$

$(I_z)_2 = (I_z)_3 = \frac{10(30)^3}{36} + (27,3 - 20)^2 \cdot 150 = 15493,50 \text{ cm}^4$

$(I_z)_4 = \frac{25(30)^3}{12} + (27,3 - 15)^2 \cdot 750 = 1779,125 \text{ cm}^4$

1

$$\Rightarrow I_z = \frac{370236,5}{375.865,5} \text{ cm}^4$$

Verification

Section I : Flexion Simple

$$\begin{cases} M_z^{\max} = -53 \text{ kN.m} \\ T_y = -21 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{\max}^+ = 22,3 \text{ cm} \\ y_{\max}^- = 27,7 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{53 \times 10^4}{370236,5} (22,3) = 3192,28 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{53 \times 10^4}{370236,5} (27,7) = 3965,30 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow \max(\sigma_{\max}^+, \sigma_{\max}^-) = 3965,30 \text{ kg/cm}^2 \leq [\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{T_y^{\max} S_z^*}{b \cdot I_z}$$

$$S_z^* = (22,3 - y) \cdot 45 \times \left(\frac{22,3 - y}{2} + y \right)$$

$$= 45 (22,3 - y) \left(\frac{22,3 - y}{2} + y \right)$$

$$= 22,5 (497,29 - y^2) = 22,5 (515,29 - y^2)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T_y^{\max} \cdot 22,5 (497,29 - y^2)}{45 \cdot 370236,5}$$

$$\frac{d\tau}{dy} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$$

$$S_z^* = 22,3 \times 515,29 = 11594,02$$

$$\tau_{\max} = \frac{21 \times 10^3 \cdot 11594,02}{45 \cdot 370236,5} = 1,46 \text{ kg/cm}^2 \leq [\tau] = 1100$$

$$\sqrt{(39,65)^2 + 3(1,46)^2} = 39,73 \text{ kg/cm}^2 \leq [\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

