Série de TD 1
Logique Mathématique
$2^{ème}$ Licence SI

Exercice 1: donner la définition récursive de la fonction *longueur* qui, étant donné un mot, retourne sa longueur, c'est-à-dire le nombre de ses lettres.

Exercice 2: démontrer l'associativité de la concaténation sur Σ^*

Exercice 3 : prouver que les langages suivants sont réguliers:

- l'ensemble des représentations d'entiers pairs,
- l'ensemble des mots se terminant en 'al',
- l'ensemble des mots sur {a, b, c} qui ne contiennent jamais deux 'a' qui se suivent
- l'ensemble des mots sur {a, b, c} qui contiennent au moins une fois au moins quatre 'a' qui se suivent

Exercice 4 :

- Quels langages désignent les expressions régulières suivantes: (où $\Sigma = \{a, b\}$)

  ba^* ; $a^*ba^*ba^*$; $(a + b)^*$; $(a + b)^*(aa + bb)(a + b)^*$;

  $[aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba)]^*$

- Prouver les identités suivantes: (où A, B, C sont des expressions régulières sur Σ)

  $A + B = B + A$; $A + \emptyset = A$; $A + A = A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$;

  $A\varepsilon = \varepsilon A = A$; $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$; $(AB)C = A(BC)$; $A(B + C) = AB + AC$;

  $(A + B)C = AC + BC$; $A^* = A^*A^* = (A^*)^* = (\varepsilon + A)^*$; $\emptyset^* = \varepsilon^* = \varepsilon$

  $A^* = e + A + A^2 + A^3 + \dots + A^k + A^{k+1} A^*$

en particulier :

$A^* = \varepsilon + AA^*$

$(A + B)^* = (A^*+B^*)^* = (A^*B^*)^* = (A^*B)^*A^* = A^*(BA^*)^*$

$A^*A = AA^*$; $A(BA)^* = (AB)^* A$

Exemple de preuve: pour $A(BA)^* = (AB)^*A$:

soit un mot quelconque $w \in A(BA)^*$, il existe n tel que: $w = a_0(b_1a_1)(b_2a_2)\dots(b_na_n)$ avec $a_i \in A$ et $b_i \in B$ pour tout i. On peut alors réanalyser l'expression en tenant compte de l'associativité. On obtient:

$a_0(b_1\, a_1)(b_2\, a_2)\dots(b_n\, a_n) = (a_0\, b_1)(a_1\, b_2)(a_2\, b_3)\dots(a_{n-1}\, b_n)a_n$

qui est un mot de $(AB)^*A$. Réciproque similaire.

- En utilisant ces identités, simplifier l'expression régulière suivante:

  $(b+aa^*b)+(b+aa^*b)(a+ba^*b)^*(a+ ba^*b)$