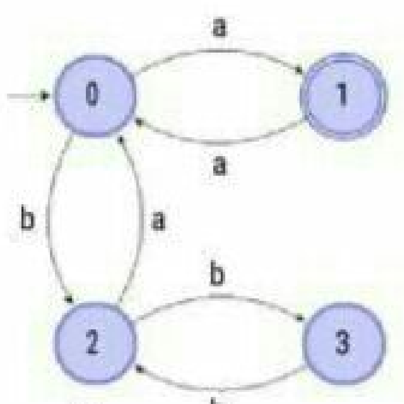
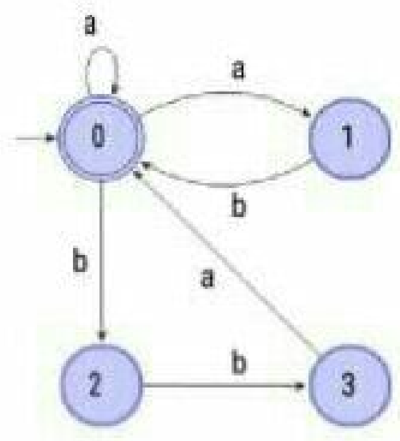
Théorie des Langages – TD 5

AUTOMATES ET EXPRESSIONS RÉGULIÈRES

Exercice 1 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. En utilisant le théorème d'Arden, donnez sous forme d'expressions régulières les langages L(M) et L(M') reconnus respectivement par les automates suivants :



M



M'

Rappel sur les propriétés des expressions régulières

- **P1.** $r + s = s + r$
- **P2.** $r + \emptyset = \emptyset + r = r$
- **P3.** $r + r = r$
- **P4.** $(r + s) + t = r + (s + t) = r + s + t$
- **P5.** $r\varepsilon = \varepsilon r = r$
- **P6.** $r\emptyset = \emptyset r = \emptyset$
- **P7.** $(rs)t = r(st) = rst$
- **P8.** $r(s + t) = rs + rt$
- **P9.** $r^* = (r^*)^* = r^*r^* = (\varepsilon + r)^* = r^*(r + \varepsilon) = (r + \varepsilon)r^* = \varepsilon + rr^* = \varepsilon + r^*r$
- **P10.** $(r + s)^* = (r^*s^*)^* = (r^*s)^*r^* = (s^*r)^*s^* = r^*(sr^*)^*$
- **P11.** $r(sr)^* = (rs)^*r$
- **P12.** $(r^*s)^* = \varepsilon + (r + s)^*s$
- **P13.** $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r + s)^*$
- **P14.** $(r + \varepsilon)^*(r + \varepsilon) + s = sr^*$
- **P15.** $rr^* = r^*r = r^+$

Corrigé :

Le système d'équation des langages L(0), L(1), L(2) et L(3) associé à M

$$\begin{cases} L0 = aL1+bL2 & (e0) \\ L1 = aL0 + \varepsilon & (e1) \\ L2 = bL3+aL0 & (e2) \\ L3 = bL2 & (e3) \end{cases}$$

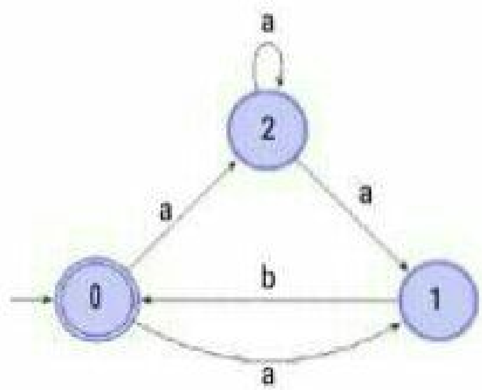
- En utilisant e3, remplaçons L3 dans l'équation e2
  $L2= bL3+aL0$
  $L2= b(bL2)+aL0$
  $L2= bbL2+aL0$
- Eliminons L2, en utilisant le théorème d'Arden
  $L2=(bb)^*aL0$ (e'2)
- En utilisant e1 et e'2, remplaçons L1 et L2 dans e0
  $L0=aL1+bL2$
  $L0=a(aL0 +\varepsilon)+b(bb)^*aL0$
  $L0=(aa+b(bb)^*a)L0+a$
- Eliminons L0, en utilisant le théorème d'Arden
  $L0=(aa+b(bb)^*a)^*a$
- L'expressions régulières reconnue par l'automate M est $(aa+b(bb)^*a)^*a$

Le système d'équation des langages L(0), L(1), L(2) et L(3) associé à M'

$$\begin{cases} L0=aL0+aL1+bL2+\varepsilon & (e0) \\ L1=bL0 & (e1) \\ L2=bL3 & (e2) \\ L3=aL0 & (e3) \end{cases}$$

- Remplaçons L3 dans (e2), en utilisant (e3)
  $L2=bL3$
  $L2=b(aL0)$
  $L2=baL0$ (e'2)
- Remplaçons L1 et L2 dans (e0), en utilisant (e1) et (e'2)
  $L0=aL0+aL1+bL2+\varepsilon$
  $L0=aL0+abL0+bbaL0+\varepsilon$
  $L0=(a+ab+bba)L0+\varepsilon$ (e'0)
- Eliminons L0 de l'équation (e'0), en utilisant le théorème d'Arden
  $L0=(a+ab+bba)^*\varepsilon$
- L'expressions régulières reconnue par l'automate M' est : $(a+ab+bba)^*$

Exercice 2 - Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit l'automate M suivant



1. Montrez, en utilisant le théorème d'Arden, que $L(M) = (a^*ab)^*$
2. Déterminisez M. Proposez une grammaire qui engendre L(M).

Corrigé :

1. **L**e système d'équation des langages L(0), L(1) et L(2) associé à M

$$\begin{cases} L0=aL1+aL2+\varepsilon & (e0) \\ L1=bL0 & (e1) \\ L2=aL2+aL1 & (e2) \end{cases}$$

- Eliminons L2 de l'équation (e2), en utilisant le théorème d'Arden

$L2= a^*aL1$

- Remplaçons L1 dans (e'2), en utilisant (e1)

$L2= a^*abL0$ (e'2)

- Remplaçons L1 et L2 dans (e0), en utilisant (e1) et (e'2)

$L0=aL1+aL2+\varepsilon$

$L0=abL0+aa^*abL0 +\varepsilon$

$L0=(ab+aa^*ab)L0+\varepsilon$

$L0=(ab+aa^*ab)L0+\varepsilon$ ($aa^*=a^+$ en appliquant P15)

$L0=(\varepsilon+ a^+)abL0+\varepsilon$ (car $\varepsilon+ a^+= a^*$)

$L0=(a^*ab)^*\varepsilon$ (car $\varepsilon+ a^+= a^*$)

$L0=(a^*ab)^*$

$L0= (a^+b)^*$ (en appliquant P15)

2. Déterminisons M

A partir de l'équation (e0) on obtient

$L0=a(L1+L2)+\varepsilon$

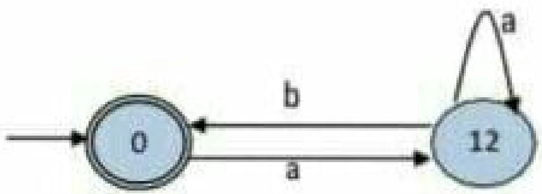
En utilisant les équations (e1) et (e2), on obtient

$L1+L2= bL0+ a(L1+L2\ )$

Le système d'équation des langages de l'automate M déterminisé est comme suit :

$$\begin{cases} L0=a(L1+L2)+\varepsilon \\ L1+L2= a(L1+L2)\ +bL0 \end{cases}$$

L'automate M déterminisé peut être construit comme suit :



Une grammaire qui engendre le langage L(M) peut être déduite à partir du système d'équation ci-dessus : (en appliquant la partie cours sur la transformation d'un automate fini en une grammaire linéaire à droite –voir page 47 du chapitre 3 « Automates finis »).

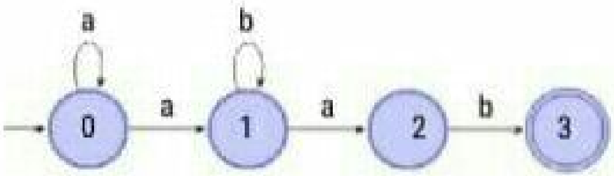
En prenant $S=L0$ et $A=L1+L2$, on obtient les règles de production suivantes :

$$\begin{cases} S \rightarrow aA/\varepsilon \\ A \rightarrow aA/bS \end{cases}$$

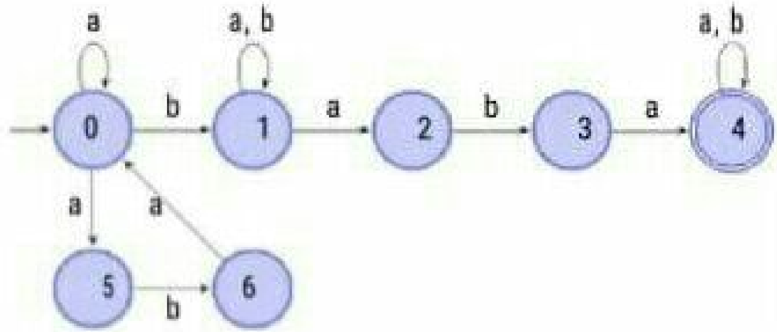
4

Exercice 3 - Par la méthode **d'élimination des états**, donnez les expressions régulières équivalentes aux automates suivants :

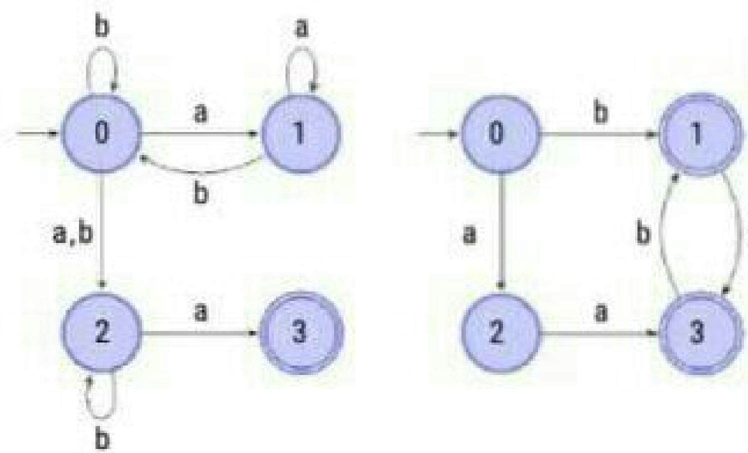
1. Automate M_1



2. Automate M_2



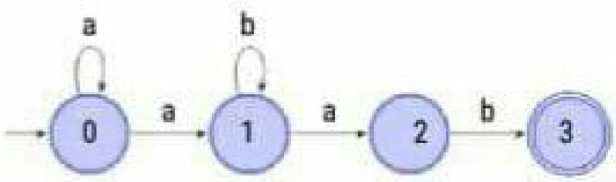
3. Automate M_3 (à gauche) et automate M_4 (à droite)



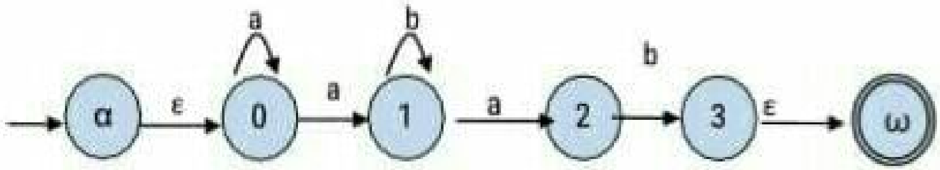
Corrigé :

1. Pour obtenir l'expression régulière de l'automate M1 par la méthode d'élimination d'état, on suivra l'algorithme du cours décrit dans le chapitre 4 – page 19 -

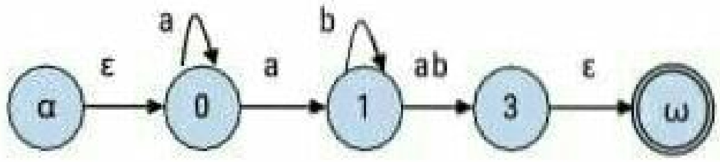
   L'automate M_1



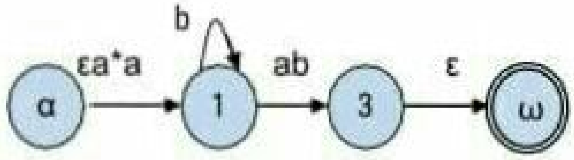
- On ajoute à M_1 deux nouveaux états que l'on note ω et α et des ε-transitions comme ceci :



- On élimine la transition 2 comme ceci :

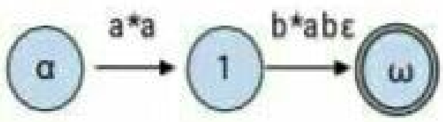


- On élimine la transition 0 comme ceci



$\varepsilon a^*a=a^*a$ (par la propriété P5)

- On élimine la transition 3 comme ceci:



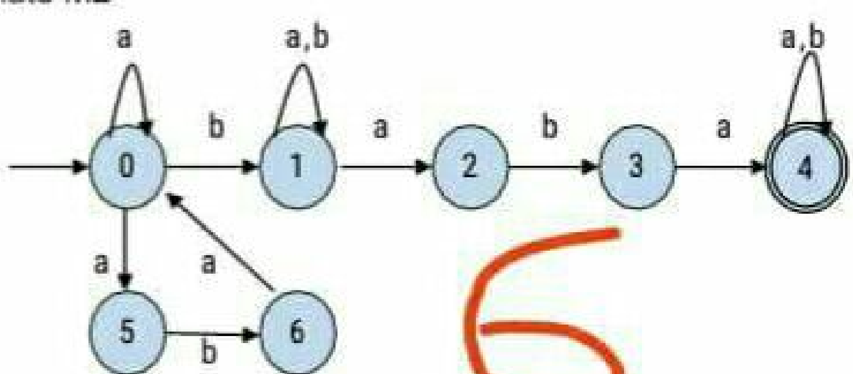
$b^*ab\varepsilon=b^*ab$ (P5)

- On élimine la transition 1 comme ceci:

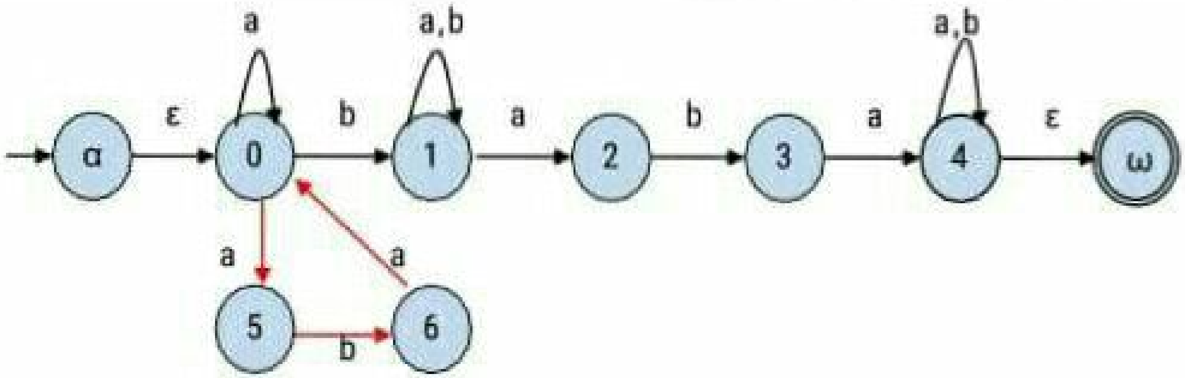
$a^*ab^*ab=a^+ b^* ab$ (P15)

- L'expression régulière de l'automate M1 est : $a^+ b^* ab$

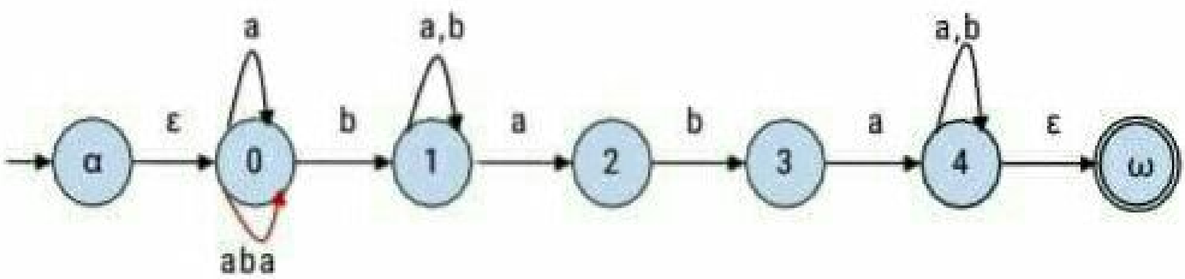
L'automate M2



6



- On remplace les transitions en rouge par une seule comme ceci :



- L'expression régulière de M_2 est comme ceci : $(aba+a)^*b(a+b)^*aba(a+b)^*$

Même chose pour les automates M_3 et M_4

Exercice 4 - Construire sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ les automates qui reconnaissent les langages :

1. $L = (aa + bb^*a + abb^*a)^*$
2. $L' = (b(aa)^*b)^*$
3. $L'' = ((a + b)b^*a)^*$
4. $L''' = (a^*b)^*a$

Corrigé :

1. $L = (aa + bb^*a + abb^*a)^*$

$L = (aa + bb^*a + abb^*a)^*\varepsilon$ (En utilisant le théorème d'Arden, on obtient : $L=(aa + bb^*a + abb^*a)L+\varepsilon$)

$L = aaL+bb^*aL+abb^*aL+\varepsilon$

$\mathbf{L=aL1+bL2+aL3+\varepsilon}$ (En posant $\mathbf{L1=aL}$, $L2=b^*aL$ et $L3=bb^*aL$)

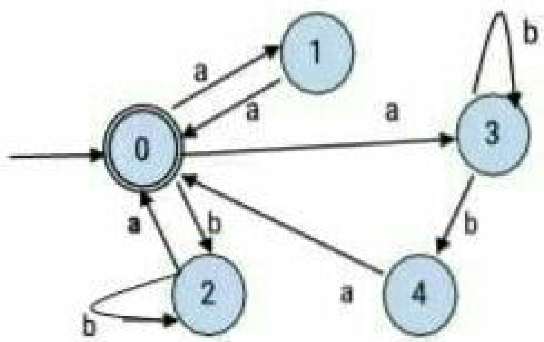
$L2=b^*aL$ (En utilisant théorème d'Arden, on obtient : $\mathbf{L2=bL2+aL}$)

$L3=bb^*aL$
$L3=b^*baL$ (En utilisant le théorème d'Arden on obtient : $L3=bL3+baL$)

$L3=bL3+baL$
$L3=bL3+bL4$ (En posant $\mathbf{L4=aL}$)

En rassemblant les équations linéaires, on obtient le système d'équation du langage L comme suit :

$$\begin{cases} L=aL1+bL2+aL3+\varepsilon \\ L1=aL \\ L2=bL2+aL \\ L3=bL3+bL4 \\ L4=aL \end{cases}$$



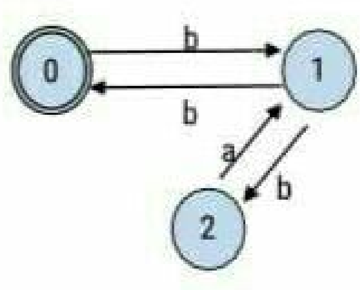
2. $L=(b(aa)^*b)^*$
$L=(b(aa)^*b)^*\varepsilon$ (p5) (e)
En appliquant le théorème d'Arden sur l'équation e, on obtient :
$L=b(aa)^*bL+\varepsilon$) (e')

$\mathbf{L=bL1+\varepsilon}$ (En posant $L1=(aa)^*bL$ dans l'équation (e')

$L1=(aa)^*bL$ (e1)
En appliquant le théorème d'Arden sur l'équation (e1), on obtient :
$L1=(aa)L1+bL$ (e'1)
$\mathbf{L1=aL2+bL}$ (En posant $\mathbf{L2=aL1}$ dans l'équation (e'1)

En rassemblant les équations linéaires, on obtient le système d'équation du langage L comme suit :

$$\begin{cases} L=bL1+\varepsilon \\ L1=aL2+bL \\ L2=aL1 \end{cases}$$



8

Exercice 5 - Les langages suivants sont-ils réguliers?

1. $L_1 = \{0^{2n} / n \geq 1\}$
2. $L_2 = \{0^{2^n} / n \geq 1\}$
3. $L_3 = \{0^n 1^n / n \geq 1\}$
4. $L_4 = \{x \epsilon \{0,1\}^* / x\, n'a\ pas\ 3\ zéros\ concécutifs\}$

Corrigé :

Rappel sur les expressions régulières et les langages représentés par des expressions régulières – page 7, 8 et 9

1. Pour n=1, w=00

   Pour n=2, w=00.00 etc.

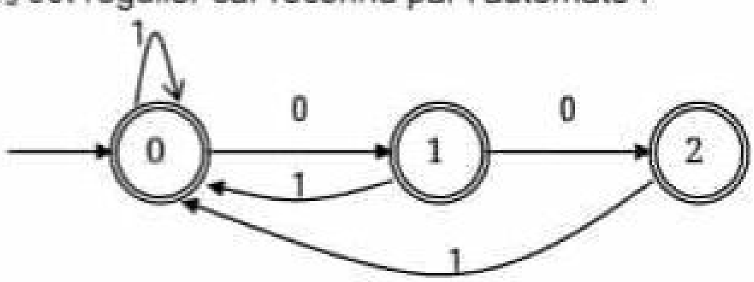
   L1 = 00(00)*. C'est donc un langage régulier.

Rappel sur le théorème de pompage – page 30

2. Supposons que L_2 soit régulier. Soit $n \geq 1$. Alors, le théorème de pompage nous dit que, comme $z = 0^{2^n} \epsilon L_2$ et $2^n > n$, on peut écrire z = uvw avec $|v| \leq n$ tel que $z' = uv^2w$ ϵL_2. Or $|z0| = |uv^2w| \leq 2^n + n$. Mais $2^n + n < 2^n+1$ donc on ne peut pas avoir $z' \epsilon\ L_2$. C'est une contradiction, donc L2 n'est pas régulier.

3. Supposons que L3 soit régulier. Soit n≥1. On applique le théorème de pompage avec $z=0^n1^n$. Donc z=uvw et $z'=uv^2w$ doit être dans L3. Donc v a autant de 0 que de 1 ;

4. L_5 est régulier car reconnu par l'automate :



9