- Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne

Soit $\Delta L_{\mathrm{Al}}/L_{\mathrm{Al}}$ l'allongement relatif du cylindre d'aluminium, $\Delta L_{\mathrm{ac}}/L_{\mathrm{ac}}$ l'allongement rela
du cylindre d'acier et appelons ΔL la déformation totale imposée.
Comme chacun des cylindres resse la même contrainte σ, nous avons

$$\frac{\Delta L_{\mathrm{Al}}}{L_{\mathrm{Al}}} = \frac{\sigma}{E_{\mathrm{Al}}} = -\frac{|F|}{E_{\mathrm{Al}}S},$$

$$\frac{\Delta L_{\mathrm{ac}}}{L_{\mathrm{ac}}} = \frac{\sigma}{E_{\mathrm{ac}}} = -\frac{|F|}{E_{\mathrm{ac}}S}.$$

où σ est < 0 (contrainte de compression correspondant à ΔL_{Al} et $\Delta L_{\mathrm{ac}} < 0$).
On aimerait que $\Delta L = \Delta L_{\mathrm{Al}} + \Delta L_{\mathrm{ac}}$ soit égale à -0.05 mm:

$$\Delta L = -L_{\mathrm{Al}}\frac{|F|}{E_{\mathrm{Al}}S} - L_{\mathrm{ac}}\frac{|F|}{E_{\mathrm{ac}}S}$$

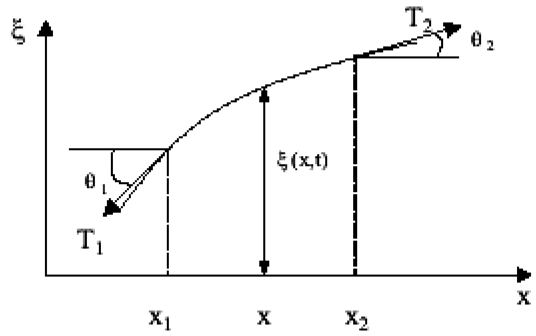
La force à appliquer est donc de

$$|F| = -\frac{S\Delta L}{L_{\mathrm{Al}}/E_{\mathrm{Al}} + L_{\mathrm{ac}}/E_{\mathrm{ac}}} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ N}$$

- Réponse Exercice n° 2, EFP Lausanne

On étudie une petite déformation qui se propage dans une corde le long de x.
Hypothèse: l'amplitude de la déformation est faible et on peut admettre que le vecteur d déplacement ξ est perpendiculaire à la direction de propagation.

On considère une section de longueur Δx ($\Delta x \to 0$) de la corde pour laquelle on écrit l'équation de Newton.



Selon x:
comme il n'y a pas de déplacement selon x, on a :

$$\Sigma F_x = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0,$$

$$\Rightarrow T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 = T.$$

Selon y:

$$\begin{aligned} \Delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Sigma F_y &= T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \\ &= T_2 \cos\theta_2 \tan\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \tan\theta_1 \\ &= T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1). \end{aligned}$$

Soit avec $\Delta m = \rho S \Delta x$: $\quad \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$.

Relation entre θ et ξ: $\tan\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$ (il s'agit de la définition de dérivée).

$$\Rightarrow \tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_2,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_1,t) \simeq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t)(x_2 - x_1) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

$$\Rightarrow \quad \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho S}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

ce qui constitue une équation d'onde pour une onde de célérité $u = \sqrt{T/(\rho S)}$. Nous avons trouvé que $T = T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2$, mais dans le cas de déformations faibles nous pouvon admettre que $\cos\theta_1 \approx 1$ et $\cos\theta_2 \approx 1$. Dans la formule pour la célérité, on a alors que T correspond à la tension dans la corde ($T = T_1 = T_2$).

■ Réponse Exercice n° 3, EFP Lausanne

(a) Nous avons vu au cours qu'un pulse se propageant dans la direction positive avec la c
u correspond à un pulse tel que

$$\xi(x,t) = f(x - ut)$$

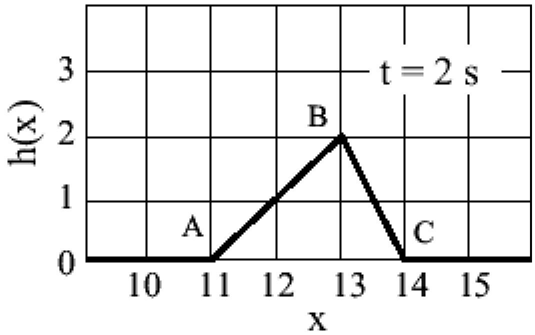
La vitesse de propagation d'un pulse de la forme

$$\xi(x,t) = h(x - 5t)$$

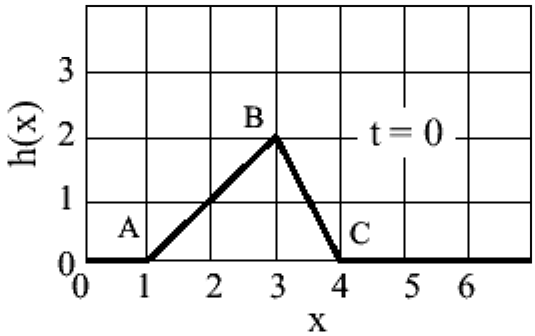
est donc égale par identification à $u = 5$ cm/s, puisque $[x]$ = cm et $[t]$ = s.
(b) Au temps $t = 2$ s, le pulse s'est déplacé sur l'axe de x, sans changer de forme, d'une distance

$$\Delta x = u \cdot 2\,s = 10\,\text{cm}$$

On a donc



(c) Notons A, B, C, les points caractéristiques du pulse au temps $t = 0$.



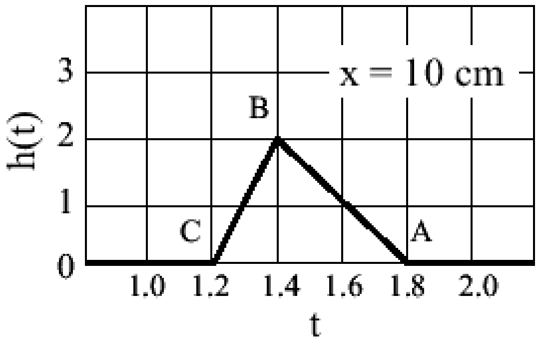
Lorsque le pulse se déplace le long de l'axe x en fonction de temps, le point C atteint l
$x = x_0 = 10$ cm avant les points B et A. La forme du pulse est donc inversée.
Le point C atteint $x_0 = 10$ cm après un temps t_C donné par

$$t_C = \frac{x_0 - 4\,\text{cm}}{u} = \frac{10\,\text{cm} - 4\,\text{cm}}{5\,\text{cm/s}} = 1.2\,\text{s}$$

De même les points B et A atteignent x_0 après les temps

$$t_B = \frac{x_0 - 3\,\text{cm}}{u} = 1.4\,\text{s} \qquad \text{et} \qquad t_A = \frac{x_0 - 1\,\text{cm}}{u} = 1.8\,\text{s}$$

En fonction du temps on a donc



(version alternative, notion de phase ϕ)

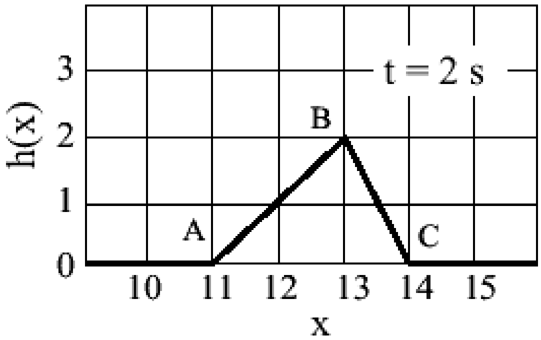
Dans cet exercice, x est en cm et t en s.

(a) La célérité u est déterminée par

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

où $h(x_1, t_1) = h(x_2, t_2)$. $h(x, t)$ dépend uniquement de la grandeur $\phi = x - 5t$. Considér exemple $h(x, t) = 2$. Pour $t = 0$ on voit sur la figure que $x = 3$ donc $\phi = 3$ pour $h(x, t)$ = Prenons $t_1 = 0$ et $t_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3$ et $x_2 = 8$ en imposant $\phi = 3 \Rightarrow u = 5$ cm/s; $[u]$ = cı

(b) Le pulse ne change pas de forme: $h = 2$ pour $\phi = 3 \Rightarrow 3 = x - 5 \cdot 2 \Rightarrow x = 13$



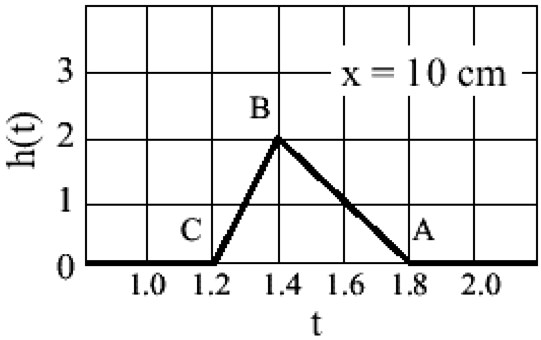
(c) Pour $x = 10$, considérons les points A, B, C avec $\phi = 1, 3, 4$

dessin à t = 0 :

$\phi = 1 \Rightarrow h(x, t) = 0$; $\phi = 3 \Rightarrow h(x, t) = 2$; $\phi = 4 \Rightarrow h(x, t) = 0$

$\phi = 1 \Rightarrow t = 1.2$ s ; $\phi = 3 \Rightarrow t = 1.4$ s ; $\phi = 4 \Rightarrow t = 1.8$ s

Soit $h(10, 1.2) = 0$; $h(10, 1.4) = 2$; $h(10, 1.8) = 0$



Question 1

Le résultat de l'exercice 2 indique que $u \sim \sqrt{T}$ et $u \sim \sqrt{1/(\rho S)}$ où ρS est la densité li

cas A et B : $T_A = T_B; \quad \rho_A S = \rho_B S \quad \Longrightarrow \quad u_A = u_B$

cas C : $T_C < T_A; \quad \rho_C S = \rho_A S \quad \Longrightarrow \quad u_C < u_A$

cas D : $T_D = T_C; \quad \rho_D S > \rho_C S \quad \Longrightarrow \quad u_D < u_C$

$\Longrightarrow \quad u_A = u_B > u_C > u_D$

Question 2

L'expression générale d'une onde sinusoïdale est donnée par

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi).$$

A un instant $t = t_0$ donné,

$$y(x,t_0) = y_0 \sin(kx - \omega t_0 + \phi) = y_0 \sin(kx - \phi'),$$

où dans le cas du dessin $\phi' = 0$.

La longueur d'onde est donnée par $\lambda = 2\pi/k$. On calcule ainsi :

cas a) $\lambda_a = 2\pi/2 = \pi$,

cas b) $\lambda_b = 2\pi/4 = \pi/2$,

cas c) $\lambda_c = 2\pi/8 = \pi/4$.

On a donc :

$$a) \to 2\,, \quad b) \to 3\,, \quad c) \to 1\,.$$