

3. APPLICATIONS DE L'EQUATION DE FOURIER (cas unidimensionnels et stationnaires)

Avec l'équation 2.21 nous sommes capables de calculer la distribution de la température en fonction de l'endroit et du temps dans un corps solide. Le calcul de la densité du flux de chaleur q est aussi possible. En tout cas, il faut en premier calculer $T(x,y,z, t)$ et après, par le calcul de la première dérivée de T on peut trouver une équation pour q . L'Equation (2.21) est une équation différentielle partielle et trouver une solution est relativement difficile. Mais déjà pour des cas stationnaires ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) l'équation devient une équation différentielle ordinaire et une résolution sans trop d'effort est souvent possible.

3.1 La méthode basique

La méthode basique est de l'expliquer en utilisant l'exemple d'un mur où se déroule une réaction chimique.

Exemple 3.1

Un long et mince (épaisseur e) mur en béton est en cours de durcissement par une réaction chimique (hydratation du ciment). Cette réaction est exothermique ($\dot{q}_p > 0$ [W/m^3]). Les deux surfaces extérieures sont gardées à la température ambiante T_w . Calculer la température maximale à l'intérieur pour le cas stationnaire.

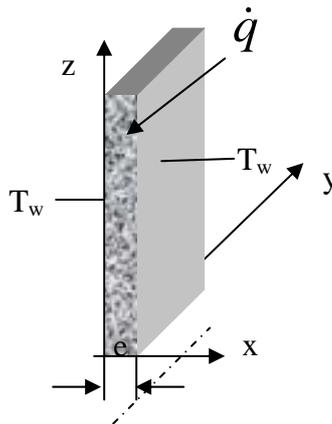


Figure 3.1 : Système des coordonnées

1. Choix du système de coordonnées et identification des variables indépendantes

Pour ce problème, les coordonnées cartésiennes sont bien adaptées à la situation. La température va changer seulement dans la direction x . Dans les autres directions (y et z) on peut attendre une distribution de température homogène (q_x et $q_y = 0$); voir Figure 3.1. Parce qu'on n'attend pas une très grande différence de la température à l'intérieur du mur, il est possible de dire que k est constant.

2. Ecrire l'équation de Fourier adaptée au problème

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{=0, \text{ parce que } \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0} = \underbrace{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}_{=0, \text{ cas stationnaire}} - \frac{\dot{q}_p}{k} \quad (3.1)$$

(3.1) devient

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}_p}{k} \quad (3.2)$$

3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

Il faut intégrer l'équation (3.2) deux fois :

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_p}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.3)$$

4. Ecrire les conditions aux limites et les conditions initiales

Pour exemple 3.1 seulement deux conditions aux limites sont connues (et nécessaires):

$$T(x=0) = T_w \quad \text{et} \quad T(x=e) = T_w$$

Important : utiliser seulement des informations accessibles pour les conditions aux limites et initiales. Autrement, la solution n'est pas utile.

5. Utiliser les conditions aux limites et initiales pour trouver les valeurs des constantes d'intégration

Cette étape peut être très compliquée. Pour exemple 3.1 elle est encore simple :

Pour $x=0$, on trouve avec l'équation (3.3) :

$$T_w = -0 + 0 + C_2 \quad \text{donc} \quad C_2 = T_w \quad (3.4)$$

Pour $x=e$, on trouve

$$T_w = -\frac{\dot{q}_p}{2k} e^2 + C_1 e + \underbrace{C_2}_{=T_w} \quad \text{donc} \quad C_1 = \frac{\dot{q}_p e}{2k} \quad (3.5)$$

6. Utiliser les solutions (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.3) pour obtenir une solution particulière pour le problème :

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_p}{2k} x^2 + \frac{\dot{q}_p e}{2k} x + T_w \quad (3.6)$$

On peut écrire équation (3.6) aussi, dans une forme sans dimension (cette forme d'équation va nous donner la possibilité d'évaluer le résultat) :

$$\frac{T - T_w}{\frac{\dot{q}_p e^2}{k}} = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{e} - \left(\frac{x}{e} \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

7. Vérifier si la solution est correcte

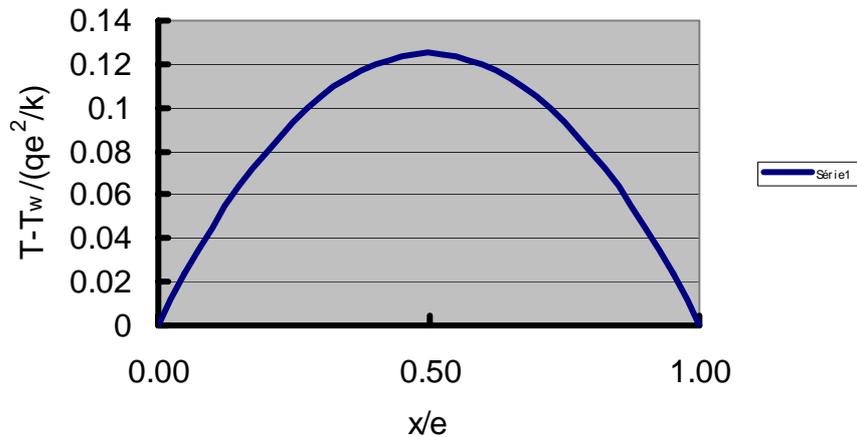


Figure 3.2 Equation 3.7

Il faut « jouer » avec la solution, vérifier les cas extrêmes ($x = 0$; $x = e$), si possible construire un graphe avec la solution.

Finalement, il faut trouver la densité du flux de chaleur q en fonction de x

$$q(x) = -k \frac{\partial T}{\partial x} = k \left[\frac{\dot{q}_p}{k} x - \frac{\dot{q}_p e}{2k} \right] \quad (3.8)$$

pour $x = 0$, l'équation (3.8) devient

$$q_{x=0} = -\frac{\dot{q}_p e}{2} \quad (3.9)$$

et pour $x = e$:

$$q_{x=e} = \frac{\dot{q}_p e}{2} \quad (3.10)$$

La différence entre les équations (3.9) et (3.10) est seulement le signe ou la direction du flux ! Pour $x = e/2$, q devient nul (le gradient de la température est aussi nul à cet endroit !) Il est aussi intéressant que la densité du flux de chaleur ne dépende pas de k !

Exemple 3.2

Un mur simple dans un état thermique stable et sans puissance calorifique (pas de production de chaleur [$\dot{q}_p = 0$]). Le mur est mince, le flux de chaleur est parallèle à la direction x . Les températures des deux côtés sont différentes. Calculer le profil de la température et la densité du flux de chaleur (Figure 3.3).

1. $T = T(x)$, cas stationnaire, flux seulement dans la direction x

$$2. \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (3.11) \quad !$$

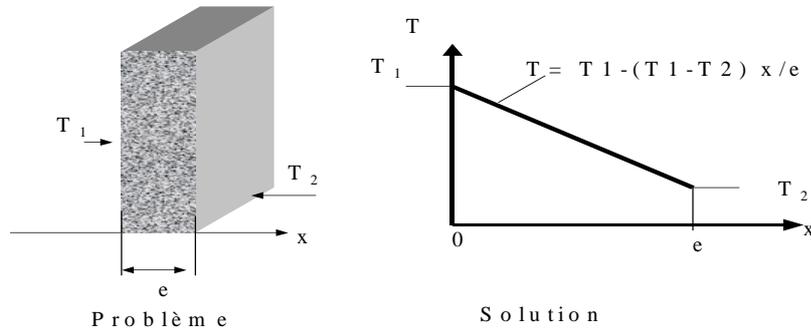


Figure 3.3 Mur simple, cas stationnaire

3. Solution générale :

(3.12)

4. Conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$; $T(x=e) = T_2$

5. constantes d'intégration :

$$T_1 = 0 + C_2 \quad \text{donc} \quad C_2 = T_1; \quad T_2 = C_1 e + C_2 \quad \text{donc} \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{e} \quad (3.13)$$

6. Solution :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} x \quad (3.14)$$

7. La solution satisfait les conditions aux limites. Equation (3.14) est linéaire parce que le terme $(T_2 - T_1)/e$ est constant.

8. Que vaut q dans ce cas là ?

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} x \right) = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} x \right) = k \frac{T_1 - T_2}{e} \quad (3.15)$$

$$\text{donc} \quad \boxed{q = k \frac{\Delta T}{e}}$$

Cette solution est l'équation la plus simple pour la conduction de chaleur.

Exemple 3.3

Trouver la distribution de la température dans un long **tube** cylindrique circulaire (Figure 3.4). Cas stationnaire sans production de chaleur.

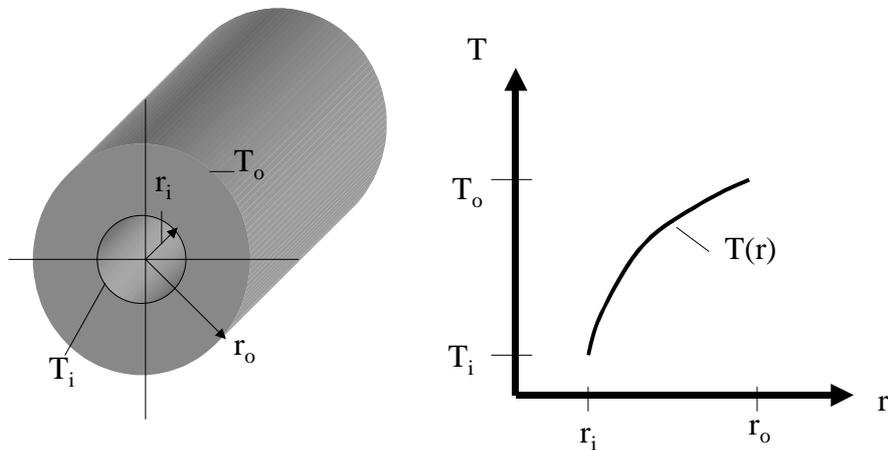


Figure 3.4 Exemple tube cylindrique

1. $T = T(r)$ (car indépendant de φ et de z)

2. On a donc $\Delta T \equiv \nabla^2 T = 0$ (3.16)

et avec des coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{=0; \frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial z} = 0} = 0$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.17)$$

3. Intégrations de l'équation (3.17)

première intégration: $r \frac{\partial T(r)}{\partial r} = C_1$; et deuxième intégration: $T(r) = C_1 \ln r + C_2$

4. Conditions aux limites : $T(r = r_i) = T_i$; $T(r = r_o) = T_o$

5. Que valent les C_i ($i = 1, 2$) ?

$$\begin{aligned}
 T_i &= C_1 \ln r_i + C_2 \\
 T_o &= C_1 \ln r_o + C_2 \\
 \Rightarrow C_1 &= \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)}; C_2 = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \ln r_i
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

6.

$$T(r) = T_i + \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} (\ln r - \ln r_i)
 \tag{3.19}$$

$$\boxed{\frac{T - T_i}{T_i - T_o} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{T - T_i}{T_o - T_i} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}}$$

7. La solution satisfait les conditions aux limites.

8. Que vaut q ?

$$\boxed{q_{radial} = -k \frac{\partial T(r)}{\partial r} = -k \frac{C_1}{r} = -k \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \frac{1}{r}}
 \tag{3.20}$$

3.2 Barre ou tube cylindrique avec production de chaleur

Si dans l'équation (3.19) r tend vers zéro (barre cylindrique) le terme $C_1 \ln(r)$ (voir point 3 exemple 3.3) tend vers l'infini, ce qui est impossible sauf si C_1 est nul. Ainsi, dans une barre circulaire $T = C_2$. La température est donc uniforme et il n'y a aucun flux de chaleur. (Attention : ce cas là représente une situation purement stationnaire (difficilement réalisable))

Pour la conduction de chaleur dans un **tube creux** avec production de chaleur. La loi de la propagation de la chaleur devient (voir aussi équation. (3.17)) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\dot{q}_p}{k}
 \tag{3.21}$$

Si \dot{q} est constant dans tout le volume, la répartition de température est :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_p r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2
 \tag{3.22}$$

avec des conditions aux limites $T(r = r_i) = T_i$; $T(r = r_o) = T_o$ on peut trouver les constantes d'intégration :

$$C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} + \frac{\dot{q}_p}{4k} \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \quad (3.23)$$

$$C_2 = \frac{T_i \ln r_o - T_o \ln r_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} + \frac{\dot{q}_p}{4k} \frac{r_i^2 \ln r_o - r_o^2 \ln r_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

Donc on peut trouver $T(r)$ si on remplace C_1 et C_2 d'équation (3.23) dans l'équation (3.22).

La densité du flux de chaleur est

$$q = -k \frac{\partial T(r)}{\partial r} = -k \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\dot{q}_p r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \right) = \frac{\dot{q}_p r}{2} - \frac{k}{r} C_1 \quad (3.24)$$

avec C_1 comme défini dans l'équation (3.23).

Dans le cas de **la barre cylindrique avec production de chaleur**, les équations appropriées sont :

$$T = -\frac{\dot{q}_p r^2}{4k} + C_3 \Rightarrow T(r) = T_o + \frac{\dot{q}_p}{4k} (r_o^2 - r^2) \quad (3.25)$$

$$q = -k \frac{\partial T(r)}{\partial r} = \frac{\dot{q}_p r}{2}$$

La loi de distribution est parabolique, le maximum étant au centre de la barre. La seule condition aux limites est $T(r = r_o) = T_o$.

3.3 Mur composite

Si le mur est constitué de n couches juxtaposées d'épaisseurs $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ de conductivité $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. On suppose que le contact entre deux couches est parfait, c'est-à-dire que l'on admet qu'il n'y a pas de discontinuité de la température aux interfaces. Il n'y a ni perte ni production de chaleur. On suppose le cas stationnaire (q est constant !) et avec (3.15) on trouve :

$$q = \frac{k_1}{e_1} (T_0 - T_1) = \frac{k_2}{e_2} (T_1 - T_2) = \dots = \frac{k_n}{e_n} (T_{n-1} - T_n) \quad (3.26)$$

Soit S la surface de ce mur composite, le flux P est égal à

$$P = qS = hS(T_0 - T_n) = \frac{(T_0 - T_n)}{\frac{1}{hS}} \text{ [W]} \quad (3.27)$$

Le terme $\frac{1}{hS}$ est la résistance thermique R_k (analogue à la résistance électrique) ; donc (3.27)

$$\text{devient} \quad P = \frac{T_0 - T_n}{R_k} \quad (3.28)$$

Pour la résistance thermique en série (mur composite, transfert fluide- mur, résistance thermique entre les différentes couches d'un mur) on peut écrire (comme pour la résistance électrique en série) :

$$R_k = \frac{1}{S} \sum_i \frac{1}{h_i} \text{ [K/W]} \quad (3.29)$$

Pour la conduction on a $\frac{1}{h_i} = \frac{e_i}{k_i}$; pour la résistance entre deux couches : r_i . En fait, les contacts réels sont imparfaits et ils introduisent une variation brusque de température au niveau des interfaces. (valeur typique pour $1/r = h_{\text{interface}} : 1000 - 2000 \text{ W/m}^2\text{°C}$).

Figure 3.5 montre un cas général. La résistance thermique pour ce cas est :

$$R_k = \frac{1}{S} \left(\sum \frac{e_i}{k_i} + \sum r_j + \sum \frac{1}{h_k} \right) \quad (3.30)$$

Le 1^{er} terme représente la résistance dans la matière i , le deuxième la résistance entre deux composés i et j et le troisième la résistance entre le mur et le fluide environnant.

La densité du flux de chaleur devient :

$$q = \frac{T_0' - T_0''}{\sum_i \frac{e_i}{k_i} + \sum_j r_j + \sum_k \frac{1}{h_k}} = \frac{T_{n-1} - T_n}{\frac{e_n}{k_n}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_2}{k_2}} \quad (3.31)$$

En général, les deux températures du fluide T_0' et T''_0 sont connues mais pas les températures sur la surface du mur (T_0, T_n') Le problème du choix du coefficient de transfert de chaleur h fera objet de la partie convection.

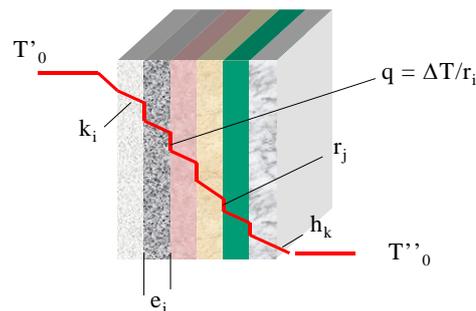


Figure 3.5 Mur composite

3.4 La conductivité thermique $k = f(T)$

Pour le cas simple (flux de chaleur dans la direction x , cas stationnaire) on peut améliorer le résultat du calcul si on remplace k par $k_{\text{moyenne}} (k_m)$. Il convient d'écrire l'équation (3.15) :

$$q = -k(T) \frac{dT}{dx}$$

ou

$$q dx = -k(T) dT \quad (3.32)$$

et, en intégrant par variables séparées :

$$q(e - 0) = - \int_{T_0}^{T_i} k(T) dT \quad (3.33)$$

Avec la définition du k_m :

$$k_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (3.34)$$

on trouve pour équation (3.33) :

$$q = -k_m \Big|_{T_0}^{T_1} \frac{T_1 - T_0}{e} \quad (3.35)$$

La répartition de température s'écrit

$$q = -k_m \Big|_{T_0}^{T_1} \frac{T_1 - T_0}{e} = -k_m \Big|_{T_0}^{T_x} \frac{T_x - T_0}{x} \quad (3.36)$$

$$T(x) = T_0 + \frac{k_m \Big|_{T_0}^{T_1} (T_1 - T_0)}{k_m \Big|_{T_0}^{T_x} e} x$$

La courbe $T(x)$ n'est plus linéaire en x .

3.5 Résistance thermique d'un tube cylindrique circulaire et l'épaisseur critique d'un revêtement isolant

Calculons le flux de chaleur P traversant le cylindre de rayon r (utilisant l'équation.(3.20)) :

$$P = q 2\pi r L = -k \frac{(T_2 - T_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} 2\pi r L$$

d'ou

$$(3.37)$$

$$|P| = \frac{2\pi k L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} |T_2 - T_1|$$

Le flux est donc, en contraire en densité du flux, le même quel que soit r (pas de production de chaleur). Dans ces conditions et en comparaison avec l'équation. (3.28) on obtient :

$$R_k = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi kL} \quad [^{\circ}\text{C}/\text{W}] \quad (3.38)$$

Exemple

Un tube cylindrique (composite ou non) de longueur L et de rayon r_1 et r_2 possède une résistance thermique R_{k0} . Supposons qu'autour de ce tube soit placé un isolant de rayon extérieur r et de conductivité k . h est le coefficient de convection avec l'air ambiant de température T_a . La température intérieure du tube est T_1 , la résistance thermique entre fluide intérieur et la paroi est négligeable. La résistance thermique du système (voir aussi Fig. 3.6) est alors :

$$R_k = R_{k0} + \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{2\pi kL} + \frac{1}{h2\pi rL} \quad (3.39)$$

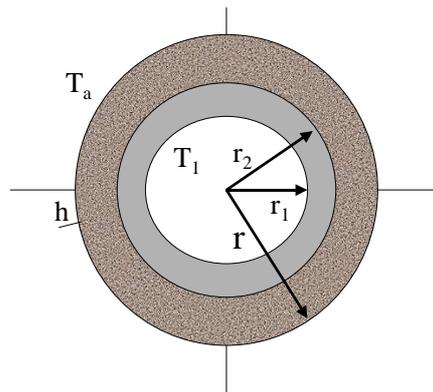


Figure 3.6 : Revêtement cylindrique

Examinons comment varie R_k avec le rayon r de l'isolant :

$$\begin{aligned} \frac{dR_k}{dr} &= \frac{1}{2\pi kL} \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi hL} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\pi kLr^2} \left(r - \frac{k}{h} \right) \\ \text{avec } \frac{k}{h} &= r_c \\ \frac{dR_k}{dr} &= \frac{1}{2\pi kLr^2} (r - r_c) \end{aligned} \quad (3.40)$$

On remarque que le fait de mettre une épaisseur d'isolant a d'abord un effet négatif car l'augmentation de la surface d'échange diminue la résistance totale. Mais cet effet est rapidement atténué par l'épaisseur d'isolant.

Ainsi $\frac{dR_k}{dr} > 0$ si $r > r_c$ et $\frac{dR_k}{dr} < 0$ si $r < r_c$

Appliqué à Fig 3.6 :

a)

Si $r_2 \geq r_c$ comme $r \geq r_2 \geq r_c$

$$\frac{dR_k}{dr} > 0 \Rightarrow R_k \text{ croit toujours avec } r$$

b)

Si $r_2 \leq r_c$ alors:

lorsque $r_2 < r < r_c$ $\frac{dR_k}{dr} < 0$; R_k décroît avec r .

lorsque $r_c < r$ $\frac{dR_k}{dr} > 0$; R_k croît avec r

Ainsi R_k passe par une valeur minimale lorsque $r = r_c$.

Fig 3.7 montre dR_k/dr en fonction de r et r_c .

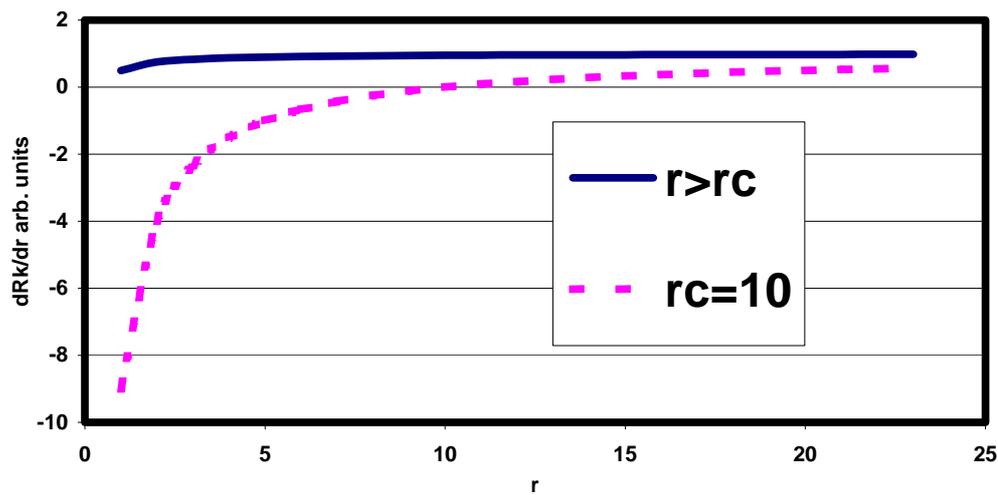


Fig 3.7 graphique

Cas a) en trait plein (avec $r_2 > r_c$), cas b) en traitillé avec $r_c = 10$.