4. L'EQUATION DE FOURIER, DEUX DIMENSIONS, REGIME STATIONNAIRE

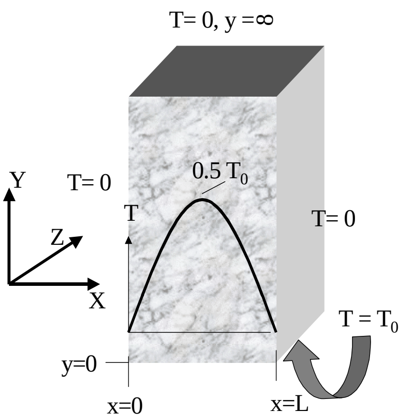

Figure 4.1 Répartition de température dans une paroi semi-infinie

Pour une paroi semi-infinie sans production de chaleur et dans un régime stationnaire, l'équation de Fourier est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1}$$

On peut résoudre l'équation (4.1) par la méthode de séparation des variables. On cherche la solution dans la forme du produit suivant :

$$T(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{4.2}$$

En remplaçant l'équation (4.2) dans (4.1), on obtient :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

et après séparation des variables (4.3)

$$-\left(\frac{1}{X}\right)\left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) = \left(\frac{1}{Y}\right)\left(\frac{d^2 Y}{dy^2}\right)$$

Comme les deux parts de l'équation (4.3) sont indépendantes l'une de l'autre, on peut les égaliser à un constant k'^{2}, la constante de séparation :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 X}{dx^2} + k'^2 X = 0 \\ &\frac{d^2 Y}{dy^2} - k'^2 Y = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Les équations (4.4) sont des équations homogènes et linéaires avec des coefficients constants. La solution analytique des équations (4.4) est

$$X = e^{ax} \quad \text{et} \quad Y = e^{by} \quad \text{avec a} = \pm \text{ik' et b} = \pm \text{k'}$$
$$X = C_1' e^{ik'x} + C_2' e^{-ik'x} \tag{4.5}$$

Puisque $e^{\pm ik'x}$ est identique à $\cos(k'x) \pm i\sin(k'x)$

$$X = C_1 \cos(k'x) + C_2 \sin(k'x) \tag{4.6}$$

$$Y = C_3 e^{k'y} + C_4 e^{-k'y} \tag{4.7}$$

La solution générale de l'équation (4.1) est donc le produit des équations (4.6) et (4.7) :

$$T(x,y) = \left(C_1 \cos(k'x) + C_2 \sin(k'x)\right) \cdot \left(C_3 e^{k'y} + C_4 e^{-k'y}\right) \tag{4.8}$$

Exemple 1

Pour un cas simple (paroi semi-infinie sans production de chaleur et avec une température constante T_0 à la surface y = 0 (dans un régime stationnaire) Fig 4.1), les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} T = 0 \text{ si } x = 0 & \text{condition aux limites 1} \\ T = 0 \text{ si } x = L & \text{C.L. 2} \\ T = 0 \text{ si } y = \infty & \text{C.L. 3} \\ T = T_0 \text{ si } y = 0 & \text{C.L. 4} \end{cases}$$

L'équation (4.8) doit satisfaire aux conditions aux limites 1 – 4.

1. L'équation (4.8) doit être égale à zéro pour x = 0, c'est-à-dire $C_1 = 0$.
2. L'équation (4.8) doit être égale à zéro pour x = L, donc

$$\sin(k'L) = 0 \qquad \text{(fonction propre)} \tag{4.9}$$

L'équation (4.9) est satisfaite pour k'L = 0, π, 2π, …,nπ (valeur propre), ou d'une manière plus générale si k' = nπ/L.Donc l'équation (4.6) s'écrit :

$$X(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{4.10}$$

ou de façon plus générale :

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{4.11}$$

3. C.L.3 est satisfaite si C_3 dans l'équation (4.7) ou (4.8) est nulle

Avec k' = nπ/L (voir 4.9.) l'équation (4.7) devient

$$Y = C_4 e^{-\frac{n\pi}{L}y} \tag{4.12}$$

Avec les équations (4.11) et (4.12)l'équation (4.8) devient :

$$T(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.13}$$

A_n est une nouvelle constante qui inclue toutes les constantes C_n.

4. Si on tient compte de C.L.4, l'équation (4.13) s'écrit :

$$T_0=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.14}$$

Finalement, il faut déterminer les valeurs de la constante A_n. Pour ce faire on peut utiliser la procédure de développement du théorème de Fourier :

On multiplie les deux côtés de l'équation (4.14) par $\sin\frac{m\pi x}{L}$ et on intègre entre x = 0 et x = L (pour facilité l'intégration on utilise l'endroit relatif x/L):

$$T_0\int_{x/L=0}^{1}\sin m\pi\left(\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right)=\int_{x/L=0}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin n\pi\left(\frac{x}{L}\right)\sin m\pi\left(\frac{x}{L}\right)d\left(\frac{x}{L}\right) \tag{4.15}$$

L'intégrale de droite est égale a zéro pour toutes les valeurs de n sauf pour n = m ; dans ce cas elle est à $A_n/2$. L'intégrale du côté gauche vaut $2/n\pi$ pour n impair, donc

$$A_n=\frac{4T_0}{n\pi} \qquad \text{n = impair} \tag{4.16}$$

La solution pour l'équation (4.8) pour la plaque semi-infinie est donc

$$T=T_0\sum_{\substack{n=1\\ n\ impair}}^{\infty}\frac{4}{n\pi}e^{-\frac{n\pi}{L}y}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.17}$$

La figure 4.2 montre la convergence de l'équation (4.17) pour x/L = 0.5 et y/L = 0.1 (n = 1,3,5,7,…35). Pour n> 15, l'équation 4.17 devient stable est assez précise.

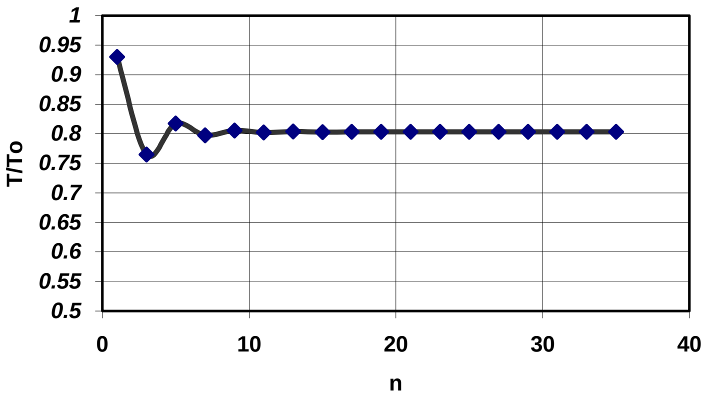

Figure 4.2 Comportement de l'équation 4.17 en fonction de n.

La figure 4.3 montre la température relative (T/T_0) on fonction de x/L pour différentes distances de la surface y = 0 (voir Fig. 4.1). Les distances choisies sont y/L = 0.1 ; 0.5 et 1.

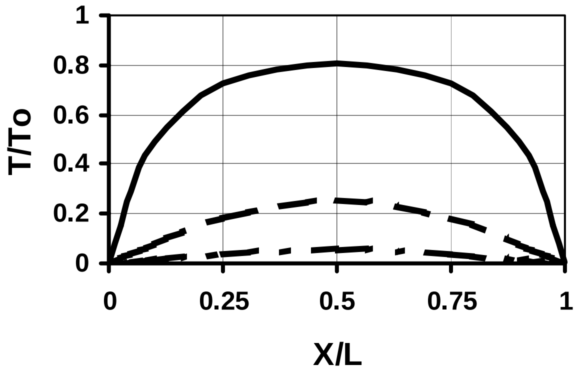

figure 4.3 Température relative en fonction de x/L. ▬▬ y/L = 0.1 ; ▬ ▬ y/L = 0.5 et pour ▬▬ ▪ ▬▬ y/L = 1.

Finalement, Figure 4.4 montre la température relative en fonction de la distance de la surface y = 0 pour x/L = 0.5.

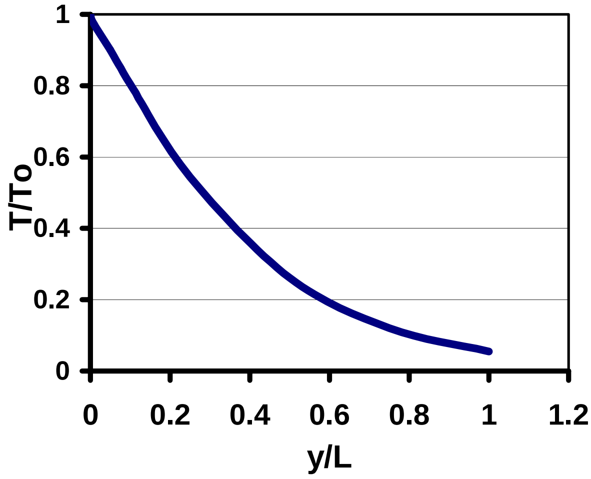

Figure 4.4 : Température relative en fonction de y/L.

Exemple 2
Une plaque semi-infinie avec des conditions aux limites suivantes :

C.L. 1	$T = T_1$	si $x = 0$
C.L. 2	$T = T_1$	si $x = L$
C.L. 3	$T = T_1$	si $y = \infty$
C.L. 4	$T = f(x)$	si $y = 0$

On peut partiellement utiliser la solution de l'exemple 1 si on transforme les conditions aux limites par introduction de la fonction

$$\theta = T - T_1 \tag{4.18}$$

L’équation (4.1) devient donc

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0 \tag{4.19}$$

et les conditions aux limites deviennent :

$\theta(0,y)=\theta(L,y)=\theta(x,\infty)=0$ et $\theta(x,0)=f(x)-T_1=F(x)$.

On peut résoudre l’équation (4.19) par la méthode de séparation des variables. On cherche la solution dans la forme du produit suivant :

$$\theta(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \tag{4.20}$$

Si on suit le même procédé que dans l’exemple 1 on peut trouver

$$\theta(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.21}$$

L’équation (4.21) est analogue à l’équation (4.13). Après l’application de la C.L. 4 on trouve

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.22}$$

La multiplication avec sin (mπx/L) et l’intégration de x/L = 0 à x/L = 1 donnent, comme avant

$$\int_{x/L=0}^{1}F(x)\left[\sin m\pi\left(\frac{x}{L}\right)\right]d\left(\frac{x}{L}\right)=\frac{A_n}{2} \tag{4.23}$$

donc A_n est

$$A_n=\frac{2}{L}\int_{x=0}^{x=L}F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{4.24}$$

La solution finale est (avec $A_0 = 0$) :

$$T=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$ou \tag{4.25}$$
$$A_n=\frac{2}{L}\int_{x=0}^{x=L}(f(x)-T_1)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Pour la solution dans des cas plus difficiles il faut consulter des ouvrages spécialisés.