

## 5. REGIME TRANSITOIRE OU VARIABLE, CAS D'UNE PLAQUE SEMI-INFINIE

Le régime transitoire correspond à un brusque changement de l'équilibre thermique. Une telle perturbation se propage dans le milieu et fait subir une évolution à tous les éléments du système. Au bout d'un certain temps, le phénomène perturbateur disparaît ou bien se stabilise et tout le système évolue vers un nouvel état d'équilibre. Dans le cas du régime variable le système évolue constamment sans jamais atteindre un équilibre thermique. Ces évolutions sont généralement plus lentes et le plus souvent périodiques. Dans le domaine de la science et technologie des matériaux, les régimes transitoires et variables sont très importants ; par exemple, pour tous les traitements thermiques des matériaux et pour la solidification.

Le problème dans le domaine de transfert de la chaleur est très souvent de trouver une solution de type  $T = T(x, y, z, t)$  de l'équation de Fourier (2.21, chapitre 2) :

$$\nabla(k\nabla T) + \dot{q}_p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.1)$$

pour  $0 < t < \tau$  (ou  $\tau \rightarrow \infty$ ); et pour  $(x, y, z)$  décrire une région R (ou R peut  $\rightarrow \infty$ ) .

La condition initiale (C.I) est donnée sous la forme

$$T = T_i(x, y, z) \quad \text{si } t = 0 \quad (5.2)$$

On a seulement besoin d'une seule condition initiale. Pour les cas stationnaires (chapitre 3 et 4) aucune C.I. n'est nécessaire. Pour les cas périodiques où soit  $\dot{q}$ , soit les conditions aux limites (C.L.) changent de manière périodique dans le temps, on peut négliger le comportement transitoire du début.

Il faut deux C.L pour chaque coordonnée. Très souvent, les coordonnées montrent les formes suivantes :

- a) premier type : T est spécifié pour les limites de R (exemples  $x = 0$  ;  $x = -L$  et  $x = L$ ) pour  $t > 0$
- b) deuxième type : La dérivée de T dans la direction perpendiculaire à la paroi pour une limite de R est spécifiée pour  $t > 0$
- c) troisième type : La dérivée de T en direction perpendiculaire d'une paroi est proportionnelle à la température de la paroi. L'exemple typique est le transfert de chaleur à la surface par convection

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{paroi}} = h(T - T_{\infty})_{\text{paroi}} \quad (5.3)$$

Figure 5.1 montre la distribution de la température pour les trois cas différents de C.L..

### 5.1 Echauffement ou refroidissement de Newtonien

Avant d'expliquer les solutions générales, on va discuter un cas important : la plaque mince: dans le cas où la densité du flux de chaleur à l'intérieur de la pièce (conduction) peut être plus grande que la densité du flux de chaleur par convection sortant la pièce, on peut négliger le gradient de température à l'intérieur de la pièce. Dans ce cas on parle d'échauffement ou de refroidissement Newtonien.

Pour le cas Newtonien il faut que  $\frac{hL}{k} \leq 0.1$  (Nombre de Biot  $\leq 0.1$ ).

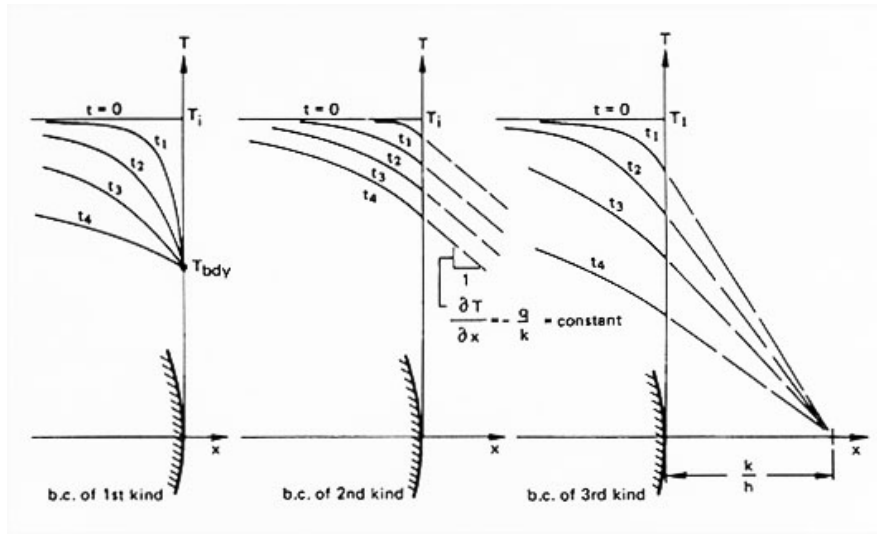


Figure 5.1 : La distribution de la température pour les trois cas différents de C.L..  
(Heat transfer textbook third edition, John H.Lienhard et al. )

Pour le cas Newtonien, le bilan de chaleur sera:

$$P_{\text{arrivant}} = P_{\text{sortant}}$$

$$-V \rho C_p \left. \frac{dT}{dt} \right|_{\text{surface, côté solide}} = hA(T - T_{\text{fluid}}) \quad (5.4)$$

avec V le volume de la pièce et A sa surface exposée à l'air (ou à un autre fluide).

A partir de l'équation (5.4) on trouve la température de la pièce en fonction du temps :

$$\frac{dT}{(T - T_{\text{fluid}})} = -h \frac{A}{V \rho C_p} dt$$

$$\int_{T_{\text{initial}}}^T \frac{dT}{(T - T_{\text{fluid}})} = - \int_{t=0}^t \frac{hA}{\rho C_p V} dt$$

donc

$$\left[ \frac{(T - T_f)}{(T_i - T_f)} = \exp \left( - \frac{h}{\rho C_p} \frac{A}{V} t \right) \right] \quad (5.5)$$

## 5.2 Solution générale pour le cas simplifié

Supposant que le problème de transfert de chaleur permet de négliger le flux de chaleur dans les directions y et z et de plus que k est constant, l'équation (5.1) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.6)$$

Cherchons un produit solution du type  $T(x,t) = X(x) G(t)$ . L'équation (5.6) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= \frac{1}{\alpha G} \frac{dG}{dt} = -\lambda^2 \\ \text{ainsi} \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X &= 0 \\ \text{et} \\ \frac{dG}{dt} + \alpha \lambda^2 G &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec  $\lambda$  comme constante de séparation des variables. La solution pour X est

$$X = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \quad (5.8)$$

et pour G :

$$G = \exp(-\lambda^2 \alpha t) \quad (5.9)$$

donc la solution générale est :

$$T(x,t) = [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)] \cdot \exp(-\lambda^2 \alpha t) \quad (5.10)$$

## 5.3 Application

Pour l'application de l'équation (5.10) on va traiter le cas suivant :

Une plaque à une température initiale  $T_i$  homogène a subi un refroidissement rapide par les deux côtés  $x = -L$  et  $x = L$ . Le milieu de la plaque est l'origine des coordonnées ( $x = 0$ ) ! La température à la surface ( $T_f$ ) est constante :

$T(x,0) = T_i$  (La distribution de la température est homogène) C.I.

$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$  (le problème est symétrique) C.L. 1

$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} + \frac{h}{k} [T(L,t) - T_f] = 0$  (les flux arrivant et sortant de la surface sont égaux) C.L.2

Comme déjà montré, il faut que la température à la surface soit à zéro, donc il faut remplacer T par  $T - T_f = \theta$ .

Donc les C.I et C.L deviennent

$$\theta(x, 0) = T_i - T_f = \theta_i \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} + \frac{h}{k} \theta(L, t) = 0 \quad (5.13)$$

La C.L. 1 (équation (5.12) demande que  $C_2$  de l'équation (5.10) soit égal à zéro (dsin x/dx=cos x) et on peut montrer que l'équation (5.13) exige

$$\cot(\lambda_n L) = \frac{1}{\left(\frac{hL}{k}\right)} (\lambda_n L) = \frac{\lambda_n L}{Bi} \quad (5.14)$$

avec  **$hL/k = Bi$ , nombre de Biot**

L'équation (5.14) est analogue à 4.9 et  $\lambda_n$  à un nombre infini de valeurs propre. En tenant compte du fait que  $C_2 = 0$  et en admettant que tous les  $\lambda_n$  qui satisfont l'équation (5.14) sont possibles l'équation (5.10) devient :

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n x) \cdot \exp(-\lambda_n^2 \alpha t) \quad (5.15)$$

Dû à l'équation (5.11)

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n x) \quad (5.16)$$

Ensuite on trouve la solution finale en utilisant le même processus que l'on a décrit au chapitre 4, mais avec une multiplication par  $\cos(\lambda_n x) dx$  et l'intégration donne :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L)} \cos(\lambda_n x) \cdot \exp(-\lambda_n^2 \alpha t) \quad (5.17)$$

Pour faciliter le calcul, les modifications suivantes seront introduites :

$\xi = x / L$	position relative
$Fo = \alpha t / L^2$	nombre de Fourier
$\Theta = (T - T_f) / (T_i - T_f)$	température relative
$Bi = hL / k$	nombre de Biot
$\hat{\lambda}_n = \lambda_n L$	

et l'équation (5.17) devient :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L)} \cos\left(\lambda_n \frac{L}{L} x\right) \cdot \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{L^2}{L^2} \alpha t\right) \quad (5.18)$$

et finalement

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n + \sin \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n} \cos(\hat{\lambda}_n \xi) \cdot \exp(-\hat{\lambda}_n^2 Fo) \quad (5.19)$$

Les valeurs  $\hat{\lambda}_n$  sont les solutions de l'équation (5.14) et dépendent de Biot. Les solutions pour  $n = 1, 2, 3, 4$  et différentes valeurs de Biot sont données au tableau 5.1.

Tableau 5.1 : Solutions de l'équation (5.14)

Bi	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$
<b>100</b>	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871
<b>10</b>	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003
<b>1</b>	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293
<b>0.1</b>	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354

La convergence de l'équation (5.19) est souvent très bonne, on peut trouver des résultats assez précis avec  $n = 2$  ou  $3$ . Pour trouver les valeurs pour différents Bi on peut faire une interpolation graphique des valeurs données au tableau 5.1. Attention : ces valeurs sont en radian (dans les cosinus et sinus) et cette équation n'est valable que pour les plaques.

Pour les cylindres et sphères qui se refroidissent (ou au contraire se réchauffe) à la surface R, on peut calculer la température  $T(r,t)$  en utilisant l'équation suivante :

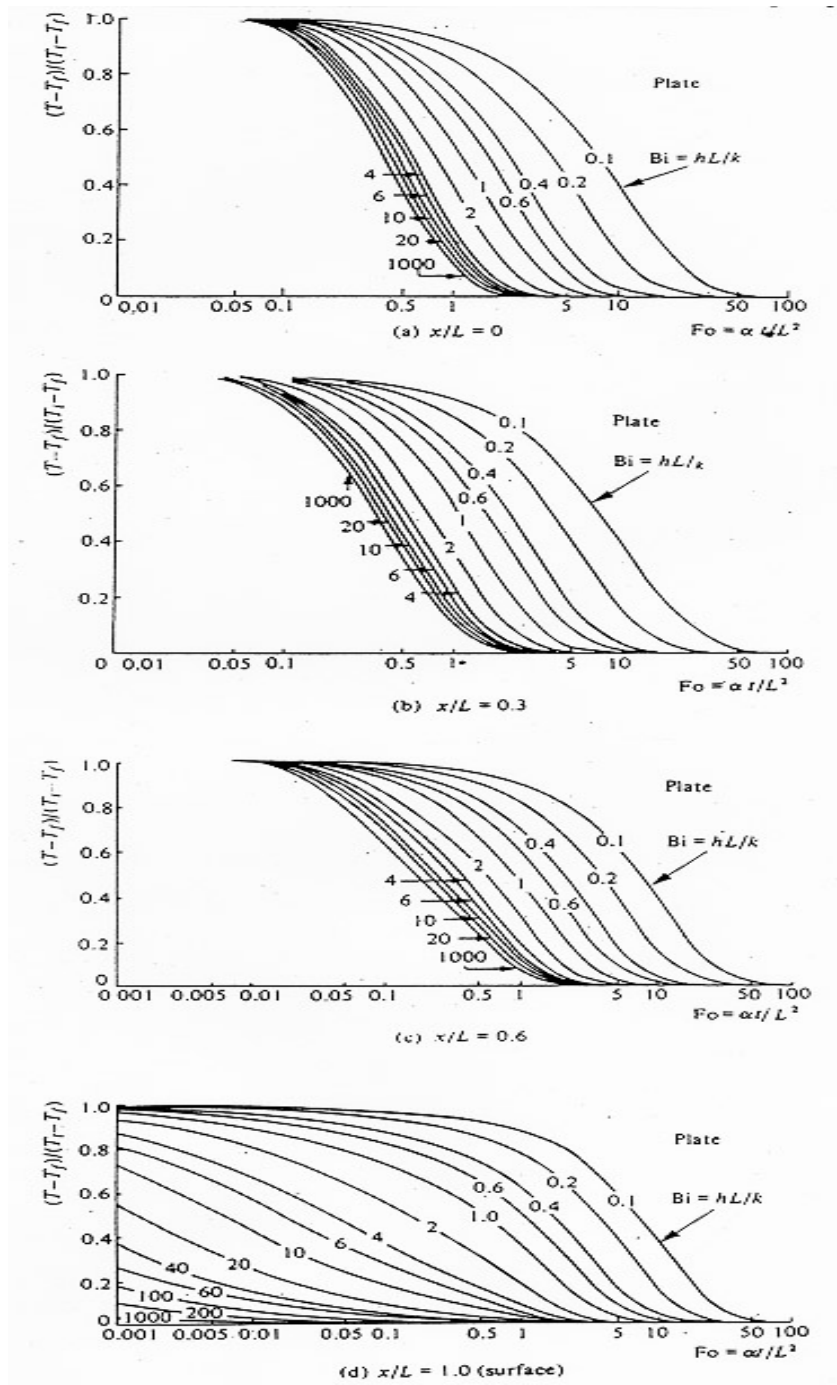
$$\Theta = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\hat{\lambda}_n^2 Fo) f_n \quad (5.20)$$

Les valeurs pour  $A_n$ ,  $\hat{\lambda}_n$  et  $f_n$  sont données au tableau 5.2

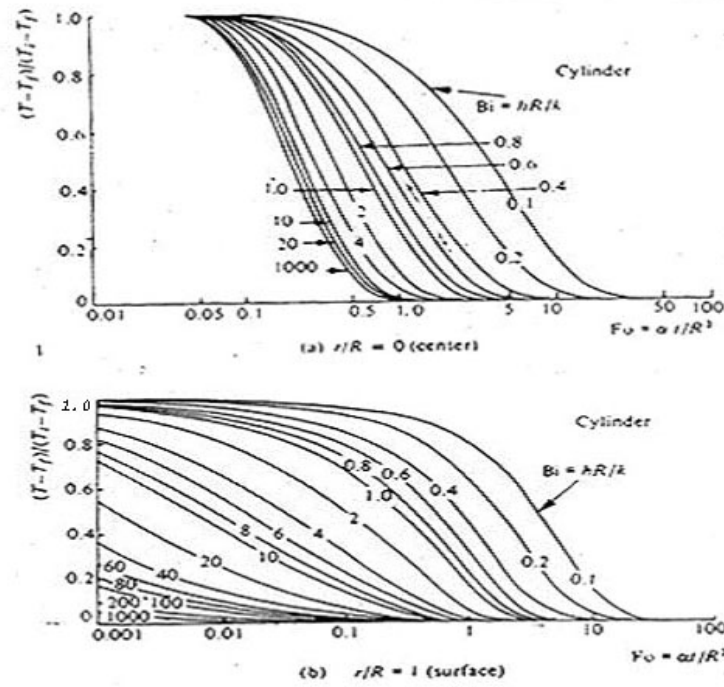
Tableau 5.2 : Valeurs pour la solution de l'équation (5.20) ( $J_0$  et  $J_1$  sont des fonctions de Bessel, premier type)

Forme	$A_n$	$\hat{\lambda}_n$	$f_n$
cylindre	$\frac{2J_1(A_n)}{\hat{\lambda}_n(J_0^2(\hat{\lambda}_n) + J_1^2(\hat{\lambda}_n))}$	$\hat{\lambda}_n J_1(\hat{\lambda}_n) = Bi_{r_0} J_0(\hat{\lambda}_n)$	$J_0\left(\hat{\lambda}_n \frac{r}{r_0}\right)$
sphère	$2 \frac{\sin \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n}{\hat{\lambda}_n^3 - \sin \hat{\lambda}_n \cos \hat{\lambda}_n}$	$\hat{\lambda}_n \cot \hat{\lambda}_n = 1 - Bi_{r_0}$	$\left(\frac{r_0}{\hat{\lambda}_n r}\right) \sin\left(\frac{\hat{\lambda}_n r}{r_0}\right)$

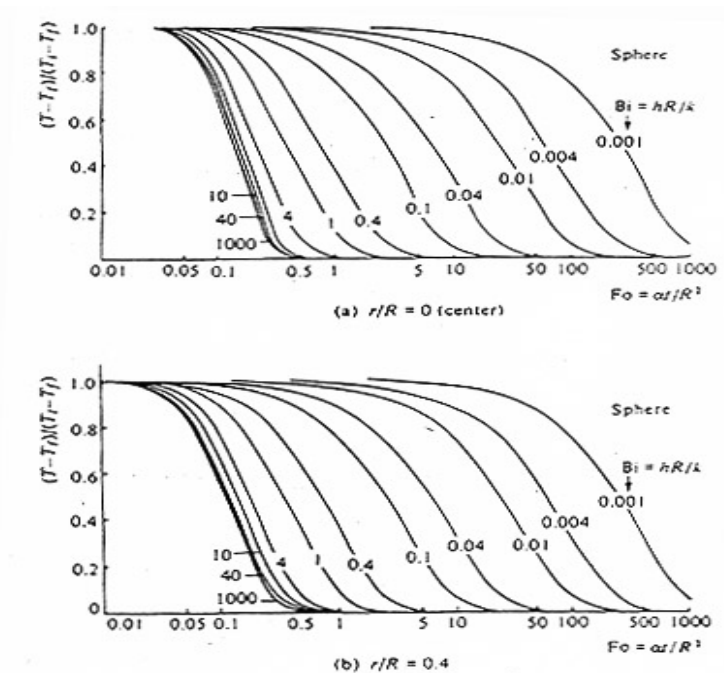
**Pour les applications pratiques, des solutions graphiques des équations (5.19) et (5.20) ont été développées (voir Figures 5.2, 5.3 et 5.4) avec L la demi-épaisseur de la plaque et l'origine de x dans le centre de la plaque. Pour des cylindres et sphères :  $R = L$  ;  $r = x$ .**

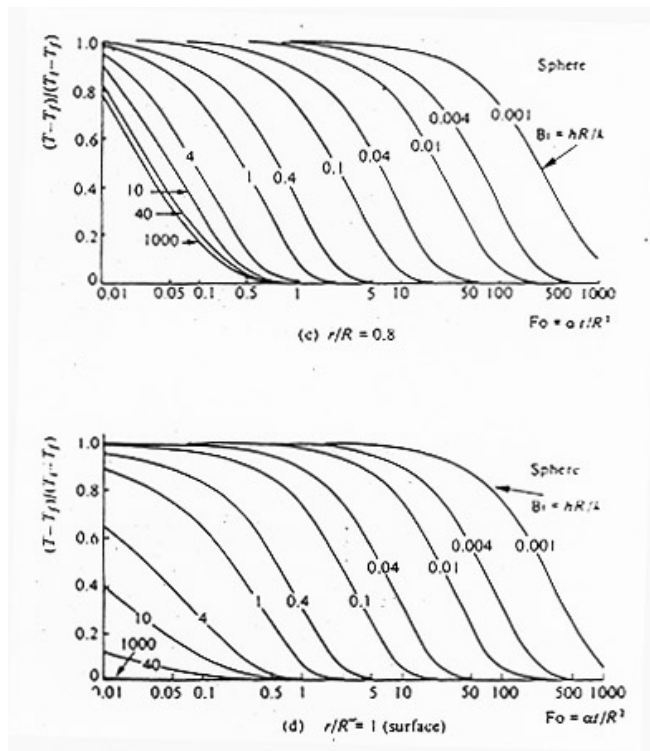


**Figure 5.2 :** Variation de la température relative d'une plaque infinie initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumise à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973)



**Figure 5.3 :** Variation de la température relative d'un cylindre infini initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumis à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973)

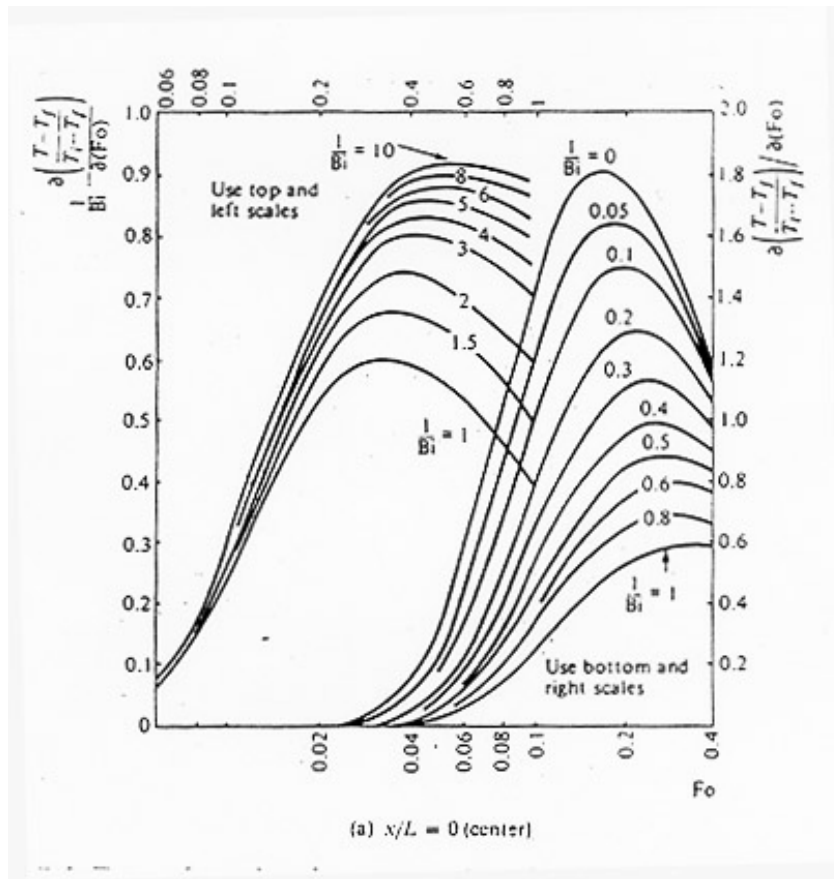




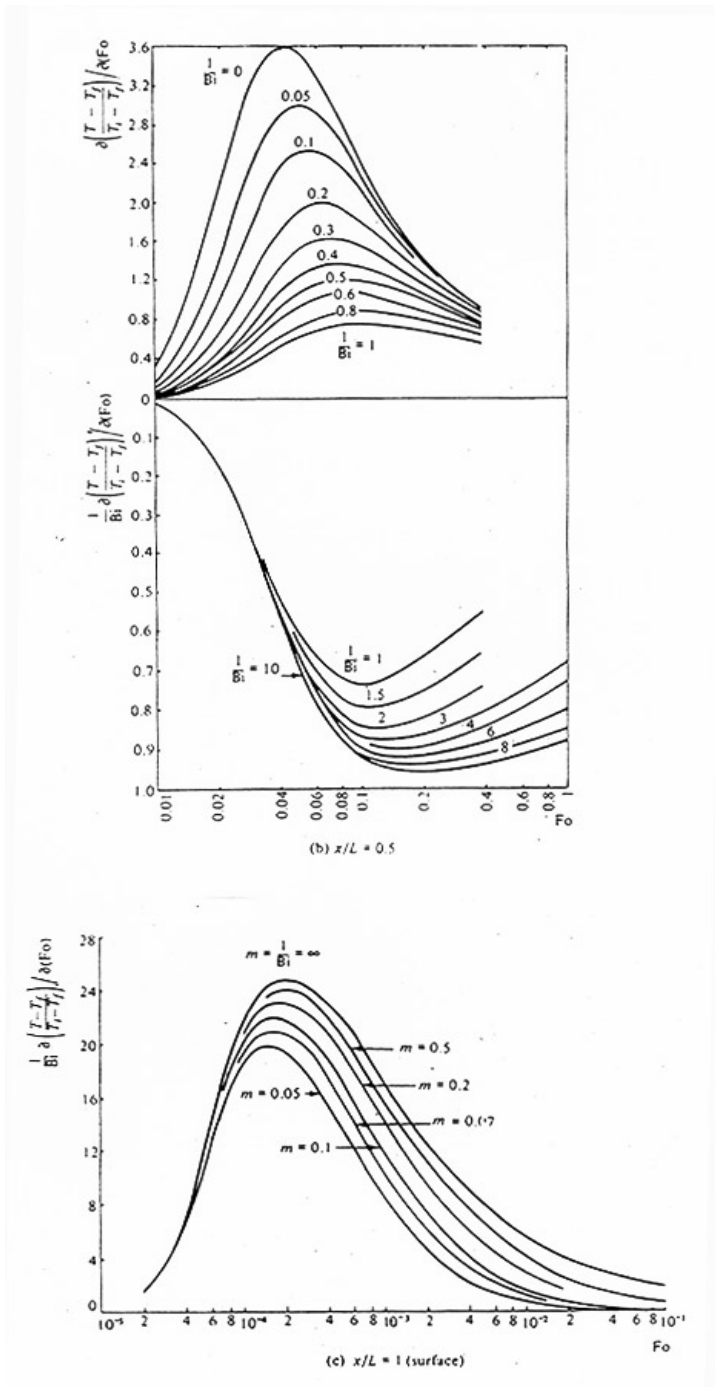
**Figure 5.4 :** Variation de la température relative d'une sphère initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumise à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973).

La vitesse d'échauffement et de refroidissement est plus importante que la température elle-même. Si on préfère une solution analytique, on doit développer l'expression  $dT/dt$  des équations données ci-dessus. Pour des solutions graphiques on peut utiliser les figures 5.5 et 5.6.

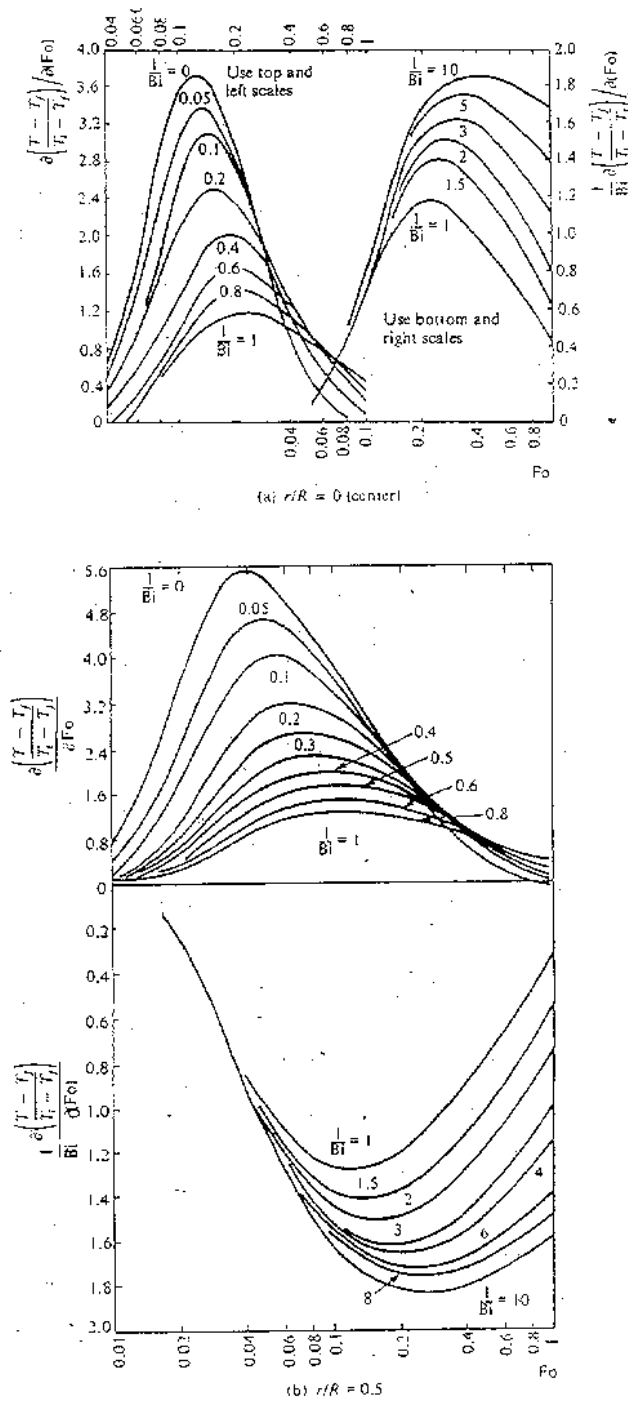




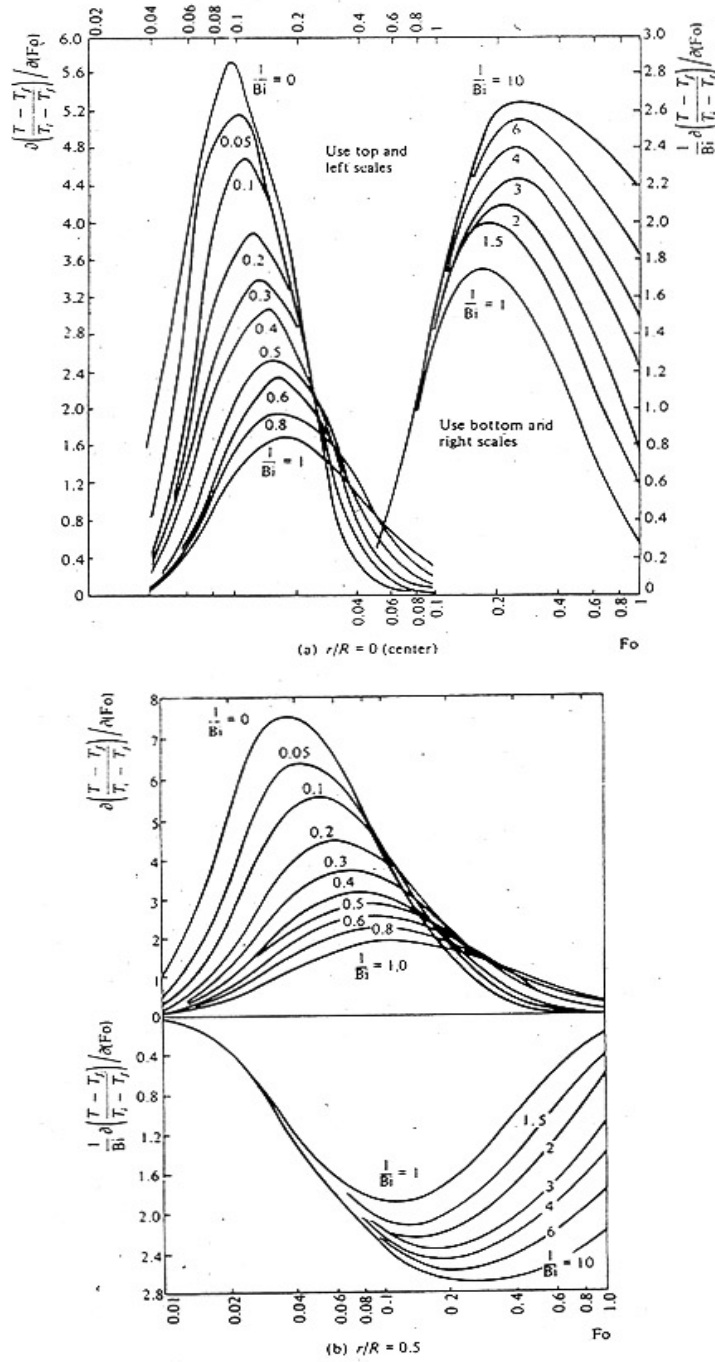
**Figure 5.5:** Taux de refroidissement d'une plaque infinie initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumise à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973).



**Figure 5.5 (suite):** Taux de refroidissement d'une plaque infinie initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumise à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973).



**Figure 5.6 :** Taux de refroidissement d'un cylindre infini initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumis à un environnement à température  $T_f$ . (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973).



**Figure 5.7:** Taux de refroidissement d'une sphère initialement à une température uniforme  $T_i$  puis soumise à un environnement à température  $T_f$  (Transport Phenomena in metallurgy, Geiger et al., Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, USA 1973).

### 5.4 Plaque infinie

La figure 5.8 montre une plaque infinie dont une tranche très mince ( $\Delta x'$ ) à une distance  $x'$  du centre de la plaque se trouve à la température  $T_i$  au temps  $t = 0$ . Ce maximum de température disparaît au cours du temps.

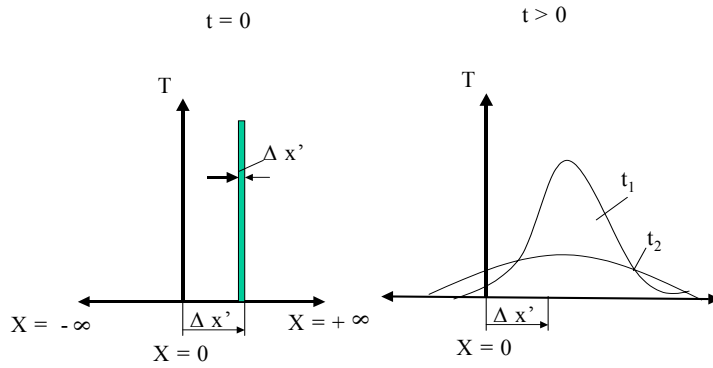


Figure 5.8 : Répartition de la température dans un solide infini.

On peut calculer la répartition de la température à l'aide de la solution de l'équation (5.6), c'est-à-dire :

$$T(x, t) = \frac{T_i}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] \Delta x' \quad (5.21)$$

Si au même instant  $t = 0$ , il existe une autre tranche avec la même épaisseur mais à des températures différentes, l'équation (5.21) devient :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^2 \frac{T_{in}}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x'_n)^2}{4\alpha t}\right] \Delta x' \quad (5.22)$$

La température  $T(x, t)$  est l'addition du résultat de chaque tranche.. Supposons que l'épaisseur des tranches  $\Delta x'$  tend vers zéro, on peut exprimer la température initiale par une fonction  $f(x')$  et la somme de l'équation (5.22) devient une intégrale :

$$T(x, t) = \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{f(x')}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx' \quad (5.23)$$

**Exemple :**

Plaque infinie avec des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} f(x') &= 0 & \text{si } x' < a \text{ et } x' > b \\ f(x') &= T_i & \text{si } a < x' < b \end{aligned}$$

Alors, L'équation (5.23) devient

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^a 0 \, dx' + \int_a^b \frac{T_i}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx' + \int_b^{\infty} 0 \, dx' \quad (5.24)$$

Soit  $\beta = \frac{(x'-x)}{2\sqrt{\alpha t}}$ , l'équation (5.24) s'écrira :

$$T(x, t) = \frac{T_i}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=\frac{(a-x)}{2\sqrt{\alpha t}}}^{\frac{(b-x)}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{T_i}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{(b-x)}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2} d\beta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{(a-x)}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2} d\beta \right) \quad (5.25)$$

avec la définition de la fonction d'erreur :

$$\operatorname{erf}(N) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^N e^{-u^2} du \quad (5.26)$$

( $\operatorname{erf} 0 = 0$  ;  $\operatorname{erf} \infty = 1$  ;  $\operatorname{erfc} x$  (fonction d'erreur complémentaire) =  $1 - \operatorname{erf} x$ )

l'équation (5.25) devient

$$T(x, t) = \frac{T_i}{2} \left[ \operatorname{erf} \frac{(b-x)}{2\sqrt{\alpha t}} - \operatorname{erf} \frac{(a-x)}{2\sqrt{\alpha t}} \right] \quad (5.27)$$

**Quelques valeurs de  $\operatorname{erf}(N)$  :**

N	erf(N)	N	erf(N)	N	erf(N)	N	erf(N)
0	0	0,3	0,328627	0,8	0,742101	1,8	0,989091
0,05	0,056372	0,4	0,428392	1	0,842701	2	0,995322
0,1	0,112463	0,5	0,520500	1,2	0,910314	2,5	0,999593
0,15	0,167996	0,6	0,603856	1,4	0,952285	3	0,999978
0,2	0,222703	0,7	0,677801	1,6	0,976348	$\infty$	1

### 5.5 La plaque semi-infinie

Une plaque semi-infinie existe pour  $0 \leq x \leq \infty$ .

On peut supposer les conditions aux limites suivantes :  $T(x,0) = f(x)$  ;  $T(0,t) = 0$

Il est possible de développer une solution pour la plaque semi-infinie, si on considère une plaque infinie avec les conditions aux limites décrits à la figure 5.9 :

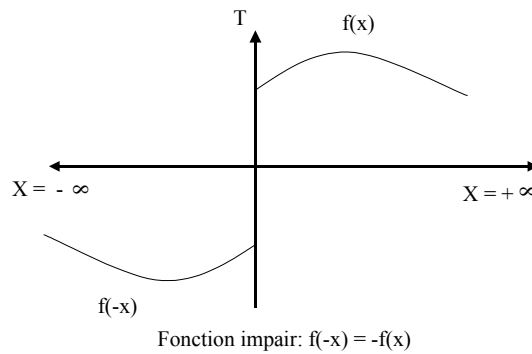


Figure 5.9 : Fonction impaire qui satisfait les condition aux limites  $T(0,t) = 0$

L'équation (5.23) devient donc :

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^0 \frac{-f(-x')}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx' + \int_0^{+\infty} \frac{f(x')}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}\right] dx' \quad (5.28)$$

#### Exemple

- La fonction  $f(x) = T_i$  (Température constante et homogène) ; donc  $T(x,0) = T_i$
- $T(0,t) = T_s$  (à la surface, la température est constante est  $\neq 0$ ).

Avec la définition  $\theta = T - T_s$  les conditions aux limites deviennent :

$$\theta(x,0) = T_i - T_s; \quad \theta(0,t) = 0$$

Comme auparavant, on effectue le changement de variables suivant :

$$\beta = \frac{x' - x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\beta = \frac{x' + x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

Après réarrangement, l'équation (5.28) devient

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\beta = -\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \int_{\frac{\beta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}{\infty}} e^{-\beta^2} d\beta \right) \quad (5.29)$$

L'équation (5.29) devient

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}} e^{-\beta^2} d\beta \quad (5.30)$$

Finalement, la solution peut s'écrire :

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (5.31)$$

L'équation (5.31) décrit la température comme une fonction du lieu et du temps dans une plaque semi-infinie qui présente une distribution homogène de température au temps  $t = 0$  avec un changement brusque. La température initiale ( $t = 0$ ) de la surface,  $T_s$ , reste la même quelque soit  $t > 0$ .

La densité de flux de chaleur  $q$  s'écrit donc :

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

avec  $u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$

$$q = -k \frac{(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (5.32)$$

$$q = -k \frac{(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

A la surface ( $x = 0$ ) et puisque  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  l'équation (5.32) peut s'écrire :

$$q = -\sqrt{k \rho C_p} \frac{(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi t}} \quad (5.33)$$

La quantité  $\sqrt{k \rho C_p}$  est appelée l'effusivité thermique E ou coefficient d'arrachement thermique de la plaque.