

6. SOLIDIFICATION

6.1 Solidification dans un moule en sable.

Considérons un métal pur liquide à sa température de fusion, mis en contact avec une paroi lisse d'un moule de faible conduction thermique. La figure 6.1 montre la distribution de température dans le métal et dans le moule à un certain temps durant la solidification.

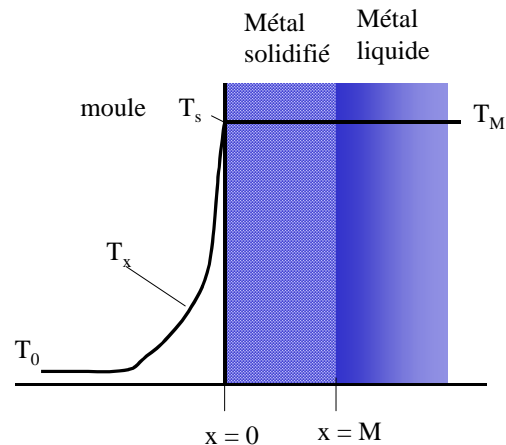


Figure 6.1 Distribution de température durant la solidification d'un métal dans un moule en sable

Puisque la quasi-totalité de la résistance au flux de chaleur est due au moule, la température de surface est presque égale à la température de fusion du métal T_M . Ce qui signifie que durant la solidification l'abaissement de température dans le métal solidifié est petit, et qu'à l'interface moule-métal, une température de $T_s \cong T_M$ est maintenue constante. Sous ces conditions, la distribution de température dans le moule est donnée par l'équation 5.31 (la solution pour un solide semi-infini):

$$\frac{T - T_M}{T_0 - T_M} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (6.1)$$

avec

$$\begin{cases} x : \text{distance à l'intérieur du moule} \\ \alpha : \text{diffusivité thermique du moule} \\ T_0 : \text{sa température initiale uniforme du moule (habituellement, il s'agit de la température ambiante).} \end{cases}$$

L'utilisation de cette équation suppose que le moule est suffisamment épais pour satisfaire la condition aux limites $T(\infty, t) = T_0$. En pratique, cette condition est souvent satisfaite car la zone thermiquement affectée du moule se limite à une couche de seulement environs un quart de son épaisseur.

Notre principal intérêt n'est pas la distribution de température du moule, mais plutôt la vitesse à laquelle la chaleur est extraite du métal en solidification, ce qui conduira inévitablement à la détermination du temps total de solidification. L'équation 5.33 nous permet d'obtenir la quantité de chaleur qui passe à travers le moule ($q_{(x=0)}$) et cette dernière doit être égale à la chaleur latente évacuée lors de la solidification :

$$q|_{x=0} = -\frac{\sqrt{k\rho C_p}}{\sqrt{\pi t}}(T_0 - T_M) = \frac{\sqrt{k\rho C_p}}{\sqrt{\pi t}}(T_M - T_0) \quad (6.2)$$

Le produit $\sqrt{k\rho C_p}$ représente la capacité du moule à absorber de la chaleur à une certaine vitesse, et est appelé *l'effusivité thermique*.

La vitesse à laquelle la chaleur latente dégagée par unité de surface peut s'écrire

$$q_{solidification} = \rho' H_f \frac{dM}{dt} \quad (6.3)$$

où

$$\begin{cases} \rho' : \text{densité du métal en solidification [Kg/m}^3\text{]} \\ H_f : \text{chaleur latente de fusion du métal [J/Kg]} \\ M : \text{épaisseur du métal solidifié [m]} \end{cases}$$

En égalant les équations (6.2) et (6.3) on obtient la vitesse de croissance de la phase solide:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{(T_M - T_0)\sqrt{k\rho C_p}}{\rho' H_f \sqrt{\pi t}} \quad (6.4)$$

En intégrant l'équation (6.4) avec des conditions limites :

$$\begin{cases} M(t=0) = 0 \\ M(t=t) = M \end{cases}$$

nous obtenons:

$$M = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T_M - T_0}{\rho' H_f} \right) \sqrt{k\rho C_p} \sqrt{t} \quad (6.5)$$

Nous observons que la vitesse de solidification dépend de certaines caractéristiques du métal, $T_M - T_0 / \rho' H_f$, et de l'effusivité thermique du moule $k\rho C_p$.

6.2 Effet de la forme sur le temps de solidification.

La solidification dans un moule plane n'est pas le cas que l'ingénieur rencontre habituellement en pratique. Il lui est plus fréquent de déterminer le temps de solidification de pièces complexes, pour lesquelles, la forme du moule a quelques influences sur le temps de solidification. Par exemple, la différence de flux de chaleur à l'intérieur d'une pièce avec des parois convexes, concaves, ou planes est montrée à la figure 6.2. Le flux de chaleur dans une surface (de la pièce) convexe est divergent et par conséquent, il est à peine plus rapide que dans un moule à surface plane. Par contre, le flux de chaleur à l'intérieur d'une paroi (de la pièce) concave est convergent et donc moins rapide que dans un moule à surface plane.

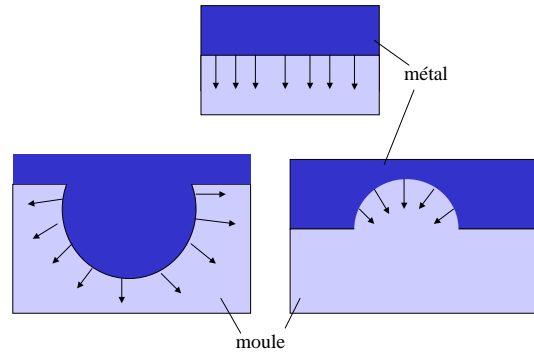


Figure 6.2 : Effet de contour sur le flux de chaleur dans différentes formes de moules.

En première approximation, de tels effets sont souvent négligés parce que la zone chauffée du moule est mince et que la différence de flux entre une paroi plane et une incurvée est petite. De cette manière, nous constatons qu'un moule donné a la capacité d'absorber une certaine quantité de chaleur en un temps donné, sans tenir compte de son contour. Nous pouvons par conséquent généraliser l'équation (6.2), pour tout contour et pour une surface A donnée, le moule absorbe une quantité de chaleur Q en un temps t .

$$Q = \int_0^t A q|_{x=0} dt = \frac{A \sqrt{k \rho C_p} (T_M - T_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2A \sqrt{k \rho C_p} (T_M - T_0)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} \quad (6.6)$$

Pour qu'un moulage de volume V soit complètement solidifié, il faut que toute sa chaleur latente Q ait été évacuée.

$$Q = \rho' V H_f \quad [\text{J}] \quad (6.7)$$

En combinant les équations (6.6) et (6.7) nous arrivons au temps de solidification qui est une fonction du rapport volume-surface de la pièce:

$$t = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho' H_f}{T_M - T_0} \right)^2 \left(\frac{1}{k \rho C_p} \right) \left(\frac{V}{A} \right)^2 \quad (6.8)$$

$= C \equiv \text{constante de Chvorinov}$

L'équation (6.8) connue comme la règle de Chvorinov et C : la constante de Chvorinov

7.2.3 Effet de surchauffe sur le temps de solidification.

Nous pouvons estimer l'effet de surchauffe sur le temps de solidification en tenant compte du fait que le sable ne doit non plus absorber que la chaleur latente de fusion mais aussi celle de la surchauffe. Une fois de plus nous supposons que le gradient de température à l'intérieur de la pièce est négligeable, et que lorsque le temps de solidification est écoulé, toute la pièce est proche de sa température de solidification. Dans ce cas, la quantité totale de chaleur à évacuer est:

$$Q = \rho' V H_f + \rho_l' V C_{p,l} \Delta T_s \quad (6.9)$$

L'indice l signifie que ces propriétés correspondent à la phase liquide, ΔT_s est le nombre de degrés de surchauffe.

Considérons maintenant une plaque infinie, dans le but de faire un calcul simple mais suffisamment précis, nous supposons que l'équation (6.6) est valable bien que la température à l'interface moule-métal n'est pas constante lorsque la phase liquide perd sa surchauffe. En faisant une telle approximation, nous pouvons négliger la différence de densité entre les phases liquide et solide. Par conséquent, $\rho' \cong \rho'_l$, et en égalant les équations (6.9) et (6.6), nous obtenons:

$$t = \frac{\pi}{4} \frac{1}{k \rho C_p} \left(\frac{\rho' H'_f}{T_M - T_0} \right)^2 \left(\frac{V}{A} \right)^2 \quad (6.10)$$

Dans cette expression, H'_f est la chaleur effective de fusion, elle représente la somme de la chaleur latente de fusion et la surchauffe du liquide:

$$H'_f = H_f + C_{p,l} \Delta T_s \quad (6.11)$$

Remarquons que le temps de solidification est encore proportionnel à $(V/A)^2$.

6. 4 Moulage avec une température de surface constante.

Prenons une masse d'un métal liquide pur, à sa température de fusion, dont la surface est soudainement refroidie à la température T_s . Après la solidification d'une partie de la pièce, le profil de température dans le métal solide sera identique à celui dans le cas d'un solide semi-infini (figure 6.3), à un détail près: la plage de température dans le métal en solidification s'étend de T_s à T_M plutôt que d'aller jusqu'à T_∞ . Malgré cela, la distribution de température dans le métal solidifié semble atteindre T_∞ , ce qui nous permet d'écrire:

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha' t}} \quad (6.12)$$

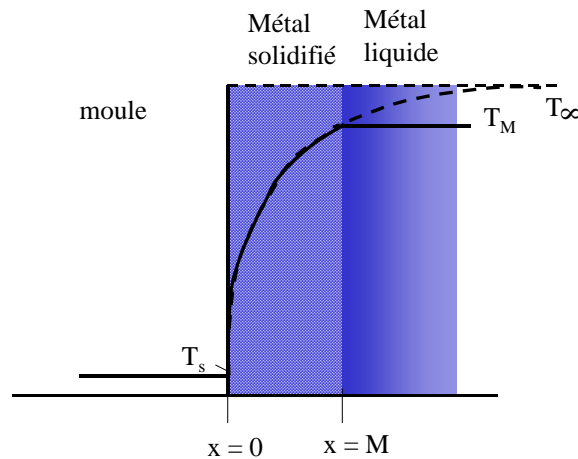


Figure 6.3: Ressemblance entre la distribution de température dans un métal en solidification.

A la figure 6.3, T_∞ n'est a priori pas connue, c'est une température imaginaire qui rend la distribution de température analogue à celle du cas d'un solide semi-infini. Développons maintenant l'expression de la vitesse de solidification en utilisant la condition limite:

$$T(M, t) = T_M \quad (6.13)$$

C'est-à-dire que l'interface solide-liquide est à température de fusion. En plus, nous savons que la vitesse de solidification multipliée par la chaleur latente par unité de volume (densité de flux de chaleur (q) qui sort du liquide, donc avec un signe négatif) équivaut à la densité de flux de chaleur dans le solide (à l'interface):

$$-k' \frac{\partial T}{\partial x}(M, t) = -H_f \rho' \frac{dM}{dt} \quad (6.14)$$

En appliquant l'équation (6.13) à la distribution de température, l'équation (6.12) devient:

$$\frac{T_M - T_s}{T_\infty - T_s} = \operatorname{erf} \frac{M}{2\sqrt{\alpha' t}} \quad (6.15)$$

Comme le membre de gauche est une constante, l'argument de la fonction d'erreur doit aussi être une constante. Et donc:

$$M = 2\beta\sqrt{\alpha' t} \quad (6.16)$$

Une fois de plus, l'épaisseur solidifiée est proportionnel à \sqrt{t} .

Pour évaluer la constante β , nous cherchons le flux de chaleur à l'interface solide-liquide, que nous obtenons de l'équation 5.32 pour $x = M$,

$$-k' \frac{\partial T}{\partial x}(M, t) = -\frac{(T_\infty - T_s) \sqrt{k' \rho' C'_p}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \exp\left[-\frac{M^2}{4\alpha' t}\right] \quad (6.17)$$

Avec les relations (6.16) et (6.15) on peut trouver pour (6.17) :

$$-k' \frac{\partial T}{\partial x}(M, t) = -\frac{(T_M - T_s) \sqrt{k' \rho' C'_p}}{\operatorname{erf} \beta \cdot \sqrt{\pi} \sqrt{t}} \exp(-\beta^2) \quad (6.18)$$

L'évolution de la chaleur latente à l'interface s'écrit, par dérivation de l'équation (6.16)

$$q = -H_f \rho' \frac{dM}{dt} = -H_f \rho' \beta \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{t}} \quad (6.19)$$

En substituant les équation (6.18) et (6.19) dans l'équation (6.14), après simplification, il vient:

$$\beta e^{\beta^2} \operatorname{erf} \beta = (T_M - T_s) \frac{C'_p}{H_f \sqrt{\pi}} \quad (6.20)$$

Nous possédons maintenant l'expression permettant de calculer (difficilement) β .

En résumé, β peut être déterminé par l'équation (6.20). Comme l'épaisseur de solidification M est connue par l'équation (6.16), T_∞ peut être calculé grâce à l'équation (6.15), et donc la distribution de température peut être tracée (équation (6.12)).

Ces résultats ne sont, bien sûr, valables que pour un flux de chaleur unidirectionnel. Ils peuvent être appliqués à une plaque pour déterminer le temps de solidification, en évaluant β et en utilisant l'équation (6.16) avec $M = L$, la demi-épaisseur de la plaque.

6.5 Gradients dans le moule et dans le métal, sans résistance à l'interface.

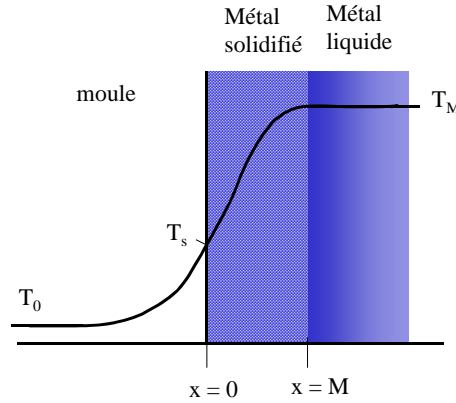


Figure 6.4 : Distribution de température durant la solidification sans résistance à l'interface.

Ce cas est illustré par la figure 6.4. Le moule et le métal forment les deux des barrières au flux de chaleur. Le moule est initialement à température ambiante, le métal liquide est à sa température de fusion. Supposons que le moule soit assez épais pour qu'une augmentation de température n'apparaisse pas à sa surface externe. Nous pouvons le considérer comme semi-infini. Ce cas est utile pour calculer la vitesse de solidification d'un lingot dans un moule en métal (par ex: Cu, Fe). Il s'applique lorsque suffisamment de matériau est déjà solidifié, de cette manière la résistance à l'interface n'est plus significative.

Dans le problème précédant, T_s était fixé comme une condition limite de la situation. Dans ce cas, T_s dépend des propriétés thermiques du moule et du métal.

Développons une solution qui satisfasse la condition:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0-\xi} - \left[-k' \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0+\xi} \right] \right] = 0 \quad (6.21)$$

c'est-à-dire que la densité du flux de chaleur venant du métal en solidification, à l'interface moule-pièce, doit être égal au flux quittant l'interface dans le moule. Comme précédemment, deux conditions limites à l'interface solide-liquide doivent être satisfaites:

$$T(M, t) = T_M \quad (6.22)$$

$$-k' \frac{\partial T}{\partial x}(M, t) = -H_f \rho' \frac{dM}{dt} \quad (6.23)$$

Le moule est évidemment semi-infini dans le domaine des x négatifs, avec une température de surface T_s (interface moule/pièce solidifiée) inconnue. Ainsi, du côté du moule (x négatif):

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \operatorname{erf} \frac{-x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad (6.24)$$

où T_0 est la température initiale du moule. Pour le métal en solidification, l'équation (6.12) s'applique encore. Toutefois, remarquons qu'à ce stade, T_∞ et T_s sont encore inconnues. Si on applique l'équation (6.22) à l'équation (6.12), nous constatons que l'argument de la fonction d'erreur doit être constant, définissons-le à nouveau comme β , de cette manière l'équation (6.16) s'applique. En dérivant les équation (6.24) et (6.12), et en utilisant les équations (6.21), (6.22), et (6.23), nous obtenons:

$$\frac{(T_M - T_0)}{H_f \sqrt{\pi}} = \beta e^{\beta^2} \left(\sqrt{\frac{k' \rho' C'_p}{k \rho C_p}} + \operatorname{erf} \beta \right) \quad (6.25)$$

$$\frac{(T_M - T_s) C'_p}{H_f \sqrt{\pi}} = \beta e^{\beta^2} \operatorname{erf} \beta \quad (6.26)$$

$$\frac{(T_\infty - T_s) C'_p}{H_f \sqrt{\pi}} = \beta e^{\beta^2} \quad (6.27)$$

$$\frac{T_s - T_0}{T_\infty - T_s} = \sqrt{\frac{k' \rho' C'_p}{k \rho C_p}} \quad (6.28)$$

Pour résumer les résultats de ce paragraphe, nous avons calculé les profils de température dans le moule et dans le métal en solidification, nous avons aussi déterminé la vitesse de solidification. Pour calculer le profil de température du moule, il nous a suffi de suivre la démarche suivante:

- 1) calculer β par l'équation (6.25)
- 2) calculer T_s par l'équation (6.26)
- 3) calculer T_∞ par l'équation (6.27) ou (6.28)
- 4) tracer le profil de température en utilisant l'équation (6.12).

6.6 Résistance à l'interface.

Sur la figure 6.5, la résistance à l'interface est plus grande que celle à l'interface solide-liquide. Une importance pratique est attachée à ce cas lorsque le temps de solidification est court. Cette approche est utile pour estimer le temps de solidification de petites et fines sections dans des moules en métaux tels que ceux utilisés pour des moulages sous pressions ou des moules en coquilles. Dans ce cas, le gradient de température du moule et de la pièce sont négligeables, et la chaleur s'échappe du moulage comme si un coefficient de transfert de chaleur agissait à la surface. Alors, la quantité totale de chaleur Q qui traverse l'interface moule-métal en un temps t est :

$$Q = hA(T_s - T_0)t \quad (6.29)$$

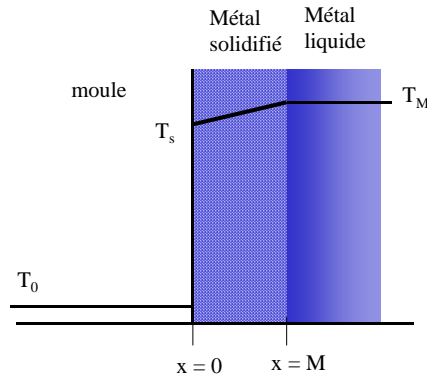


Figure 6.5 : Distribution de température durant la solidification avec une grande résistance à l'interface

Si les gradients de température dans le métal solidifié et dans le moule sont négligeables, alors $T_s \cong T_M$ et c'est seulement la chaleur latente qui doit être évacuée durant la solidification. Il est par conséquent facile de montrer qu'en combinant les équations (6.7) et (6.29), nous obtenons:

$$M = \frac{V}{A} = \frac{h(T_M - T_0)}{\rho' H_f} t \quad (6.30)$$

Remarquons que la forme n'a pas d'effet sur l'applicabilité de l'équation (6.30). La forme n'est pas non plus spécifiée dans le cas du refroidissement ou du chauffage d'un solide, avec des gradients de température internes négligeables. Ici, l'épaisseur solidifiée est proportionnelle au temps plutôt qu'à sa racine carrée.

Considérons maintenant le cas où $T_s \neq T_M$, et où la chaleur quitte la pièce via h à la surface, maintenue à la température T_0 , d'un moule refroidi à l'eau. Ici, nous simplifions l'étude en approximant le profil de température à l'intérieur du métal en solidification comme une fonction linéaire. De cette manière, le flux de chaleur à l'interface moule-pièce s'écrit:

$$q|_{x=0} = k' \frac{T_M - T_s}{M} \quad (6.31)$$

Et aussi:

$$q|_{x=0} = h(T_s - T_0) \quad (6.32)$$

Éliminons alors la température de surface T_s , qui varie, en combinant les équation (6.31) et (6.32). Grâce au profil de température linéaire, nous pouvons exprimer le flux à l'interface - liquide simplement par (mur composite):

$$q|_{x=0} = q|_{x=M} = \frac{T_M - T_0}{\frac{1}{h} + \frac{M}{k'}} \quad (6.33)$$

De plus, en $x = M$, la chaleur latente de fusion est dégagée, c'est-à-dire que

$$q|_{x=M} = \rho' H_f \frac{dM}{dt} \quad (6.34)$$

En combinant les équation (6.33) et (6.34), et en intégrant entre $M = 0$ en $t = 0$ et $M = M$ en $t = t$, nous obtenons:

$$M = \frac{h(T_M - T_0)}{\rho' H_f} t - \frac{h}{2k'} M^2 \quad (6.35)$$

Si on suppose que le profile de température n'est pas linéaire, une solution plus exacte, mais similaire à l'équation (6.35) peut être obtenue grâce à un facteur additionnel α :

$$M = \frac{h(T_M - T_0)}{\rho' H_f \alpha} t - \frac{h}{2k'} M^2 \quad (6.36)$$

où

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{C'_p (T_M - T_0)}{3H_f}} \quad (6.37)$$

L'équation (6.36) est presque exacte pour $hM/k \geq 1/2$, pour $hM/k < 1/2$, l'épaisseur solidifiée est surestimée d'environ 10-15%.