8. Convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la **convection est naturelle** ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé **convection forcée**.

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide au moyen de l'équation (1.9) :

$$P = hS(T_1 - T_2) \qquad (1.9)$$

Sous cette forme, l'équation de la convection semble être tout à fait simple. En réalité, il n'en est rien, car l'Éq.1.9 est une définition de l'unité de conductance thermique moyenne par convection plutôt qu'une loi de transmission de la chaleur par convection. Le coefficient d'échange de chaleur par convection est, en effet, une fonction l'écoulement du fluide, des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système. Sa valeur numérique n'est généralement pas uniforme sur une surface et elle dépend également du lieu où on mesure la température.

Comme le transfert d'énergie par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de la chaleur. Un des plus importants aspects de l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est laminaire ou turbulent. Lorsqu'un fluide s'écoule en **mouvement laminaire** le long d'une surface dont la température est différente de celle du fluide, la chaleur est transmise seulement par conduction aussi bien à l'intérieur du fluide qu'à l'interface entre le fluide et la surface. Par contre dans un **écoulement turbulent**, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes de fluide en se mélangeant avec d'autres jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une surface, indépendamment de la nature de l'écoulement —laminaire ou turbulent — les molécules à proximité de la surface sont ralenties à cause des forces de visqueuses. Les molécules du fluide adjacentes à la surface y adhèrent et ont une vitesse nulle par rapport à la paroi. Les autres molécules du fluide s'efforçant de glisser sur les premières sont ralenties, phénomène qui donne naissance aux forces de cisaillement. Dans un écoulement laminaire l'interaction, appelée cisaillement visqueux, s'effectue entre les molécules à une échelle microscopique. Dans l'écoulement turbulent une interaction entre les masses du fluide à une échelle macroscopique, appelée cisaillement turbulent, se superpose au cisaillement visqueux. Les effets des forces visqueuses qui prennent naissance à la paroi s'étendent dans la masse du fluide, mais à une faible distance de la paroi la vitesse des particules fluides atteint celle de l'écoulement libre non perturbé. La région dans laquelle sont localisées les variations notables de la vitesse est appelée **couche limite hydrodynamique**. L'épaisseur de cette couche est définie comme étant la distance comptée à partir de la paroi où la vitesse locale atteint 99 % de la vitesse u_∞ du fluide loin de la paroi. Le profil des vitesses à l'intérieur de la couche limite dépend de la nature de l'écoulement. Comme le fluide poursuit son écoulement le long de la plaque, les forces de cisaillement ralentissent de plus en plus son mouvement et l'épaisseur de la couche limite augmente. Figure 8.1 montre l'accroissement de la couche limite et les profils des vitesses en différents points de la plaque.

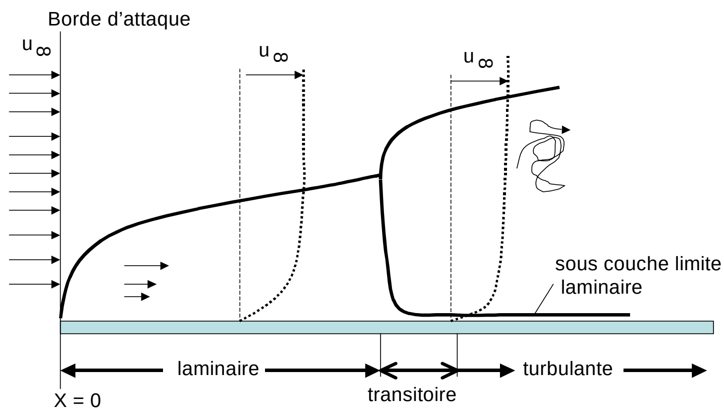


Figure 8.1 : Profils des vitesses pour les couches limites laminaire et turbulente dans un écoulement sur une plaque plane.

Les profils des vitesses près du bord d'attaque sont représentatifs des couches limites laminaires. Cependant l'écoulement à l'intérieur de la couche limite reste laminaire seulement sur une certaine distance à partir du bord d'attaque et devient ensuite turbulent. A l'intérieur de la couche limite turbulente, il subsiste, tout contre la paroi, une très mince couche en écoulement presque laminaire appelée **sous couche limite laminaire** ou film laminaire. La distance entre le bord d'attaque et le point de transition où la couche limite devient turbulente est appelée longueur critique.

8.1 Le nombre de Nusselt

Lorsque la vitesse du fluide et la turbulence sont faibles, le transport d'énergie n'est que faiblement aidé par les courants de mélange à une échelle macroscopique. Par contre, si la vitesse est grande et si le mélange entre le fluide chaud et le fluide froid contribue notablement au transfert d'énergie, le mécanisme de conduction devient moins important. En conséquence, pour transporter par convection à travers un fluide une quantité de chaleur donnée, il est nécessaire que le gradient de température soit plus grand dans la région à faible vitesse que dans celle où la vitesse est élevée. Au voisinage immédiat de la paroi la chaleur se meut par conduction pure, les molécules du fluide étant stationnaires par rapport à la frontière de la couche limite. On compte naturellement sur un grand gradient de la température dans cette couche. A mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le mouvement du fluide favorise le transport d'énergie et le gradient de température diminue de moins en moins vite pour atteindre finalement celui du courant principal. La répartition des températures pour l'écoulement turbulent de l'air le long d'une plaque plane, représentée sur la figure 8.2, illustre qualitativement ce comportement.

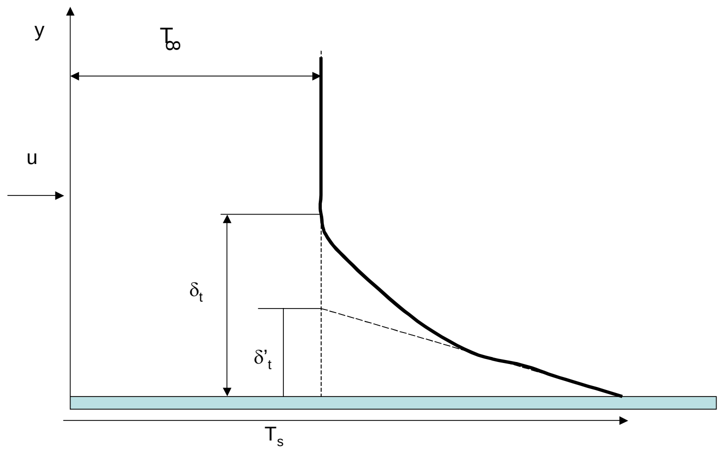


Figure 8.2 : Répartition des températures dans une couche limite turbulente pour un fluide s'écoulant sur une plaque chauffée

Comme à l'interface (y=0) la chaleur s'écoule seulement par conduction, la densité du flux de chaleur peut être calculée à partir de l'équation

$$q_{surface-fluide} = -k_f \left. \frac{\partial T}{dy} \right|_{y=0} \tag{8.1}$$

k_f = conductivité thermique du fluide.

On peut établir une relation entre le coefficient d'échange de chaleur, h, défini par l'équation 1.9, et le gradient de température à la paroi. En égalisant les équations 8.1et 1.9 on obtient

$$P_{surface-fluide} = q_{surface-fluide} S = -Sk_f \frac{\partial T}{\partial y} = \bar{h}_c S(T_s - T_\infty) \tag{8.2}$$

$\bar{h}_c$ = coefficient de conductance moyenne de convection par unité de surface, [W/m^2°C]

La valeur du gradient de température dans le fluide étant la même indépendamment de la température de référence on peut écrire $\partial T = \partial(T - T_s)$. En introduisant une longueur L caractéristique du corps à partir duquel la chaleur se transmet, l'équation (8.2) se met sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\bar{h}_c S}{k_f S} = \frac{-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} ; \Rightarrow \frac{\bar{h}_c L}{k_f L} = \frac{-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \Rightarrow \frac{\bar{h}_c L}{k_f} = \frac{-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{\frac{T_s - T_\infty}{L}} = Nu \tag{8.3}$$

La combinaison du coefficient d'échange de chaleur par convection $\bar{h}_c$, de la longueur caractéristique L, de la conductivité thermique du fluide k_f, sous la forme $\bar{h}_c$ L/k_f est appelée le <u>Nombre de Nusselt, **Nu**</u>. Ce nombre est une quantité adimensionnelle. Le nombre de

Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence $(T_s - T_\infty)/L$. En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection d'après la relation :

$$\boxed{\bar{h}_c = Nu \frac{k_f}{L}} \tag{8.4}$$

8.2 Evaluation de coefficient d'échange de chaleur par convection, (analyse dimensionnelle et détermination des groupes adimensionnels)

Il existe quatre méthodes générales pour déterminer les coefficients d'échange de chaleur par convection :

1. L'analyse dimensionnelle combinée avec les expériences.
2. Les solutions mathématiques exactes des équations de la couche limite.
3. Les études approchées de la couche limite par les méthodes d'intégration.
4. L'analogie entre le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement.

L'analyse dimensionnelle nécessite des calculs mathématiques simples, son champ d'application est le plus vaste. La principale restriction de cette méthode provient du fait que les résultats obtenus sont incomplets et tout à fait inutiles sans les données expérimentales. Elle contribue peu à notre compréhension du processus de transfert mais facilite l'interprétation et étend le domaine d'application des données expérimentales en les rassemblant suivant des groupes adimensionnels.

Dans la pratique, les coefficients d'échange de chaleur par convection sont généralement calculés à partir des équations empiriques obtenues en établissant une corrélation entre les données expérimentales au moyen de l'analyse dimensionnelle. Pour appliquer l'analyse dimensionnelle il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène, et le succès ou l'échec de la méthode dépend du choix approprié de ces variables. La première étape consiste à choisir un système de dimensions fondamentales. Celles-ci seront <u>la longueur L, le temps T, la température θ et la masse M</u>. A partir ces dimensions fondamentales toutes les autres grandeurs peuvent être définies. Par exemple

$$Q = mC\Delta T \qquad [J = Nm = kg\ m^2\ s^{-2}]$$

$$[Q] = ML^2T^{-2}$$

Le nombre de groupe indépendant adimensionnel nécessaire pour exprimer la relation décrivant un phénomène, peut être déterminé par une méthode empirique due à Buckingham. D'après ce théorème, le nombre de groupe indépendant adimensionnel, qui peut être formé par la combinaison des variables physiques du problème donné, est égal au nombre total de ces quantités physiques (par exemple, densité, viscosité, coefficient d'échange de chaleur etc.) diminué du nombre des dimensions fondamentales nécessaires pour exprimer les formules dimensionnelles des n quantités physiques. (Exemple : nous avions 7 grandeurs $g_1, \ldots, g_7$ et 4 dimensions M, L, T, θ. On a obtenu une loi avec 3 = 7-4 paramètres sans dimensions Π_1, Π_2, Π_3). L'équation exprimant la relation entre les variables possède une solution de la forme :

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots) = 0 \tag{8.5}$$

Pour un phénomène représenté par trois groupes adimensionnels l'équation (8.5) est de la forme

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \qquad (8.6)$$

Elle peut également être mise sous la forme

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \qquad (8.7)$$

Pour un tel problème, on peut déterminer la corrélation entre les données expérimentales en traçant Π_1 en fonction de Π_2 pour différentes valeurs de Π_3

Détermination des groupes adimensionnelle (cas de la convection) :

Le coefficient h dépend d'un certain nombre de grandeurs :
$\overline{h}_c$ = f(g_1,g_2,…, g_n)
Il nous faut d'abord fixer ces grandeurs :
- Dans le cas de l'écoulement le long d'une paroi, l'échange de chaleur peut évoluer le long de la paroi. Dans le cas de l'écoulement dans une tuyauterie, il est certain que le flux dépend du diamètre. Dans tous les cas, une grandeur dimensionnelle de longueur intervient ; appelons d cette grandeur.
- Le flux dépend des caractéristiques thermiques du fluide, c'est-à-dire sa chaleur massique, C_p et sa conductivité thermique k. Lorsque C_p dépend de la température, C_p et T ne sont pas des quantités indépendantes.
- Enfin la viscosité, μ, la densité ρ et la vitesse (vitesse moyenne dans le tube, par exemple, u_m) jouent aussi des rôles importants.

Dans ces conditions :

$$\overline{h}_c = f(d, C_p, k, \rho, u_m, \mu) \qquad (8.8)$$

avec les dimensions de ces diverses grandeurs :

Grandeur	Dimension	Grandeur	Dimension
$\overline{h}_c$	$MT^{-3}\theta^{-1}$	ρ	ML^{-3}
d	L	u_m	LT^{-1}
C_p	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
k	$MLT^{-3}\theta^{-1}$		

Avec 7 variables et 4 unités fondamentales, la loi fondamentale de la convection doit dépendre de 3 grandeurs sans dimensions. Elle est de la forme de l'équation (8.6) avec, par exemple :

$$\begin{cases} \Pi_1 = d^{\alpha_1}\mu^{\beta_1}\rho^{\gamma_1}k^{\delta_1}\overline{h}_c \\ \Pi_2 = d^{\alpha_2}\mu^{\beta_2}\rho^{\gamma_2}k^{\delta_2}C_p \\ \Pi_3 = d^{\alpha_3}\mu^{\beta_3}\rho^{\gamma_3}k^{\delta_3}u_m \end{cases} \qquad (8.9)$$

En faisant intervenir les dimensions, la première relation devient

$$[\Pi_1] = L^{\alpha_1}M^{\beta_1}L^{-\beta_1}T^{-\beta_1}M^{\gamma_1}L^{-3\gamma_1}M^{\delta_1}L^{\delta_1}T^{-3\delta_1}\theta^{-\delta_1}MT^{-3}\theta^{-1} = 1 \qquad (8.10)$$

Pour que Π_n reste adimensionnel, il faut que la somme des exposants de chaque dimension fondamentale soit nulle. La relation (8.10) donne :

$$\begin{cases} \text{pour L:} & \alpha_1 - \beta_1 - 3\gamma_1 + \delta_1 = 0 \\ \text{pour M:} & \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + 1 = 0 \\ \text{pour T:} & -\beta_1 + \gamma_1 - 3\delta_1 - 3 = 0 \\ \text{pour } \theta\text{:} & -\gamma_1 - 1 = 0 \end{cases} \tag{8.11}$$

Ce qui nous permet de déduire :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \beta_1 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 \\ \delta_1 &= -1 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Ainsi

$$\Pi_1 = \frac{\overline{h}_c d}{k_f} = Nu \quad \text{(nombre de Nusselt)} \tag{8.13}$$

Avec la même méthode on obtient pour Π_2:

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\mu C_p}{k_f} = \mathrm{Pr} \quad \text{(nombre de Prandlt)}} \tag{8.14}$$

Enfin pour Π_3 :

$$\boxed{\Pi_3 = \frac{u_m d \rho}{\mu} = \mathrm{Re} \quad \text{(nombre de Reynolds)}} \tag{8.15}$$

Dans ces conditions, la loi fondamentale du transfert de chaleur par convection est de la forme :

$$\begin{aligned} & F(Nu, \mathrm{Pr}, \mathrm{Re}) = 0 \\ & ou \\ & Nu = f(\mathrm{Pr}, \mathrm{Re}, r_1, \ldots r_n) \end{aligned} \tag{8.16}$$

où les r_i sont des rapports entre grandeurs de même dimensions.

Le nombre de Prandtl

Ce nombre est entièrement caractéristique du fluide considéré. L'inverse du nombre de Prandtl est appelé par les « thermiciens » français : le nombre de Stanton (S). Dans le cas des gaz, Pr est sensiblement constant avec la pression et la température et ne varie qu'avec les changements thermiques de $C_p(T)$. Voici quelques exemples du nombre de Prandtl à 100°C pour des gaz courants :

Gaz	Pr
H_2	0.69
Air	0.69
Ar	0.66
CO_2	0.75
CO	0.72
He	0.71
N_2	0.70
O_2	0.70
H_2O (vapeur)	1.06

Dans le cas des liquides, le nombre de Prandtl est beaucoup plus variable :

Liquide	T (°C)	Pr
Eau	0	13.6
	20	7.03
	100	1.75
Alcool éthylique	0	21.8
	30	13.9
	60	12.1
Glycol	20	203
	100	25
Glycérine	0	100'000
	30	5'200

Pour les métaux liquides, au contraire, Pr est très petit, de l'ordre de 0.01.

Le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est défini par l'équation (8.15). Si on introduit la viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho$:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m d}{\nu} \tag{8.17}$$

Ce nombre joue un rôle fondamental dans la caractérisation de l'écoulement :

- Si Re < 2400 on est en régime laminaire.
- Pour des vitesses plus élevées, Re >> 2400, le régime turbulent apparaît (figure 8.1).

Considérons l'écoulement le long d'un plan, à partir d'un certain endroit (zone de transition) s'amorce un noyau à l'intérieur duquel les trajectoires du gaz sont tourbillonnantes (noyau turbulent). Il existe toujours une sous couche limite laminaire. Dans le cas d'un écoulement dans une tuyauterie, les phénomènes sont sensiblement les mêmes. Néanmoins, à partir d'une certaine distance le noyau turbulent occupe la totalité de la tuyauterie sauf la zone de sous-couche laminaire (Figure 8.3).

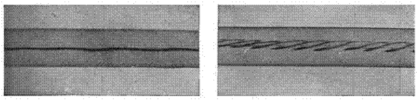


Figure 8.2 **Right:** Photographs of near-laminar flow (left) and turbulent flow (right) in a clearpipe much like the one used by Reynolds. (From Binder 1953).

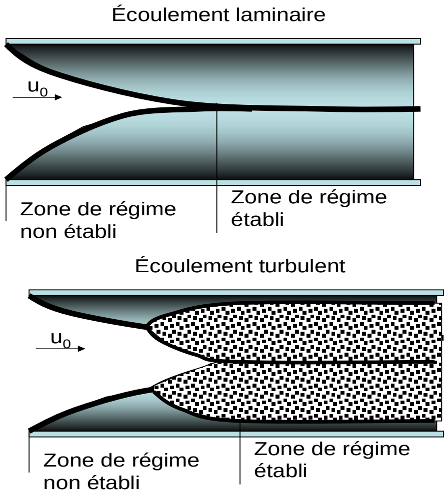


Figure 8.3 : Couche limite turbulente et les zones établi dans une tuyauterie.

Dans une tuyauterie le régime turbulent a lieu lorsque Re > 5000. Dans le cas où 2400 < Re < 5000, on a une zone transitoire. Pour l'eau, la vitesse critique (Re = 2400) est

$$u_c = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{d} \tag{8.18}$$

et pour l'air :

$$u_c = \frac{360 \cdot 10^{-4}}{d} \tag{8.19}$$

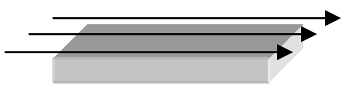
où d est le diamètre du tube en mètres et u_c est donnée en m/s.

8.3 Ecoulement de la chaleur en régime laminaire et en régime turbulent (convection forcée)

a) Cas d'une plaque plane parallèle à l'écoulement laminaire :
Le nombre de Nusselt en un point situé à une distance x du bord de la plaque est

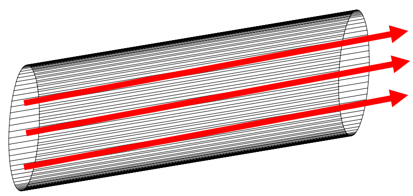
$$Nu(x) = 0.322\left[\mathrm{Re}(x)\right]^{1/2}\left[\mathrm{Pr}\right]^{1/3} \tag{8.20}$$

où la fonctionnalité de x indique que dans le calcul de Nu et de Re la dimension d est à remplacer par x. Le nombre de Nusselt moyen sur une plaque de largeur L est



$$Nu(L) = 0.664\left[\mathrm{Re}(L)\right]^{1/2}\left[\mathrm{Pr}\right]^{1/3} \tag{8.21}$$

b) Cas d'un écoulement laminaire dans un tube :
Pratiquement on considère deux domaines :
1) Le régime est établi :



$$Nu = 3.7 \tag{8.22}$$

Ceci correspond à la région où

$$\frac{x}{r \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}} > 0.1 \tag{8.23}$$

Avec x : distance à partir de l'entrée du tube, r : rayon du tube (Remarque : le produit Re • Pr = Pe, nombre de Péclet) .

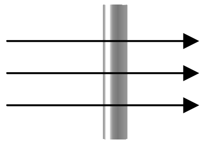
Cette condition correspond à

Pour l'air : $x/r > 80$
Pour l'eau : $x/r > 600$
Pour l'huile $x/r > 10'000$

Donc dans un tuyau d'un mètre de rayon, il faut 600m avant que l'eau entre en régime établi.

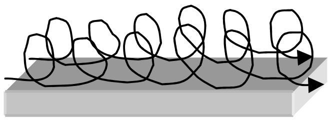
2) Le régime n'est pas établi

$$Nu = 1.06\left(\frac{x}{r \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}}\right)^{1/3} \tag{8.24}$$



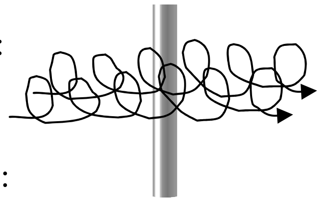
c) Cas d'un tube perpendiculaire à l'écoulement laminaire :

$$Nu = 0.82\,\mathrm{Re}^{0.4}\,\mathrm{Pr}^{0.3} \tag{8.25}$$



d) Cas d'une plaque parallèle à l'écoulement turbulent :

$$Nu(x) = 0.0298\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left[\mathrm{Re}(x)\right]^{0.8} \tag{8.26}$$



e) Cas d'un tube lisse à l'écoulement turbulent :

Dans le cas des gaz la formule adoptée en pratique est :

$$Nu = 0.026\left(\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}\right)^{3/4} \tag{8.27}$$

Pour les liquides, on utilise surtout l'équation suivante :

$$\boxed{Nu = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4}} \tag{8.28}$$

8.4 La convection naturelle[1]

Lorsqu'un fluide se trouve en contact avec un corps chaud, sa température augmente et sa masse volumique diminue, et il se déplace (il monte) par rapport au corps chaud. Cet écoulement de fluide le long de ce corps chaud entraîne un phénomène de convection que l'on appelle naturelle ou libre. Si le fluide est plus chaud que le corps, l'écoulement se fera vers le bas mais il y aura toujours de la convection.

La recherche de la loi de la convection naturelle est de nouveau guidée par l'analyse dimensionnelle. Seulement, cette fois, le nombre de Reynolds (l'équation 8.15) doit être remplacé par un autre nombre sans dimensions. Dans le cas de la convection forcée u_m était une donnée du problème. En convection naturelle, la vitesse du fluide dépend indirectement des conditions du problème. Il convient donc de trouver une expression qui représente cette vitesse. En convection libre comme en convection forcée, l'écoulement peut être laminaire ou turbulent et dépend de la distance au bord d'attaque, des propriétés du fluide, de la force de pesanteur et de l'écart de température entre la surface et le fluide. Le champ de température en convection naturelle (Fig. 8.4) est identique à celui observé en convection forcée. De ce fait l'interprétation physique du nombre de Nusselt peut être utilisée. Cependant, pour les applications pratiques on utilise généralement l'équation

$$\delta P = h_c \delta A (T_s - T_\infty) \tag{8.29}$$

---

[1] Texte tiré partiellement de l'ouvrage : « Transmission de la chaleur et Thermodynamique » par F. KREITH :Professeur de Mécanique, Université du Colorado, TRADUCTION ET ADAPTATION par KODJA BADR-EL-DINE; MASSON ET C^{ie,} ÉDITEURS ; PARIS, 1967

La raison pour laquelle on rapporte cette équation à une surface infiniment petite δA est que le coefficient d'échange de chaleur, h_c, par convection naturelle n'est pas uniforme sur une surface. De même qu'en convection forcée sur une plaque plane, on fera la distinction entre une valeur locale de h_c et une valeur moyenne $\overline{h_c}$ obtenue en prenant la moyenne de h_c sur la surface entière.

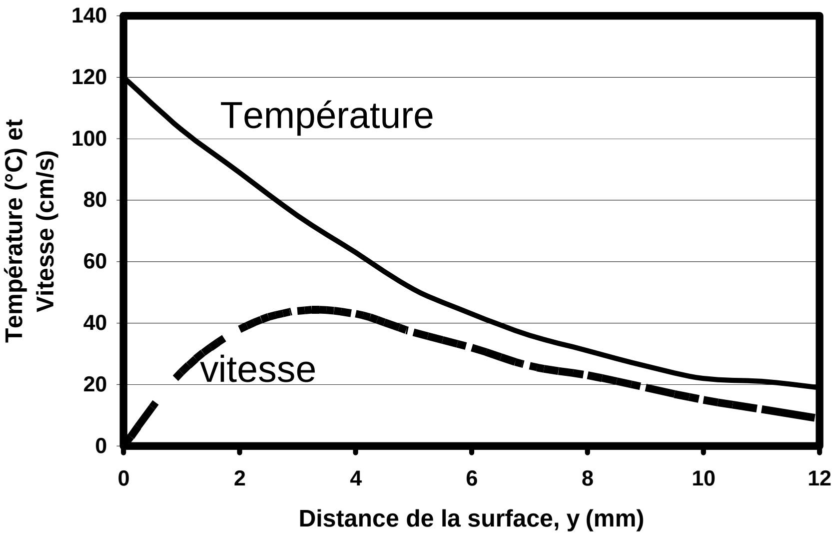


Figure 8.4 : Variation de la vitesse d'écoulement et de la température perpendiculairement à une plaque chaude.

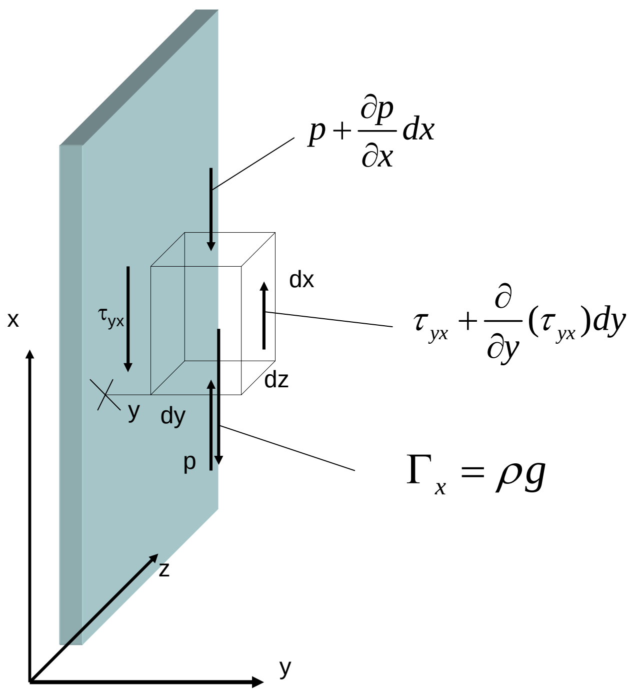


Figure 8.5 : Schéma montrant les forces qui agissent sur un élément de fluide un écoulement en convection naturelle

Supposons une paroi verticale à température sensiblement uniforme T_p et un fluide à température T_f. Au voisinage de cette paroi, la température du fluide évolue lentement de T_f à T_p créant ainsi une couche limite. Soit un élément de volume infiniment petit du fluide situé tout près de la paroi de dimensions dx, dy et dz. Lorsqu'il se trouve très près de la paroi, sa température est T_p. Lorsque la température du fluide est différente de celle de la paroi, par exemple $T_f > T_p$ la densité du fluide se diminue. Par suite la force de gravité (définie comme étant la force par unité de masse) agissant sur une unité de volume dans la partie chauffée du fluide est plus faible que dans le fluide non chauffé. Ce déséquilibre est à l'origine de la montée du fluide chaud.

Lorsque l'air est en mouvement, des forces de pression et de frottement viennent s'ajouter à la force ascensionnelle. Une fois que le régime permanent est établi, la force totale sur un élément de volume $d_x\, d_y\, d_z$ agit dans la direction positive de l'axe x:

1. La force due au gradient de pression :

$$pdydz-(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz=-\frac{\partial p}{\partial x}\left(dxdydz\right) \tag{8.30}$$

2. La force de gravité :

$$\Gamma_x = g\rho dxdydz \tag{8.31}$$

Où g est l'accélération de la gravité.

3. Les forces de cisaillement dues au gradient de vitesse :

$$(-\tau_{yx})dxdz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz \tag{8.32}$$

Puisque en écoulement laminaire $\tau_{yx} = \mu(\partial u / \partial y)$, la force de frottement résultant est :

$$\left(\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdydz \tag{8.33}$$

avec u = vitesse moyenne dans le temps suivant la direction x.
La variation de la quantité de mouvement de l'élément fluide est

$$\rho dxdydz\left[u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{8.34}$$

avec v = vitesse moyenne dans le temps suivant la direction y

En appliquant, au volume élémentaire, la seconde loi de Newton on obtient :

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.35}$$

Le fluide non chauffé, loin de la plaque, est en équilibre hydrostatique, soit $\partial p_e / \partial x = -\rho_e g$, où l'indice e indique les conditions d'équilibre. A n'importe quel niveau la pression est uniforme et par conséquent $\partial p / \partial x = \partial p_e / \partial x$. Donc l'équation (8.35) devient :

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\rho_e-\rho\right)g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.36}$$

Une autre simplification peut être introduite en supposant que la densité ρ dépend seulement de la température et non de la pression. Ceci est évident pour un fluide incompressible, mais pour un gaz cela implique que la dimension verticale du corps est suffisamment petite pour que la densité hydrostatique ρ_e soit constante. Avec ces hypothèses le terme ascensionnel peut s'écrire

$$g(\rho_e - \rho) = g(\rho_\infty - \rho) = -\rho g \beta (T_\infty - T) \qquad (8.37)$$

où β est le coefficient de dilatation thermique défini par

$$\beta = \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho(T - T_\infty)} \quad \left(\textit{dans le cas d'un gaz parfait} : \beta = \frac{1}{T} \right) \qquad (8.38)$$

L'équation du mouvement pour la convection naturelle est obtenue finalement en substituant le terme ascensionnel exprimé par l'Éq. (8.37) dans l'Éq. (8.36), ce qui donne

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \beta (T - T_\infty) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (8.39)$$

Le problème consiste, maintenant, à déterminer les conditions pour lesquelles le champ de vitesse dans un système en convection naturelle est semblable au champ de vitesse dans un autre système. Les conditions aux limites sont identiques pour tous les systèmes en convection naturelle, c'est-à-dire que la vitesse est nulle à la fois sur la surface de la plaque et à une distance assez éloignée de la plaque. Il est alors possible de supposer

$$u = u_m f(y) \qquad (8.40)$$

de sorte que

$$\frac{du}{dy} = u_m \frac{df}{dy} \qquad (8.41)$$

on peut montrer, en utilisant la méthode d'analyse dimensionnelle, que

$$u_m = \frac{\rho\beta\theta g D^2}{\mu} \qquad (8.42)$$

avec $\theta = (T - T_\infty)$.

Par conséquent, dans le nombre sans dimensions qu'avait fournit l'analyse dimensionnelle (le nombre de Reynolds), il convient de remplacer u_m par $\frac{\rho\beta\theta g D^2}{\mu}$, la quantité restante étant sans dimensions.

On définit un nouveau nombre sans dimensions, <u>le nombre de Grashof</u> :

$$Gr = \frac{\rho D}{\mu}\frac{\rho\beta\theta g D^2}{\mu} = \frac{\rho^2 \beta\theta g D^3}{\mu^2} \qquad (8.43)$$

Ainsi, la loi de la convection naturelle serait de la forme

$$Nu = f(Gr, \Pr, r_1, ..r_q) \qquad (8.44)$$

<u>Les équations de la convection naturelle :</u>

En prenant

$$T_m = \frac{1}{2}(T_p - T_\infty) \qquad (8.45)$$

on obtient la loi générale suivante :

$$\boxed{Nu = a(Gr \cdot \Pr)^n = a \cdot Ra^n} \qquad (8.46)$$

avec Ra = Gr • Pr <u>Ra étant le nombre de Rayleigh</u> avec

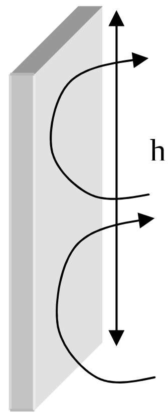
$\mathbf{Gr \cdot Pr}$	**a**	**n**
de 10^{-3} à $5\ 10^{2}$	1.18	1/8
de $5\ 10^{2}$ à $2\ 10^{7}$	0.54	1/4
de $2\ 10^{7}$ à 10^{13}	0.135	1/3

Pour des tubes horizontaux, on obtient une formule plus précise pour 0.7<Pr<30'000 :

$$Nu_{T_f} = \frac{1}{2} Gr_{T_f}^{1/4} \Pr_{T_f}^{1/4} \left(\frac{\Pr_{T_f}}{\Pr_{T_p}} \right)^{1/4} \tag{8.47}$$

Dans le cas de gaz cette dernière équation se réduit en pratique à :

$$Nu_{T_f} = 0.46 Gr_{T_f}^{1/4} \tag{8.48}$$



Ces formules sont valables pour $1 < Pr.Gr < 10^{8}$

<u>Cas de la convection dans l'air</u>

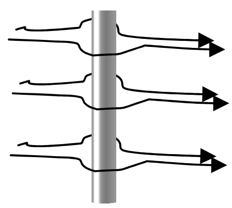
Dans le cas d'une plaque verticale de hauteur H

$$h = 1.4 \left(\frac{\theta}{H} \right)^{1/4} \qquad \left[\mathrm{Wm}^{-2} \, {}^{\circ}C^{-1} \right] \tag{8.49}$$

Pour un cylindre horizontal de diamètre D

a) Pour l'air ambiant

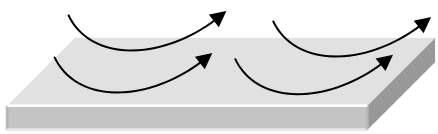
$$h = 1.3 \left(\frac{\theta}{D} \right)^{1/4} \qquad \left[\mathrm{Wm}^{-2} \, {}^{\circ}C^{-1} \right] \tag{8.50}$$



b) Pour l'air à température T (en Kelvin)

$$h = 5.6 \left(\frac{\theta}{D \cdot T} \right)^{1/4} \qquad \left[\mathrm{Wm}^{-2} \cdot K^{-1} \right] \tag{8.51}$$

Cas des plaques horizontales dans l'air

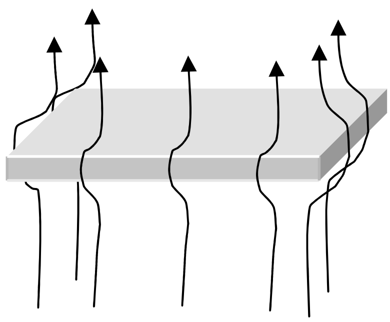


a) Pour un flux descendant

$$Nu = 0.27 (Gr \Pr)^{1/4} \tag{8.52}$$

valable si $3\ 10^{5} < Gr\ Pr < 3\ 10^{10}$

b) Pour un flux ascendant



$$Nu = 0.54 (Gr \Pr)^{1/4} \tag{8.53}$$

valable si $10^{5} < Gr\ Pr < 2\ 10^{7}$

$$Nu = 0.14 (Gr \Pr)^{1/3} \tag{8.54}$$

valable si $2\ 10^{7} < Gr\ Pr < 3\ 10^{10}$

Où les propriétés sont calculer à la température moyenne T_m.