

## 9. TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT.

Tous les corps solides, liquides ou gazeux émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie représente un flux de chaleur émis par le corps considéré. Ce rayonnement est composé de radiations de longueurs d'ondes différentes ( $0.3 \mu m$  à  $100 \mu m$ ) donnant des spectres continus dans le cas des solides et des spectres de bandes pour certains gaz. L'intensité dépend de la température du corps. Le vide et la plupart des gaz simples ( $O_2, N_2, H_2$ ) constituent des milieux parfaitement transparents à la propagation de ce rayonnement. Certains gaz composés (en particulier  $CO_2, H_2O, CO, CH_4$ ) sont seulement partiellement transparents, car la propagation s'accompagne d'une diminution de l'énergie transportée. Certains liquides et solides (polymères, verres) entrent également dans cette catégorie. Mais la majorité des liquides et solides sont opaques, car ils arrêtent la propagation de tout rayonnement dès leur surfaces. Du point de vue de l'émission, on distingue :

- le rayonnement de corps opaques provenant de leur seule surface
- le rayonnement des corps partiellement transparents qui provient de toute leur masse.

Un rayonnement incident  $\phi_i$ , qui arrive sur un corps opaque est en partie réfléchi ( $\phi_r$ ) et le reste est absorbé sous forme de chaleur au voisinage du lieu de l'impact. Comme en optique, la réflexion peut être diffuse, spéculaire ou quelconque. Lorsqu'on étudie l'équilibre thermique d'un système, tout corps doit être considéré de deux points de vue :

- comme émetteur, car il envoie toujours un rayonnement lié à sa température (sauf s'il est parfaitement transparent).
- comme récepteur, car il reçoit des rayonnements émis ou réfléchis et diffusés par les corps qui l'entourent.

A ce titre, un corps absorbe une partie du rayonnement et en réfléchit le reste, donc le flux de rayonnement provenant d'un corps est très souvent la somme du flux émis et du flux réfléchi. La figure 9.1 montre les rayonnements électromagnétiques ordonnés selon leurs longueurs d'onde et selon leurs fréquences.

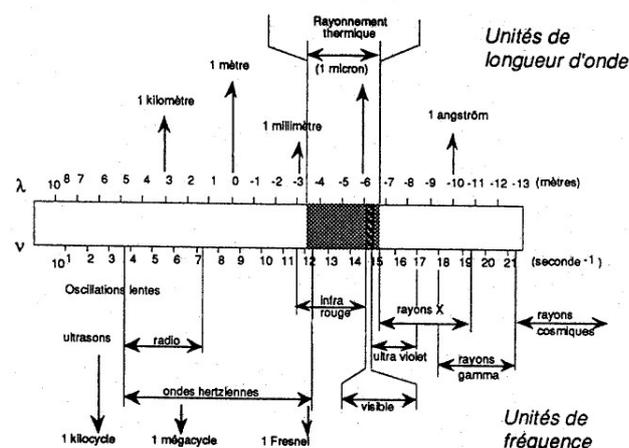


Fig 9.1 : Rayonnements électromagnétiques ordonnés selon leurs longueurs d'onde et selon leurs fréquences.

## 9.1 Le rayonnement de corps opaques

### 9.1.1 Le corps opaque en tant qu'émetteur de rayonnement

#### Définitions

- a)  $e$  : l'émittance énergétique ou pouvoir émissif total.

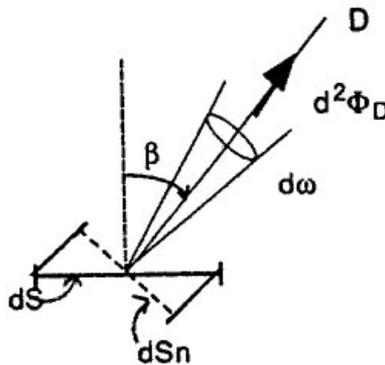
L'élément de surface  $dS$  du corps émet un flux  $d\phi [W]$  lié à sa température ( $d\phi = 0$  à  $0K$ ).

$$e = \frac{d\phi}{dS} \quad [W / m^2] \quad (9.1)$$

$e$  est donc la densité de flux émis par  $dS$  dans toutes les directions de l'espace.

- b)  $L_D$  : luminance dans la direction D.

$L_D$  est le flux rayonné par unité d'angle solide dans la direction D et par unité de surface perpendiculaire à D (figure 9.2)



**Figure 9.2** Définition de  $L_D$

$$L_D = \frac{d^2\phi_D}{dS_n d\omega} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}] \quad (9.2)$$

(Watt par mètre carré de surface normale et par stéradian)

- c) Loi de Lambert : « La luminance des surfaces dites diffuses est indépendante de la direction D »

$$L_D = L \quad (9.3)$$

C'est-à-dire qu'on voit ces surfaces avec la même intensité lumineuse quelle que soit la direction d'observation. L'équation 9.2 devient donc

$$d^2\phi = LdS \cos(\beta)d\omega$$

On peut calculer le flux total d'une telle surface en intégrant  $d^2\phi_D$  sur le demi-espace au-dessus de  $dS$  :

$$d\phi = \int_{\frac{1}{2}\text{espace}} d^2\phi_D$$

En sachant que  $\int_{\frac{1}{2}\text{espace}} \cos \beta d\omega = \pi$  et avec l'équation 9.1, on obtient

$$\frac{d\phi}{dS} = e = \pi L \quad [W / m^2] \quad (9.4)$$

d) Flux élémentaire dans la direction  $D$ .

La fraction du flux émise dans la direction  $D$  s'écrit (en utilisant les équation 9.2, 9.3 et 9.4)

$$d^2\phi_D = \frac{e}{\pi} dS \cos \beta d\omega \quad [W] \quad (9.5)$$

$e$  étant l'émittance de la source.

Le flux élémentaire  $d^3\phi_{D\lambda}$  rayonné dans la bande spectrale  $\lambda, \lambda + d\lambda$  permet d'écrire

$$d^2\phi_D = \int_0^\infty \frac{d^3\phi_{D\lambda}}{d\lambda} d\lambda \quad (9.6)$$

L'émittance monochromatique directionnelle est donc

$$e_{D\lambda} = \frac{d^3\phi_{D\lambda}}{dS \cos \beta d\omega d\lambda} \quad (9.7)$$

### 9.1.2 Le corps opaque en tant que récepteur de rayonnement

a) Eclairement (ou irradiation)

L'eclairement  $\varphi$  est la densité de flux de chaleur « arrivant » sur l'unité de surface  $dS$  originaire du demi-espace « visible » par cette surface :

$$\varphi = \frac{d\phi}{dS} \quad [W / m^2] \quad (9.8)$$

b) Facteur d'absorption  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{d\phi_{\text{absorbé}}}{d\phi}$$

$\alpha$  est aussi défini par  $\lambda$  et  $D$  :  $\alpha_\lambda, \alpha_D, \alpha_{D\lambda}$ .  $\alpha$  varie entre 0 et 1. On appelle corps noir corps pour lequel  $\alpha_{D\lambda} = 1$  d'où  $\alpha = 1$ .

c) Facteur de réflexion  $\rho$ . Il est défini de la même manière (corps opaques)

$$\rho = \frac{d\phi_{\text{réfléchi}}}{d\phi} = 1 - \alpha \quad (9.9)$$

### 9.1.3 Les lois du rayonnement thermique (corps noir)

a) Émittance monochromatique du corps noir, lois de Planck et de Wien

La loi de Planck dit : « L'émittance monochromatique du corps noir dépend seulement de  $\lambda$  et de T ».

$$E_\lambda = \frac{d\phi_\lambda}{dS} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left( e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad [Wm^{-2}\mu m^{-1}] \quad (9.10)$$

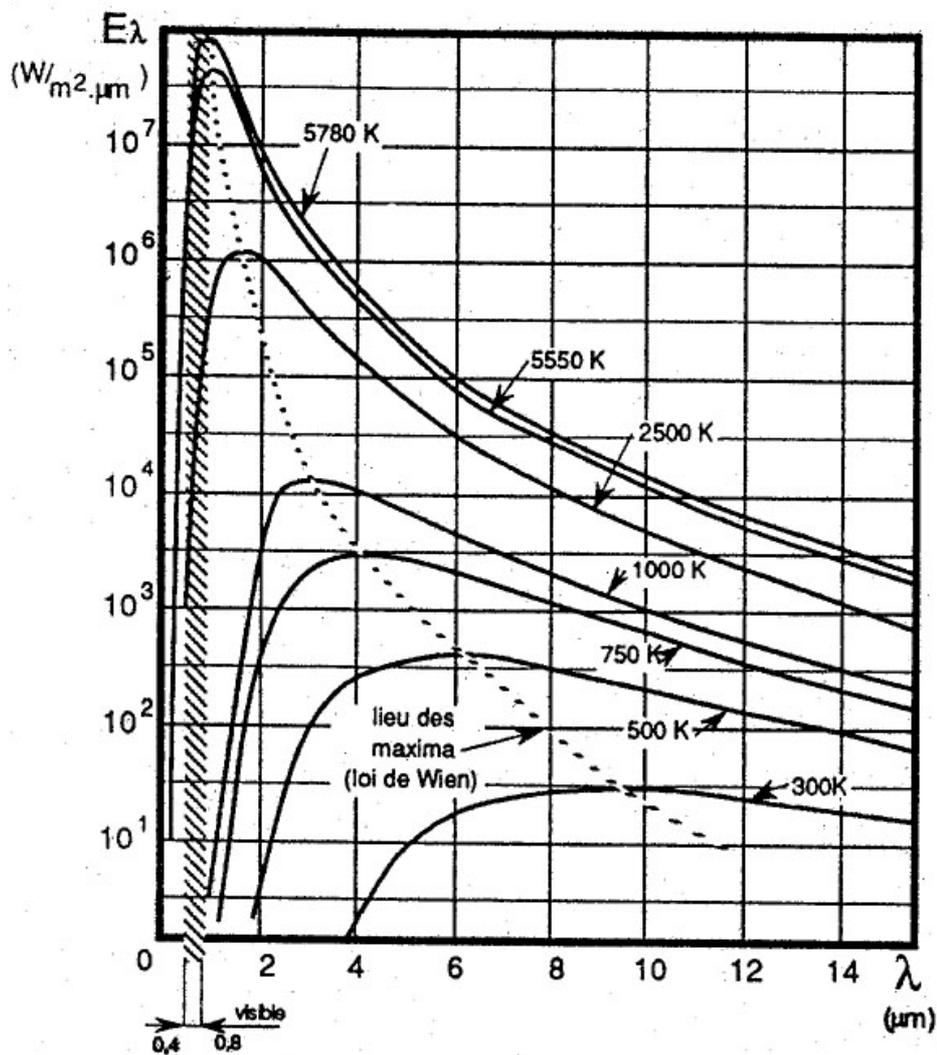
où

$E$  : e pour un corps noir exprimée en  $[Wm^{-2}\mu m^{-1}]$ . T est exprimée en Kelvin, et  $\lambda$  en  $\mu m$ .

$C_1 = 2\pi hc^2 = 3.74 \cdot 10^8$  (c : vitesse de la lumière, h : constante de Planck)

$C_2 = hc / k$  (k : constante de Boltzmann)

La figure 9.3 montre des graphes de la fonction 9.10.



**Figure 9.3** Emittance d'un corps noir

La loi de Wien permet d'exprimer le fait que les maxima de ces courbes se déplacent :

$$\lambda_m = \frac{2898}{T} \quad [\mu\text{m}] \quad (9.11)$$

b) Emittance totale du corps noir, loi de Stefan Boltzmann.

$$E = \frac{d\phi}{dS} = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad [W/m^2] \quad (9.12)$$

où  $\sigma$  : constante de Stefan Boltzmann =  $5.67 \cdot 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$

### 9.1.4 Le rayonnement d'un corps opaque non noir.

Le corps noir est l'émetteur idéal. Les corps opaque n'émettent qu'une fraction de  $E_\lambda$ .

a) Facteur d'émission monochromatique  $\underline{\varepsilon_\lambda}$  :

$$\varepsilon_\lambda = \frac{e_\lambda}{E_\lambda} \quad (9.13)$$

b) Facteur d'émission totale  $\underline{\varepsilon}$

Lorsque  $e = \frac{d\phi}{dS} = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_\lambda d\lambda < \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = E$  on peut définir

$$\varepsilon = \frac{e}{E} \quad (9.14)$$

Normalement,  $\varepsilon$  est une fonction de T.

c) Le corps gris

Quand  $\varepsilon_\lambda$  est constant quelle que soit  $\lambda$ , on parle d'un corps gris.

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon = \text{constante} \quad (9.15)$$

et, dans ce cas

$$e = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_\lambda d\lambda = \varepsilon \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \varepsilon E$$

L'émittance du corps gris est donc

$$e = \varepsilon \sigma T^4 \quad [W / m^2] \quad (9.16)$$

d) La loi de Kirchhoff

Cette loi établit un rapport entre le coefficient d'absorption  $\alpha$  et le coefficient d'émission  $\varepsilon$  d'une même surface.

Soit une surface grise  $dS$  à la température T. Cette surface reçoit un flux  $d\phi$  dont elle absorbe  $\alpha \cdot d\phi$ . Simultanément elle émet un flux  $d\phi' = e \cdot dS$ . A l'équilibre le bilan est nul :

$$\alpha d\phi' - \varepsilon \sigma T^4 dS = 0 \quad (9.17)$$

Si  $d\phi$  provient d'une source noire à la même température, les conditions d'équilibre sont satisfaites (échange de chaleur nul) :  $d\phi' = \sigma T^4 dS$ , donc

$$\alpha \sigma T^4 dS - \varepsilon \sigma T^4 dS = 0 \quad (9.18)$$

et  $\alpha = \varepsilon$  pour les corps gris.

Cette loi signifie que quand un corps gris absorbe 30% de l'énergie qu'il reçoit, simultanément il émet 30% de l'énergie qui aurait été émise par un corps noir à la même température.

Pour les corps non gris, on obtient avec le même genre d'analyse :

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \quad (9.19)$$

et, pour des corps noirs

$$\alpha = \varepsilon = 1 \quad (9.20)$$

e) Facteur d'émission et d'absorption de corps opaques usuels.

– Corps non métallique.

L'hypothèse du corps gris est excellente.

Pour des réfractaires, on prendra  $\varepsilon = 0.8$ . Pour une plus grande précision, il faut consulter des ouvrages spécialisés. Pour des peinture réfléchissantes, par exemple, on pourra trouver  $\varepsilon = 0.3$ . Pour le graphite  $\varepsilon \approx 1$ .

Bien entendu, le facteur d'absorption  $\alpha$  est égal à  $\varepsilon$ .

- Métaux

En toute rigueur, ces corps ne sont pas assimilables à des corps gris car

- $\varepsilon$  varie fortement avec  $\lambda$ ,
- $\varepsilon$  dépend de la température
- $\alpha$  peut varier avec l'angle de rayonnement incident (métaux polis : réflexion spéculaire)
- $\varepsilon$  et  $\alpha$  varient avec l'état de surface (oxydation, rugosités, etc.)

Quelques exemples de valeurs de  $\varepsilon$  :

Fer poli :	0.15 (20°C) à 0.35 (900°C)
Fonte oxydée :	0.65 (20°C) à 0.85 (900°C)
Aluminium poli :	0.05
Aluminium très oxydé :	0.015

Pour les valeurs de  $\varepsilon_{D\lambda}$  ou  $\varepsilon_\lambda$ , la littérature fournit des courbes très irrégulières et très liées à l'expérimentation. On peut estimer que l'hypothèse  $\varepsilon = \alpha = \text{constante}$  pour chaque surface métallique représente une valeur moyenne acceptable.

## 9.2 Rayonnement de corps partiellement transparents

Pour ce genre de corps, on doit introduire la transmission  $\tau$ , le bilan devient

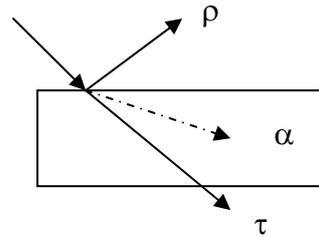
$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (9.21)$$

Quand un rayonnement  $\phi_0$  pénètre dans un milieu semi-transparent, il s'éteint progressivement par absorption, entre  $x$  et  $x + dx$  il aura perdu un certain pourcentage de sa valeur en  $x$ . Si ce pourcentage est proportionnel à  $dx$ , on aura :

$$\frac{d\phi}{\phi(x)} = -Kdx$$

et après intégration

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-Kx} \quad (\text{loi de Beer}) \quad (9.22)$$



En fait, le problème peut se décomposer en une somme  $\Sigma \phi_\lambda(x)$  avec un coefficient  $K_\lambda$  pour chaque longueur d'onde :

$$\phi_\lambda(x) = \phi_{0\lambda} \cdot e^{-K_\lambda x} \quad (9.23)$$

### 9.2.1 Les gaz comme récepteurs de rayonnement

Une couche gazeuse d'épaisseur  $L$  absorbera donc (à ne pas confondre avec  $L$  la luminance):

$$\phi_{abs} = \phi_0 - \phi_L = \phi_0 [1 - e^{-KL}] = \phi_0 \cdot \alpha_L \quad (9.24)$$

$\alpha_L = 1 - e^{-KL}$  est donc le coefficient d'absorption de la couche  $L$ . Le facteur de transmission sera donc :

$$\tau_L = e^{-KL} = 1 - \alpha_L \quad (9.25)$$

### 9.2.2 Les gaz comme émetteurs de rayonnement

L'extension de la loi de Kirchhoff pour les gaz d'épaisseur  $L$  s'écrit

$$\varepsilon_{\lambda L} = \alpha_{\lambda L} = 1 - e^{-K_{\lambda L} L} \quad (9.26)$$

Les gaz ne sont pas des corps gris :  $\varepsilon_L \neq \alpha_L$ . En effet,  $\varepsilon_L$  dépend de la température du gaz, alors que  $\alpha_L$  dépend de la température du rayonnement absorbé.

### 9.2.3 Coefficients d'émission et d'absorption du gaz carbonique et de la vapeur d'eau.

Les gaz  $CO_2$  et  $H_2O$  (vapeur d'eau) sont présents en grandes quantités dans les gaz de combustion. Leur rayonnement est parfois essentiel dans les échanges de chaleur entre les flammes ou les gaz chauds et les charges à réchauffer (à l'inverse, l'air est transparent au rayonnement). Les bandes d'absorption et d'émission principales de ces gaz sont les suivantes :

	$CO_2$	$H_2O$
$\lambda$	2.36 à 3.02	2.24 à 3.25
$[\mu m]$	4.01 à 4.8	4.8 à 8.5
	12.5 à 16.5	12 à 25

Les diagrammes des figures 9.4 et 9.5 donnent  $\varepsilon$  en fonction de  $T_g$  (température du gaz) pour différentes valeurs du produit de la pression partielle  $P_{par}^{(atm)}$  et l'épaisseur  $L$  du gaz. Si la pression totale  $P_t$  est différente de 1 atm on effectuera une correction en multipliant  $\varepsilon$  par un facteur de correction  $C$ .

Les courbes des figures 9.4 et 9.5 peuvent aussi fournir  $\alpha$  pour un rayonnement incident provenant d'une source extérieure à la température de rayonnement  $T_R$  :

- si  $T_g > T_R$ ,  $\alpha = \varepsilon'$  dans les courbes
- si  $T_g < T_R$ , on pose  $(PL)^* = PL \cdot T_R / T_g$  et on lit  $\varepsilon'$  pour le couple  $(P_e L)^*$ ; puis on calcule  $\alpha$  par

$$\alpha = \varepsilon' \cdot (T_g / T_R)^{0.65} \quad (9.27)$$

La même correction que dans le cas de  $\varepsilon$ .

Si on a de la vapeur d'eau, on peut corriger les valeurs en fonction de  $\frac{P_e + P_t}{2}$  ( $P_e$  : pression partielle de vapeur d'eau).

En cas de mélange de  $H_2O$  et de  $CO_2$ , on peut corriger les résultats qui se contentent de faire la somme des valeurs en utilisant la figure 9.6 ( $P_C$  : pression partielle du  $CO_2$ ).

Donc

$$\varepsilon = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon \quad (9.28)$$

$$\alpha = \alpha_{CO_2} + \alpha_{H_2O} - \Delta\alpha \quad (9.29)$$

Certains gaz peuvent véhiculer des particules solides (suies, etc.). Dans ce cas leurs facteurs d'émission et d'absorption sont totalement modifiés. Les valeurs correspondantes ne peuvent être approchées que par l'expérimentation.

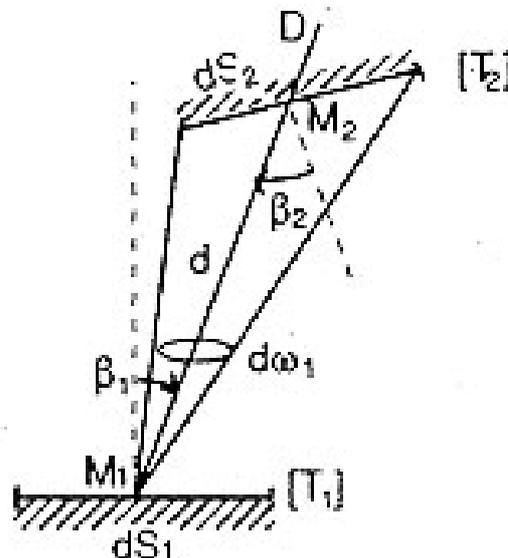




### 9.3 Calcul des échanges de chaleur par rayonnement.

En général, dans un cas réel, plusieurs corps sont placés en interaction mutuelle. Chaque corps émet du rayonnement dans toutes les directions de l'espace et reçoit un rayonnement complexe qui est la résultante des émissions directes des corps qui l'entourent et d'un grand nombre de réflexions. Donc, dans la pratique, le problème est de calculer le résultat net des échanges par rayonnement entre tous les corps présents. Dans la plupart des cas, le calcul exact des échanges est matériellement impossible. On a donc été amené à étudier certains cas simples pour lesquels le calcul des échanges entre les corps est possible. Une première approximation consiste à assimiler tous les corps solides rencontrés à des corps gris : La grande difficulté réside dans la « réduction » d'un cas réel à un cas connu : c'est ce que l'on appelle la modélisation du problème.

#### 9.3.1 Echanges par rayonnement entre deux surfaces noires opaques, séparées par un milieu parfaitement transparent.



**Figure 9.7** Echanges par rayonnement entre deux surfaces.

L'équation 9.5 décrit le flux total  $d^2\phi_1$  émis par un élément de surface  $dS_1$  d'un corps noir dans l'angle solide  $d\omega_1$  (direction D). Soit un deuxième corps noir dont l'élément de surface  $dS_2$  intercepte le rayonnement émis par  $d\omega_1$ . Alors

$$d\omega_1 = \frac{dS_2 \cos \beta_2}{d^2} \quad (d = \overline{M_1 M_2}) \quad (9.30)$$

donc

$$d^2\phi_1 = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{d^2} \quad (9.31)$$

Lorsque le corps numéro 2 est un corps noir, ce flux est totalement absorbé.

Simultanément,  $dS_2$  (à la température  $T_2$ ) émet en direction de  $dS_1$  :

$$d^2\phi_2 = \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \frac{dS_2 \cos \beta_2 dS_1 \cos \beta_1}{d^2} \quad (9.32)$$

qui est aussi totalement absorbé par  $dS_1$

Le bilan de l'échange est

$$d^2\phi_{12} = d^2\phi_1 - d^2\phi_2 \quad (9.33)$$

$$d\phi_{12} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{\pi d^2} \quad (9.34)$$

Le flux total échangé entre  $S_1$  et  $S_2$  sera obtenu par une double intégration de  $d^2\phi_{12}$  :

$$\phi_{12} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \iint_{S_1, S_2} \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{\pi d^2} \quad (9.35)$$

Dans le cas de deux plaques parallèles infinies noires l'équation (9.35) devient :

$$\phi_{12} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) S_1 \quad (S_1 = S_2) \quad (9.36)$$

Par analogie, le flux échangé entre deux surfaces noires s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{12} &= \sigma(T_1^4 - T_2^4) S_1 F_{12} \\ &= \sigma(T_1^4 - T_2^4) S_2 F_{21} \end{aligned}} \quad (9.37)$$

avec

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} = \iint_{S_1, S_2} \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{\pi d^2} \quad (9.38)$$

$F_{12}$  et  $F_{21}$  sont des quantités purement géométriques et sans dimensions :

$F_{12}$  : facteur d'angle sous lequel  $S_1$  voit  $S_2$

$F_{21}$  : facteur d'angle sous lequel  $S_2$  voit  $S_1$

Ainsi, le problème du calcul des échanges se réduit uniquement au calcul de ces facteurs d'angle. Dans la littérature spécialisée, il existe plusieurs exemples pour de calcul de  $F_{12}$ .

### 9.3.2 Echanges par rayonnement entre deux surfaces grises opaques séparées par un milieu parfaitement transparent.

Si  $\phi_1 = \varepsilon_1 \sigma T^4$  est le flux par unité de surface émis par  $S_1$  il sera partiellement absorbé par  $S_2$ , le flux réfléchi étant à son tour partiellement absorbé par  $S_1$  et ainsi de suite (voir figure 9.8).

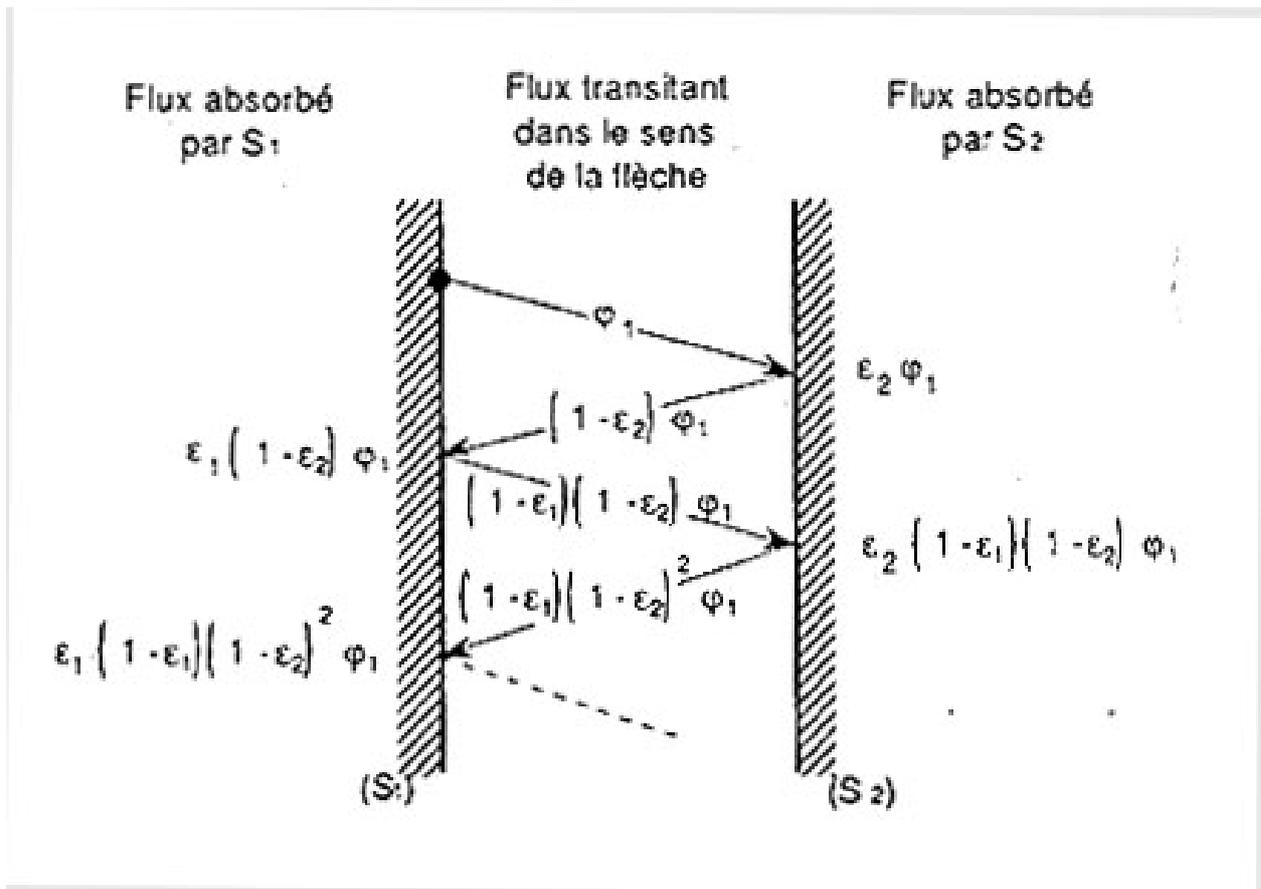
Il faut donc calculer la fraction du flux  $\varphi_1$  absorbé par  $S_1$  :  $G_1 = \Sigma$  colonne gauche

$$G_1 = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)\varphi_1 \left[ 1 + (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) + (1-\varepsilon_1)^2(1-\varepsilon_2)^2 + \dots \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \varphi_1 \quad (9.39)$$

et la fraction de flux  $\varphi_1$  absorbé par  $S_2$  :  $D_1 = \Sigma$  colonne droite :

$$D_1 = \frac{\varepsilon_2}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \varphi_1 \quad (9.40)$$



**Figure 9.8** Echanges par rayonnement entre deux surfaces grises.

Réciproquement, pour le flux  $\varphi_2$ , les quantités  $G_2$  et  $D_2$  sont définies de manière analogue :

$G_2$  = fraction du flux  $\varphi_2$  absorbé par  $S_1$  :

$$G_2 = \frac{\varepsilon_1}{1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \varphi_2 \quad (9.41)$$

Au total  $S_1$  a émis  $\varphi_1$  et absorbé  $G_1 + G_2$ , le flux de chaleur  $\varphi_{12}$  échangé avec  $S_2$  est donc le résultat du bilan :

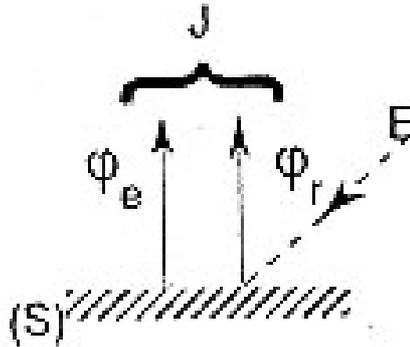
$$\varphi_{12} = \varphi_1 - (G_1 + G_2) \quad (9.42)$$

ou

$$\varphi_{12} = \frac{\phi_{12}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [W / m^2] \quad (9.43)$$

On peut trouver le même résultat avec  $\varphi_{12} = (D_1 + D_2) - \varphi_2$

Il existe aussi une autre méthode de calcul basée sur l'éclairement (cf. §9.1 et voir figure 9.9)



**Figure 9.9**

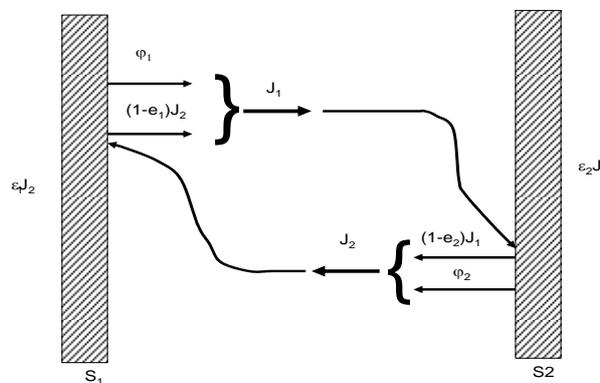
On appelle radiosité  $J$  la somme du flux  $\varphi_e$  émis par la surface  $S$  et de l'ensemble  $\varphi_r$  des flux réfléchis sur la surface  $S$

$$J = \varphi_e + \varphi_r \quad [W / m^2] \quad (9.44)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \varepsilon \sigma T^4 \\ \varphi_r &= (1 - \varepsilon) E \end{aligned} \quad (E : \text{éclairement})$$

La figure 9.10 montre la situation des deux surfaces.



**Figure 9.10**

Pour  $S_1$  on a

$$\varphi_e = \varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \quad (9.45)$$

$$\varphi_r = (1 - \varepsilon_1) J_2 \quad (9.46)$$

$J_2$  constitue l'éclairement de  $S_1$ ,  $J_1$  constitue l'éclairement de  $S_2$ . Donc

$$\begin{aligned} J_1 &= \varphi_1 + J_2(1 - \varepsilon_1) \\ J_2 &= \varphi_2 + J_1(1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (9.47)$$

L'expression finale des éclairements est :

$$J_1 = \frac{\varphi_1 + (1 - \varepsilon_1)\varphi_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{\varphi_2 + (1 - \varepsilon_2)\varphi_1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \quad (9.48)$$

Le flux  $\varphi_{12}$  s'écrit :

$$\boxed{\varphi_{12} = J_1 - J_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4)} \quad (9.49)$$

En particulier, si une des surfaces est noire (par exemple, la surface dans un four,  $\varepsilon_1, T_1$ ) rayonnant dans un grand hôte ( $\varepsilon_2 = 1, T_a$ ), on obtient

$$\varphi_{12} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_a^4) \quad (9.50)$$

## Exemples

- Deux surfaces grises (de dimensions finies) fermant tout l'espace

Remarque:

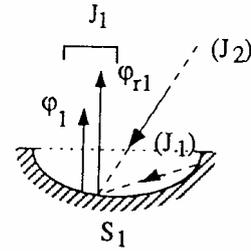
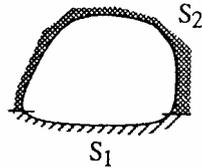
Si les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont vis-à-vis comme sur la figure 9.11 a), il faudrait considérer une surface  $S_3$  fictive, qui formerait avec  $S_1$  et  $S_2$  une enceinte.  $S_3$  contribuerait alors à l'ensemble des échanges de chaleur, comme nous le verrons au paragraphe 9.3.3.

Ce que nous disons ci-dessous ne correspond qu'au cas de la figure 9.11 b), où l'espace est totalement fermé par  $S_1$  et  $S_2$ .



**Figure 9.11**

Reprenons la méthode des radiosités (éclairage) dans ce cas.  
Le calcul s'applique au cas de la figure 9.12



**Figure 9.12**

$J_1$  (radiosité de  $S_1$ ), flux total quittant  $S_1$  se compose du:

- flux  $\varphi_1$  émis par  $S_1$
- flux  $\varphi_{r1}$  réfléchi par  $S_1$  (ce dernier dans le cas où  $S_1$  est concave, provient partiellement de  $S_1$  elle-même et de  $S_2$ ).

Le flux total (en watts) quittant  $S_1$  s'écrit donc:

$$S_1 J_1 = S_1 \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} S_1 J_1 + F_{21} S_2 J_2] \quad \text{et comme} \quad F_{21} S_2 = F_{12} S_1$$

On obtient:  $J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} J_1 + F_{12} J_2]$

de même:  $J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{22} J_2]$  (9.49)

Remarquons que la deuxième équation s'obtient par permutation des indices 1 et 2 de la première.

L'ensemble 9.49 de 2 équations du 1er degré à deux inconnues fournit  $J_1$  et  $J_2$  (expressions assez volumineuses et de peu d'intérêt ici).

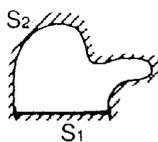
Une fois les radiosités  $J_1$  et  $J_2$  connues, on calcule le flux échangé entre  $S_1$  et  $S_2$  par:

$$\phi_{12} = F_{12} S_1 J_1 - F_{21} S_2 J_2 = F_{12} S_1 (J_1 - J_2) \quad (9.50)$$

On trouve:

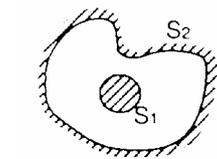
$$\frac{\Phi_{12}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - \left(1 - \varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) (1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{F_{11}}{F_{12}}} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W/m}^2) \quad (9.51)$$

Exemples:



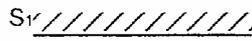
$S_1 = \text{plan}$

$S_2 = \text{cavité de forme quelconque}$



$S_1$  = solide convexe

$S_2$  = solide concave entourant complètement  $S_1$  (ex: deux cylindres, deux sphères, etc...)



Plans parallèles infinis



Tous ces cas particuliers sont du ressort de la formule 9.51 avec  $F_{11} = 0$  et  $F_{12} = 1$ .

Pour les plans infinis on a bien sûr  $S_1/S_2 = 1$ .

Ces derniers calculs sont applicables quels que soient  $S_1$  et  $S_2$  pourvu que  $S_2$  ferme totalement l'espace vu par  $S_1$  et que  $S_1$  soit convexe.

On notera que si la surface extérieure  $S_2$  est noire ( $\epsilon_2 = 1$ ) ou très grande ( $S_1/S_2 \rightarrow 0$ ), l'expression (9.51) se réduit à:

$$\phi_{12} = \epsilon_1 S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W}) \quad (9.52)$$

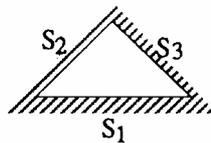
Cela revient à dire que si un petit corps est placé dans une grande enceinte, cette dernière se comporte comme une surface noire.

### 9.3.3 Echanges par rayonnement entre une surface grise et plusieurs surfaces grises opaques formant une enceinte fermée.

C'est l'extension du cas précédant au cas où la surface  $S_1$  est soumise au rayonnement de plusieurs surfaces différentes (p.ex. le sol d'un four avec les différentes parois).

- *Trois surfaces planes*

Pour simplifier, traitons d'abord le cas d'une enceinte triangulaire (fig. 9.13).



**Figure 9.13** Enceinte triangulaire

L'extension des formules des paragraphe 9.3.2 est immédiate:

$$\begin{aligned} J_1 &= \phi_1 + (1 - \epsilon_1) [F_{12} J_2 + F_{13} J_3] \\ J_2 &= \phi_2 + (1 - \epsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{23} J_3] \\ J_3 &= \phi_3 + (1 - \epsilon_3) [F_{31} J_1 + F_{32} J_2] \end{aligned} \quad (9.53)$$

On obtient un système de 3 équations à trois inconnues qui fournit  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

Les flux échangés par  $S_1$  se calculent alors par:

$$\begin{aligned}\phi_{12} &= F_{12} S_1 (J_1 - J_2) \\ \phi_{13} &= F_{13} S_1 (J_1 - J_3) \\ \phi_{1,23} &= S_1 (J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3) = \phi_{12} + \phi_{13}\end{aligned}\quad (9.54)$$

Les autres s'obtiennent, par permutation des indices.

*-Trois surfaces concaves*

On écrira:

$$J_1 = \phi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3] \quad (9.55)$$

etc...

et on développera des calculs semblables à 9.54.

*-n surfaces concaves:*

C'est le cas le plus général

$$J_i = \phi_i + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (\text{pour } i = 1 \text{ à } n) \text{ ce qui donne } n \text{ équations à } n \text{ inconnues, et}$$

$$\Phi_{ij} = F_{ij} S_i (J_i - J_j) \quad (9.56)$$

### 9.3.3.1 Quelques exemples:

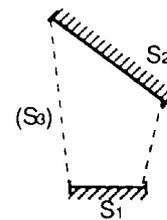
a) Deux surfaces plans en vis à vis dans le vide. (fig.9.14).

$S_3$  représente ici le vide, caractérisé par:

$$T_3 = 0 \text{ (degré K)}$$

$$\varepsilon_3 = 1 \text{ (corps noir)}$$

$$\text{De plus, } F_{11} = F_{22} = 0$$



**Figure 9.14**

Calcul des radiosités:

$$\begin{aligned}J_1 &= \phi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{12} J_2 + F_{13} J_3] \\ J_2 &= \phi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{23} J_3] \\ J_3 &= \phi_3 + (1 - \varepsilon_3) [F_{31} J_1 + F_{32} J_2] = 0\end{aligned}$$

$$\text{soit, ici } J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) F_{12} J_2 \quad \text{et} \quad J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) F_{21} J_1$$

$$\text{d'où } J_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) F_{12} \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) F_{21} \varepsilon_1 \sigma T_1^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}} \quad (9.57)$$

Calcul des flux:

$$\Phi_{12} = F_{12} S_1 (J_1 - J_2)$$

$$\Phi_{12} = F_{12} S_1 \frac{[1 - (1 - \varepsilon_2) F_{21}] \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - [1 - (1 - \varepsilon_1) F_{12}] \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}} \quad (9.58)$$

$$\text{et } \Phi_{1,23} = S_1 (J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3)$$

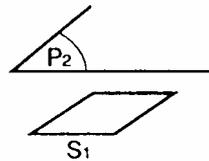
etc...

On remarque que si  $T_1 = T_2$ , on obtient  $\phi_{12} \neq 0$ , ce qui peut surprendre et paraître contraire au « deuxième principe ». Ce résultat est cependant exact.  $\phi_{12}$  serait égal à zéro si  $T_1 = T_2 = T_3$ .

En revanche, si  $T_1 = T_2$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  et  $F_{12} = F_{21}$ , le problème devient symétrique (deux plaques identiques vis à vis) et  $\phi_{12} = 0$ .

Exemple:

$P_2 = \text{plan infini}$   
 $S_1 = \text{surface finie}$   
 $F_{12} = 1 \quad F_{21} = S_1/S_2 \rightarrow 0$



Le calcul des radiosités se réduit à:

$$J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) J_2$$

$$J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$$

$$\text{et } \phi_{12} = S_1 (J_1 - J_2) = \varepsilon_1 S_1 \sigma (T_1^4 - \varepsilon_2 T_2^4).$$

b) Deux surfaces planes en vis à vis dans une pièce à la température ambiante.

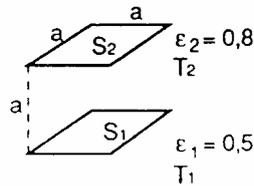
C'est le même jeu d'équations que dans l'exemple a), mais avec:

$$T_3 \approx 300 \text{ K}$$

$$\varepsilon_3 = 1$$

Ici,  $J_3 \neq 0$  et le calcul des radiosités fait intervenir les trois équations (9.53)

c) Deux faces d'un cube rayonnant entre elles dans le vide, les autres faces étant absentes (fig 9.15).



**Figure 9.15** Deux faces d'un cube

L'application de la formule 11 de l'annexe "facteur d'angle":

$$F_{12} = \frac{2}{\pi} \left[ 2\sqrt{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2 \operatorname{Arctg}\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{4}{3}\right) \right] \approx 0.2 = F_{21}$$

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - 0.5) \times 0.2 J_2 = \varphi_1 + 0.1 J_2$$

$$J_2 = \varphi_2 + (1 - 0.8) \times 0.2 J_1 = \varphi_2 + 0.04 J_1$$

avec  $\varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$  et  $\varphi_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$

Soit  $J_1 = \frac{\varphi_1 + 0.1\varphi_2}{0.996}$  et  $J_2 = \frac{\varphi_2 + 0.04\varphi_1}{0.996}$  (9.59)

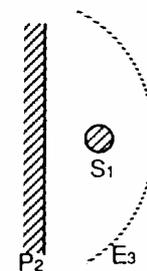
d'où  $\phi_{12} = F_{12} S_1 [J_1 - J_2]$  (9.60)

et  $\frac{\Phi_{12}}{a^2} = 0.2 \frac{0.96\varphi_1 - 0.9\varphi_2}{0.996} = \frac{0.096\sigma T_1^4 - 0.144\sigma T_2^4}{0.996}$  [W/m<sup>2</sup>]

d) Un thermocouple devant une paroi infinie (fig. 9.16)

Le thermocouple est représenté par la sphère  $S_1$  ( $\varepsilon_1, T_1$ ).  
Le plan  $P_2$  ( $\varepsilon_2, T_2$ ) occupe la moitié de l'espace visible par la surface  $S_1$ . Donc:  $F_{12} = 1/2$  et  $F_{21} = 0$ .

Mais  $S_1$  échange aussi avec l'espace  $E_3$  ( $T_3 = 0, \varepsilon_3 = 1$ )  
d'où provient le flux  $\varphi_3 = 0$  (si on est dans le vide).  
D'où:  $F_{13} = 1/2$  et  $J_3 = 0$ .



**Figure 9.16**

Les équations de radiosités deviennent:

$$J_1 = \varphi_1 (1 - \varepsilon_1) + 1/2 J_2$$

$$J_2 = \varphi_2$$

d'où:  $J_1 = \varphi_1 + \frac{(1-\varepsilon_1)}{2} \varphi_2$

et  $\Phi_{12} = \frac{1}{2} S_1 (J_1 - J_2) = \frac{1}{2} S_1 \left[ \varphi_1 - \frac{1+\varepsilon_1}{2} \varphi_2 \right]$

$$\Phi_{13} = \frac{1}{2} S_1 (J_1 - J_3) = \frac{1}{2} S_1 \left[ \varphi_1 + \frac{1-\varepsilon_1}{2} \varphi_2 \right]$$

La température d'équilibre du thermocouple sera telle que le flux total échangé  $\phi_{12} + \phi_{13}$  soit nul, ce qui donne:

$$2 \varphi_1 - \varepsilon_1 \varphi_2 = 0 \quad (9.61)$$

et  $T_1^4 = \frac{\varepsilon_2}{2} T_2^4 \quad (9.62)$

Cette température lue dépend bien sûr de  $\varepsilon_2$ , mais pas de l'émissivité  $\varepsilon_1$  du thermocouple.

Si  $\varepsilon_2 = 1$ , cela donne:  $T_1^4 = T_2^4/2$

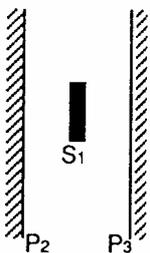
Notons que si le thermocouple avait été représenté par une petite surface  $S_1$ , parallèle à  $P_2$ , le résultat aurait été strictement identique (de même que pour  $S_1$  quelconque).

Ce calcul explique pourquoi la lecture d'un thermocouple « posé » sur une surface est fautive.

e) Un thermocouple entre deux plans (fig. 9.17)

Représentons le thermocouple par une petite surface  $S_1$  irradiée d'un côté ( $S_1/2$ ) par  $P_2$  et de l'autre ( $S_1/2$ ) par  $P_3$ .

On a:  $F_{12} = F_{13} = 1/2$   
 $F_{23} = F_{32} = 1$   
 $F_{21} = F_{31} = 0$



**Figure 9.17**

$$J_1 = \varphi_1 + \frac{(1-\varepsilon_1)}{2}(J_2 + J_3)$$

$$J_2 = \varphi_2 + (1-\varepsilon_2)J_3$$

$$J_3 = \varphi_3 + (1-\varepsilon_3)J_2$$

et  $\Phi_{1,23} = S_1 \left[ J_1 - \frac{(J_2 + J_3)}{2} \right] = 0$  à l'équilibre,

d'où  $J_1 = \frac{J_2 + J_3}{2}$  ce qui peut paraître évident;

donc  $\varphi_1 + \frac{1-\varepsilon_1}{2}(J_2 + J_3) = \frac{1}{2}(J_2 + J_3)$

ou  $\varphi_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}(J_2 + J_3)$

et avec  $J_2 = \frac{\varphi_2 + (1-\varepsilon_2)\varphi_3}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$  et  $J_3 = \frac{\varphi_3 + (1-\varepsilon_3)\varphi_2}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$

on trouve  $\varphi_1 = \varepsilon_1 \frac{\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{1}{2}(\varepsilon_2\varphi_3 + \varepsilon_3\varphi_2)}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$

En remplaçant  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  par leurs valeurs,  $\varphi_1 = \varepsilon_1\sigma T_1^4$ ,  $\varphi_2 = \varepsilon_2\sigma T_2^4$ ,  $\varphi_3 = \varepsilon_3\sigma T_3^4$ , on arrive à:

$$T_1^4 = \frac{\varepsilon_2 T_2^4 + \varepsilon_3 T_3^4 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2}(T_2^4 + T_3^4)}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)} \quad (9.63)$$

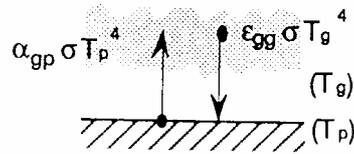
C'est la température d'équilibre du thermocouple. Si les deux plans sont à la même température ( $T_2 = T_3$ ), on obtient  $T_1 = T_2 = T_3$  quels que soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

On comprend qu'un tel calcul peut être facilement étendu au cas d'une enceinte parallélépipède (6 faces différentes).

### 9.3.4 Echanges par rayonnement entre deux surfaces grises opaques séparées par un milieu semi-transparent.

Cet exemple est de grande importance pratique puisque c'est le cas de l'échange entre un gaz rayonnant chauds et les parois du four qui le contient. C'est aussi malheureusement un des plus difficiles et nous nous bornerons à quelques exemples de résultats à titre indicatif.

- Echange entre une paroi et un gaz (fig. 9.18)



**Figure 9.18** Echange entre une paroi et un gaz

1) Paroi noire:

On écrit que le flux émis par le gaz ( $\epsilon_{gg}$  calculé à la température  $T_g$ ) moins le flux absorbé par le gaz ( $\alpha_{gp}$  calculé à la température  $T_p$ ) est égal au flux échangé avec la paroi:

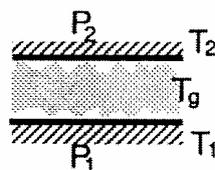
$$\varphi_{gp} = \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 - \alpha_{gp} T_p^4] \quad [\text{W/m}^2] \quad (9.64)$$

Pour le calcul de  $\epsilon_{gg}$  et  $\alpha_{gp}$ , se reporter au paragraphe 3

2) Paroi grise ( $\epsilon_p$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_{gp} &= [1 - \alpha_{gg} (1 - \epsilon_p)] \epsilon_{gg} \sigma T_g^4 - \alpha_{gp} \epsilon_p \sigma T_p^4 \\ \varphi_{pg} &= \epsilon_p \sigma [T_p^4 - \epsilon_{gg} T_g^4] \end{aligned} \quad (9.65)$$

- Echange entre deux parois parallèles infinies séparées par un gaz (fig. 9.19)



**Figure 9.19** Parois parallèles séparées par un gaz

Quelques formules sont calculables dans les cas les plus simples:

[ $\alpha_{gi}$  calculé à la température  $T_i$ ]

1) Deux parois noires:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 + (1 - \alpha_{g2}) T_2^4 - T_1^4] && \text{reçu par } P_1 \\ \varphi_2 &= \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 + (1 - \alpha_{g1}) T_1^4 - T_2^4] && \text{reçu par } P_2 \\ \varphi_3 &= \sigma [2 \epsilon_{gg} T_g^4 - \alpha_{g1} T_1^4 - \alpha_{g2} T_2^4] && \text{cédé par le gaz.} \end{aligned} \quad [\text{W/m}^2] \quad (9.66)$$

On a bien:  $\varphi_g = \varphi_1 + \varphi_2$ .

2) Deux parois grises et gaz gris: (On suppose  $\alpha_g = \varepsilon_g$ )

Si on pose:

$E_1$  = flux total arrivant sur  $P_1$  (éclairage), par unité de surface  
 $J_1$  = flux total quittant  $P_1$  (radiosité)  
 $E_2$  = flux total arrivant sur  $P_2$   
 $J_2$  = flux total quittant  $P_2$

On a:

$$\begin{aligned} E_1 &= (1-\varepsilon_g) J_2 + \varepsilon_g \sigma T_g^4 \\ J_1 &= (1-\varepsilon_1) E_1 + \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ E_2 &= (1-\varepsilon_g) J_1 + \varepsilon_g \sigma T_g^4 \\ J_2 &= (1-\varepsilon_2) E_2 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \end{aligned} \quad [\text{W/m}^2] \quad (9.67)$$

Le flux échangé par  $P_1$  avec  $P_2$  et avec le gaz est:  $\varphi_1 = J_1 - E_1$ .

On trouve, en séparant la contribution de  $T_2$  et celle de  $T_g$ :

$$\varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma \frac{\varepsilon_2 (1-\varepsilon_g)(T_1^4 - T_2^4) + \varepsilon_g [1 + (1-\varepsilon_g)(1-\varepsilon_2)](T_1^4 - T_g^4)}{1 - (1-\varepsilon_g)^2 (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \quad (9.68)$$

• Pour  $T_g = T_1 = T_2$ , on retrouve  $\varphi_1 = 0$

• Pour  $T_g = T_2$ , on a  $\varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma \frac{[1 - (1-\varepsilon_g)^2 (1-\varepsilon_2)](T_1^4 - T_2^4)}{1 - (1-\varepsilon_g)^2 (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$

et si  $\varepsilon_1 = 1$ , on retrouve  $\varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$  (Flux échangé entre un corps gris et un corps noir).

• Pour obtenir  $\varphi_2$ , il suffit d'invertir les indices 1 et 2. On constate que  $\varphi_2 \neq -\varphi_1$ .

• Le flux échangé par le gaz avec  $P_1$  et  $P_2$  est  $\varphi_g = \varphi_1 + \varphi_2$ :

$$\varphi_g = \varepsilon_g \sigma \frac{\varepsilon_1 [1 + (1-\varepsilon_g)(1-\varepsilon_2)](T_1^4 - T_g^4) + \varepsilon_2 [1 + (1-\varepsilon_g)(1-\varepsilon_1)](T_2^4 - T_g^4)}{1 - (1-\varepsilon_g)^2 (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$$