# Codage

**Durée 1H20**

1- Un canal BSC (Binary Symetric Channel) qui est le modèle d'un canal à bruit gaussien additif, est caractérisé par sa probabilité d'erreur : $p_b = P(0 \to 1) = P(1 \to 0)$. Pensez-vous que c'est une bonne idée d'envoyer 3 bits au lieu d'un bit pour améliorer le taux d'erreur binaire ? développez. (ceci correspond à un codage à répétition 0→ 000 et 1→ 111. (2 points)

2- Qu'est-ce qu'un code linéaire ?
Soit le code en bloc $C$ défini par sa matrice génératrice $G$ tel que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m}G$. Montrer que $C$ est un code linéaire. (2 points)

3- Qu'est-ce qu'un code systématique ? (2 points)

4- Pour un code en bloc avec la matrice génératrice : (3 points)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Donner la matrice de « partiy check » $H$.
b. Le récepteur reçoit la séquence [1 1 0 0 1 0 1]. Est-ce un mot valide du code ?

5- Dans un code en bloc linéaire (7,4), il existe 16 mots de code. La distribution des poids est : $A_0 = 1,\ A_1 = A_2 = 0,\ A_3 = 7,\ A_4 = 7,\ A_5 = A_6 = 0,\ A_7 = 1$ (5 points)

a. Quelle est la distance minimale du code ?
b. Combien d'erreurs sont corrigées ?
c. Combien d'erreurs sont détectées ?
d. Sur un canal BSC avec une probabilité d'erreur 0.1, quel est la probabilité d'avoir « l'erreur pattern » 0001100 ?
e. Quelle est la probabilité d'avoir deux erreurs ?
f. Dans quel cas un "erreur pattern" n'est pas détecté (et la séquence reçue est considérée comme un mot valide du code)?
g. Quelle est la probabilité qu'une séquence reçue erronée est considérée correcte ?

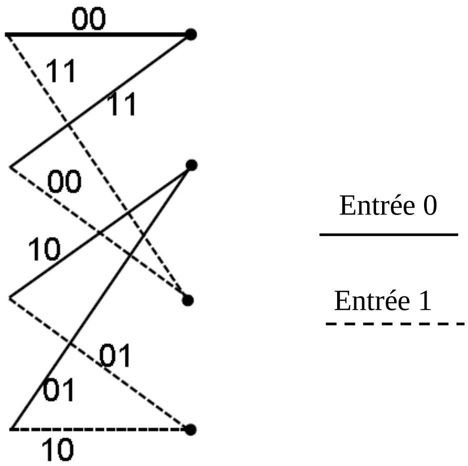
6- Nous disposons d'un code cyclique (7,4) avec le polynôme générateur $x^3 + x + 1$. (4 points)

a. Quel est le mot de code correspondant à [1 1 0 0] ? ($m(x) = 1 + x$)

b. On reçoit la séquence [1 1 0 0 0 1 1]. Est-ce qu'il y avait une erreur de transmission ?

c. Tracer le circuit du codeur.

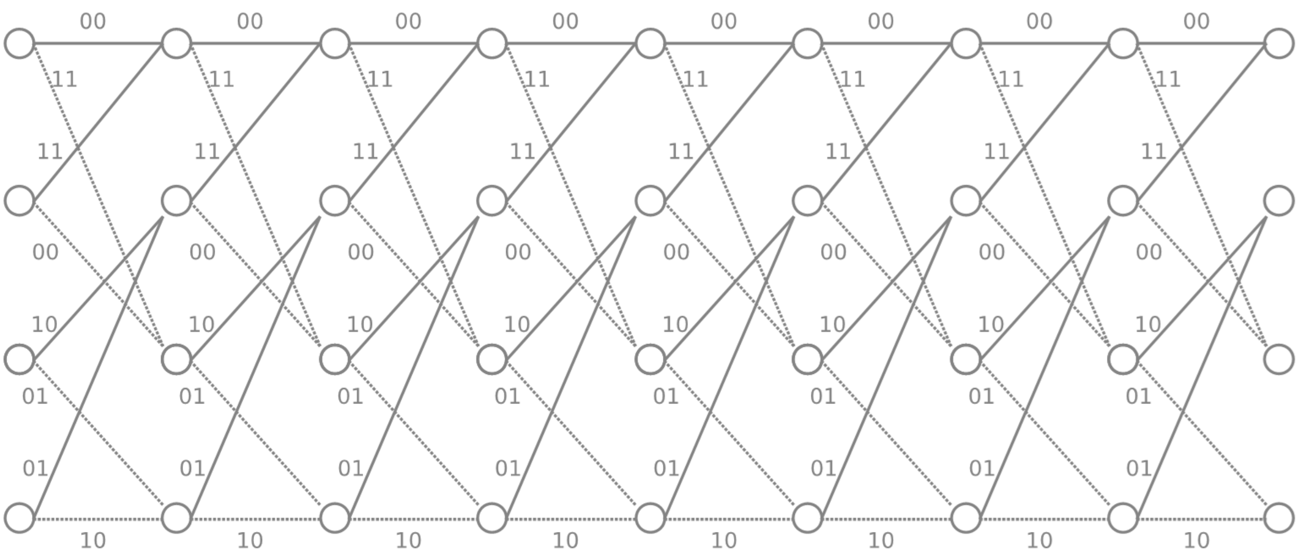
7- Le diagramme en treillis d'un code convolutif est donné ci-dessous (4 points)




Quelle est la longueur de contraint du code ? pourquoi ?

Quel est le code correspondant à la séquence d'information [1 1 0 0 1 0] ?

Nous avons reçu la séquence [1110100101]. Quelle est la séquence d'information émise la plus vraisemblable ? (utilisez le canevas ci-dessous)



Corrigé

1- Il faut savoir qu'en envoyant 3 bits au lieu de 1 bit, on consomme trois fois plus d'énergie par bit d'information. Pour être juste, il faudra envoyer avec moins de puissance pour pouvoir comparer. C'est à dire que la puissance par bit codé est divisée par 3, ce qui vaut dire que la constellation sera $\{-\frac{A}{\sqrt{3}}, \frac{A}{\sqrt{3}}\}$ au lieu de $\{-A, A\}$. Dans ces conditions, il y aura plus d'erreur sur les bits codés, c'est-à-dire que le $p_b$ augmente. Sur ce nouveau canal BSC, il faudra que le TEB soit mieux qu'avant. Les calculs montrent que ce n'est pas le cas et il vaut mieux envoyer avec la puissance initiale et sans codage.

2- Pour un code linéaire :
Si $c_1, c_2 \in C$ alore $c_1 + c_2 \in C$. C'est-à-dire que la somme de deux mots de code est un mot de code.

$$c_1 = m_1G, c_2 = m_2G, c_1 + c_2 = m_1G + m_2G = (m_1 + m_2)G = mG = c \in C$$

3- Dans un code systématique, la séquence du message $m$ se trouve exactement dans la séquence codée (mot du code). Ainsi poiur retrouver le message à partir du mot de code, il suffit de supprimer les bits parités. Dans un code en bloc, une façon de générer un code systématique est d'avoir une matrice génératrice sous la forme :

$$G = [I \mid P], \quad ou \quad G = [P \ \mid I]$$

# corrigé

4: $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{K \times n}$ $K = 4$ $n = 7$

a) $G = [P|I]$ $H = [I|P^T]$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $C = [1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]$

si $CH^T = 0$, c est un mot valide

$CH^T = [0\ 0\ 0]$ pas d'erreur $\Rightarrow$ c'est un mot du code.

5 a- $d_{min} = 3$ car par définition $A_i$ est le nombre des mots au poids i. il n'y a donc pas de mot au poids 1 et 2. donc le poids minimal des mots de code est 3 $\Rightarrow d_{min} = 3$

(mise à part la séquence toute zéro)

b- $t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$ une erreur est corrigée.

c- $d_{min} = 3 \Rightarrow$ 2 erreurs sont corrigées.

d. $P(e=[0001100]) = P(e)^2 \cdot (1-P_e)^5$

$= 0.1^2 \cdot 0.9^5 = 0.0059$

e- $P(\text{poids de } \underline{e} = 2) = P(2 \text{ erreurs})$

$= \binom{7}{2} P_e^2 (1-P_e)^5 = \frac{7!}{2!\,5!} (0.1)^2 (0.9)^5 = 0.124$

f- quand l'erreur pattern est lui même un mot de code. $r = c + e$ si $e = c'$

$r = c + c' \in \mathbb{C}$

g- $P(\underline{e} \in \mathbb{C}) = A_3 (0.1)^3 (0.9)^4 +$
$+ A_4 (0.1)^4 (0.9)^3$
$+ A_7 (0.1)^7 (0.9)^0 = 0.0051$

6 a version non systématique:

$c(x) = m(x)\, g(x) = (1+x)(1+x+x^3)$

$= 1 + \cancel{x} + x^3 + \cancel{x} + x^2 + x^4$

$= 1 + x^2 + x^3 + x^4 \Rightarrow [1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$

version systématique: $k=4$ $n=7$

$$\begin{array}{l|l} x^{n-k} \cdot m(x) & g(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

$$c(x) = r(x) + m(x)\,x^{n-k}$$

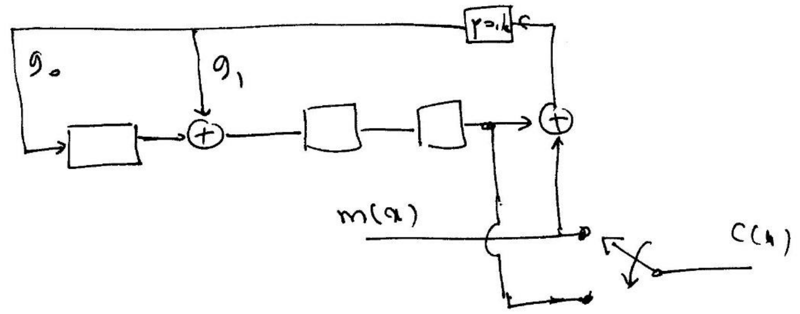
$$x^{7-4}\, m(x) = x^3 (1+x) = x + x$$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 & x^3 + x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + x & x + 1 \\ \hline x^2 + 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow c(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$$

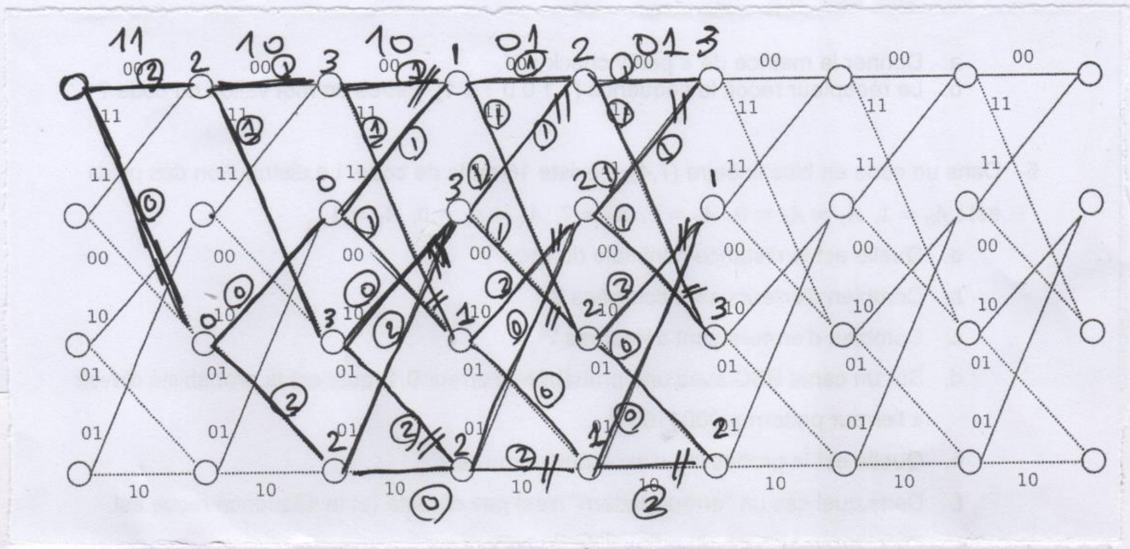
$$\Leftrightarrow [1\ 0\ 1\ \underbrace{1\ 1\ 0\ 0}_{\text{partie systèm.}}]$$

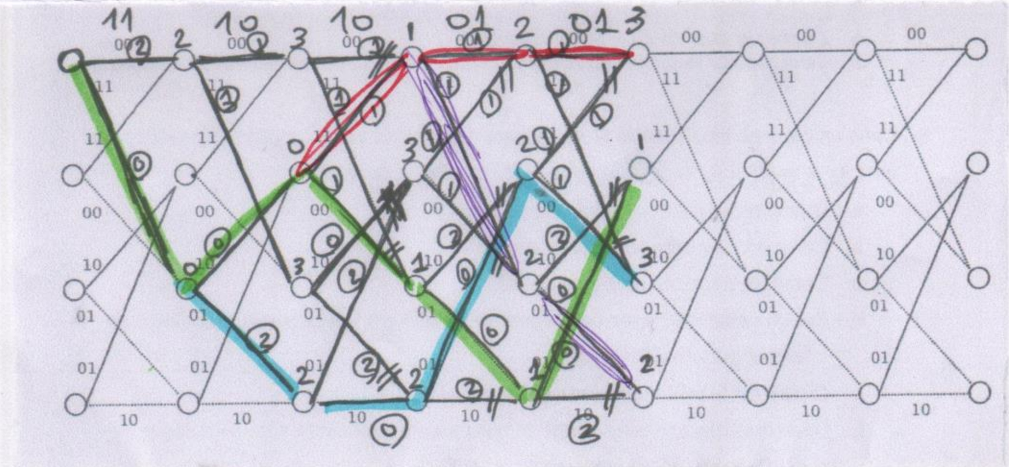
C —




(7) a) il y a 4 états, donc deux registre $\Rightarrow$ LC = 3

b) [1 1 0 0 1 0] en suivant le treillis du code, c = [11 01 01 11 11 10]





A la fin, il reste 4 chemins survivant avec les metriques cumulées 3, 1, 3 et 2. En faisant le "trace back" ces chemins convergent vers un seul chemin. la metrique minimale étant le 1, c'est le chemin vert qui est le plus vraisemblable. la séquence décodée sera donc : 1 0 1 1 0

Si on recode cette sequence on obtiendra :

[ 11 10 00 01 01 ] ⇒ une erreur a été corrigée