Théorie et codage de l'information

Les codes linéaires

- Chapitre 6 -

Principe

Définition d'un code linéaire

Soient p un nombre premier et s est un entier positif. Il existe un unique corps de taille $q = p^s$, noté $\mathbf{F}_q$. L'ensemble $(\mathbf{F}_q)^n$ de tous les n-uples formés d'éléments de $\mathbf{F}_q$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_q$.

Définition 1. *$\mathcal{L}$ est un* **code linéaire** *si $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbf{F}_q)^n$. On dit que $\mathcal{L}$ est un $[n, k]$-code si $\dim(\mathcal{L}) = k$. Si la distance minimale de $\mathcal{L}$ est d, on parle de $[n, k, d]$-code.*

$\triangleright$ Attention aux notations "(.)-code" et "[.]-code" !

Principe

Poids d'un code linéaire

Définition 2. *Le* **poids** $\omega(x)$ *du mot* x *de* $(\mathbf{F}_q)^n$ *est le nombre de composantes non nulles de* x*.*

Le **poids minimal** $\omega(\mathcal{L})$ *du code* $\mathcal{L}$ *est le minimum des poids de tous les vecteurs non nuls de* $\mathcal{L}$*.*

Exemple

$\omega(1101) = 3$

$\mathcal{L} = \{00000, 10111, 11010, 01101\} \quad \longrightarrow \quad \omega(\mathcal{L}) = 3$

Principe

Poids d'un code linéaire

Définition 3. *Si x et y sont deux mots binaires, on appelle intersection de x et y, notée $x \cap y$, l'élément défini par $(x \cap y)(i) = 1$ si $x(i) = y(i) = 1$, et 0 sinon.*

En considérant les définitions ci-dessus, on peut démontrer les relations suivantes :

$$\forall x, y \in (\mathbf{F}_q)^n, d_{Ham}(x, y) = \omega(x - y),$$
$$\forall x, y \in (\mathbf{F}_2)^n, d_{Ham}(x, y) = \omega(x) + \omega(y) - 2\omega(x \cap y).$$

Théorème 1. *Soit $\mathcal{L}$ un code linéaire. On a : $d(\mathcal{L}) = \omega(\mathcal{L})$.*

Principe

Codes détecteurs et correcteurs linéaires

En utilisant ce qui a été vu au cours précédent, on a immédiatement que :

Théorème 2. *En utilisant la règle de décodage par distance minimale, un code linéaire peut détecter jusqu'à t erreurs, avec $t = \omega(\mathcal{L}) - 1$.*

De plus, il en corrige jusqu'à t', avec $\omega(\mathcal{L}) = 2t' + 1$ ou $2t' + 2$.

Exemple

$\mathcal{L} = \{00000, 10111, 11010, 01101\}$ est 2-détecteur et 1-correcteur.

Matrice génératrice

Définition

Définition 4. *Soit $\mathcal{L}$ un $[n,k]$-code. Une matrice* $\mathbf{G}$ *de dimension $(k \times n)$ dont les lignes forment une base de $\mathcal{L}$ est une* **matrice génératrice** *de $\mathcal{L}$. On a alors :*

$$\mathcal{L} = \{x\mathbf{G} \mid x \in (\mathbf{F}_q)^k\}.$$

Exemple

La matrice génératrice suivante permet d'encoder les mots de $(\mathbf{F}_2)^3$.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice génératrice

Forme systématique

Définition 5. *Un $[n, k]$-code $\mathcal{L}$ est dit sous* **forme systématique** *s'il existe k positions $i_1, \ldots, i_k$ telles que, par restriction des mots du code à ces k positions, on obtient les q^k mots q-aires possibles de longueur k.*

Exemple

Le code $\mathcal{C} = \{0000, 0110, 1001, 1010\}$ est systématique sur les positions 1 et 3 :

$$\begin{aligned} 00 &\longrightarrow \underline{0}0\underline{0}0 \\ 01 &\longrightarrow \underline{0}1\underline{1}0 \\ 10 &\longrightarrow \underline{1}0\underline{0}1 \\ 11 &\longrightarrow \underline{1}0\underline{1}0 \end{aligned}$$

Matrice génératrice

Forme standard

Théorème 3. *Tout $[n, k]$-code linéaire a une matrice génératrice de la forme* $\mathbf{G} = (\mathbf{I}_k \mid \mathbf{A})$, *dite* **standard**, *où* $\mathbf{I}_k$ *désigne la matrice unité de dimension* k.

Exemple

La matrice génératrice suivante est sous forme standard.

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dual d'un code linéaire

Définition

Définition 6. *Soit $\mathcal{L}$ un $[n,k]$-code.*

$$\mathcal{L}^{\perp} = \{x \in (\mathbf{F}_q)^n \mid x.c = 0, \forall c \in \mathcal{L}\}$$

est appelé **code dual** *de $\mathcal{L}$.*

Théorème 4. *Soit $\mathcal{L}$ un $[n,k]$-code linéaire et $\mathcal{L}^{\perp}$ son dual. On a :*

1. $\mathcal{L}^{\perp} = \{x \in (\mathbf{F}_q)^n \mid x\mathbf{G}^{\top} = 0\}$ *où* $\mathbf{G}$ *est génératrice de* $\mathcal{L}$ *;*
2. $\mathcal{L}^{\perp}$ *est un* $[n, n-k]$*-code linéaire ;*
3. $\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$.

Dual d'un code linéaire

Matrice de test

Soit $\mathcal{L}$ un code linéaire de matrice génératrice $\mathbf{G} = (\mathbf{I}_k \mid \mathbf{A})$ de dimension $(k \times n)$. On pose $\mathbf{H} = (-\mathbf{A}^\top \mid \mathbf{I}_{n-k})$.

Définition 7. *La matrice* $\mathbf{H}$ *est dite* **matrice de contrôle** *ou* **matrice de test** *du code linéaire* $\mathcal{L}$.

On montre aisément que $\mathbf{H}$ est une matrice génératrice de $\mathcal{L}^\perp$. Cette matrice sera utilisée par la suite pour le décodage.

Théorème 5. *Soit* $\mathcal{L}$ *un code linéaire ayant* $\mathbf{H}$ *comme matrice de contrôle. Il existe un mot de poids* ω *si, et seulement si, il existe* ω *colonnes de* $\mathbf{H}$ *linéairement dépendantes.*

Exemple

Matrice génératrice

On construit un $[6, 3]$-code linéaire binaire en choisissant trois vecteurs linéairement indépendants de $(\mathbf{F}_2)^6$.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient l'ensemble des mots du code $\mathcal{L}$ en calculant tous les produits $x\mathbf{G}$ avec $x \in (\mathbf{F}_2)^3$.

Exemple

Mots du code

Les mots du code $\mathcal{L}$ ainsi que leur poids sont donnés par :

x	$\mathcal{L}$	ω
000	000000	0
001	110110	4
010	011101	4
011	101011	4
100	100101	3
101	010011	3
110	111000	3
111	001110	3

$\longrightarrow \mathcal{L}$ est 2-détecteur et 1-correcteur.

Exemple

Matrice de contrôle

On écrit la matrice $\mathbf{G}$ sous forme standard (pivot de Gauss) :

$$\mathbf{G} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{A}).$$

La matrice de contrôle $\mathbf{H} = (-\mathbf{A}^\top \mid \mathbf{I}_3)$ de $\mathcal{L}$ est donnée par :

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Exemple

Mots du code dual

A partir de $\mathbf{H}$, on obtient les mots du code dual $\mathcal{L}^{\perp}$:

x	$\mathcal{L}^{\perp}$	ω
000	000000	0
001	110001	3
010	011010	3
011	101011	4
100	101100	3
101	011101	4
110	110110	4
111	000111	3

Décodage par tableau standard

Notion de syndrome

Nous allons à présent exposer une règle de décodage à distance minimale reposant sur un tableau, dit *tableau standard*.

Définition 8. *Soit $\mathcal{L}$ un $[n,k]$-code linéaire de matrice de contrôle $\mathbf{H}$. Soit x un élément de $(\mathbf{F}_q)^n$. le mot $x\mathbf{H}^\top$ est appelé syndrome de x.*

Cette définition permet d'introduire l'application linéaire s suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{s}: & (\mathbf{F}_q)^n & \longrightarrow & (\mathbf{F}_q)^{n-k} \\ & x & \longrightarrow & \mathrm{s}(x) = x\mathbf{H}^\top \end{array}$$

Soit x un élément de $\mathcal{L}$. On note que $\mathrm{s}(x) = 0$, ce qui signifie que

$$\mathcal{L} = \ker(s).$$

Décodage par tableau standard

Classes d'équivalence

On définit la classe de x, notée C_x ou $x + \mathcal{L}$, par :

$$\mathrm{C}_x = \{x + I \mid I \in \mathcal{L}\}.$$

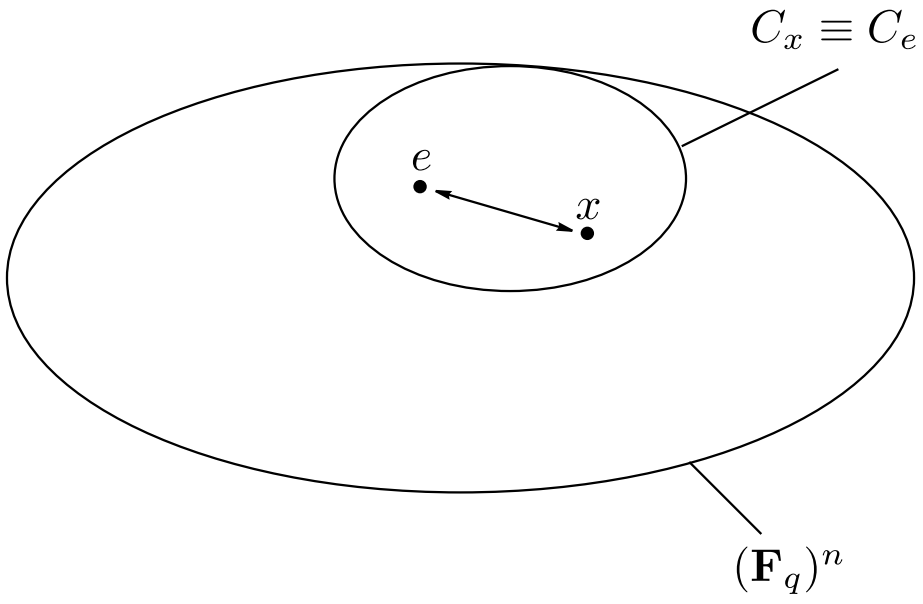
Théorème 6. *L'ensemble des classes* C_x, $x \in (\mathbf{F}_q)^n$, *forme une partition de* $(\mathbf{F}_q)^n$.

Théorème 7. *Soit* $\mathcal{L}$ *un* $[n, k]$*-code. Les éléments* x *et* y *de* $(\mathbf{F}_q)^n$ *ont le même syndrome si et seulement si ils définissent la même classe.*

Décodage par tableau standard

Construction du tableau

Soit x le mot reçu. Le décodage par distance minimale requiert que l'on décode x par le mot de code c pour lequel $e = x - c$ a le poids le plus faible. Étant donné que c varie dans $\mathcal{L}$, e est un élément de C_x. Le vecteur d'erreur e a donc le même syndrome que x.



Décodage par tableau standard

Construction du tableau

Mode de construction

1. La première ligne comporte les mots de $\mathcal{L}$.
2. La ligne j est constituée des $e_j + \mathcal{L}$, où e_j est un mot sélectionné de plus petit poids ne se trouvant pas dans les $j-1$ lignes précédentes.
3. Le processus est itéré jusqu'à ce que tous les mots de $(\mathbf{F}_q)^n$ soient représentés dans le tableau.

0	c_1	c_2	$\ldots$	c_m		
e_1	$c_1 + e_1$	$c_2 + e_1$	$\ldots$	$c_m + e_1$	$\rightarrow$	$e_1 + \mathcal{L}$
e_2	$c_1 + e_2$	$c_2 + e_2$	$\ldots$	$c_m + e_2$	$\rightarrow$	$e_2 + \mathcal{L}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
e_s	$c_1 + e_s$	$c_2 + e_s$	$\ldots$	$c_m + e_s$	$\rightarrow$	$e_s + \mathcal{L}$

Décodage par tableau standard

Exemple

Soit $\mathcal{L}$ un $[4, 2]$-code linéaire binaire défini par la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

x	$\mathcal{L}$	ω
00	0000	0
01	0100	1
10	1101	3
11	1001	2

Décodage par tableau standard

Exemple

Ceci nous conduit au tableau standard suivant :

0000	0100	1101	1001
1000	1100	0101	0001
0010	0110	1111	1011
1010	1110	0111	0011

Inconvénient : espace mémoire occupé (16 Go pour un [32,6]-code !).

$\Longrightarrow$ **décodage par syndrome**

Décodage par syndrome

Principe

Les mots d'une même ligne du tableau standard ont même syndrome.

$\Rightarrow$ **construction d'une table de représentants et de syndromes**

0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	$\mathrm{s}(e_i)$
e_1	$c_1 + e_1$	$c_2 + e_1$	$\dots$	$c_m + e_1$	$e_1\mathbf{H}^\top$
e_2	$c_1 + e_2$	$c_2 + e_2$	$\dots$	$c_m + e_2$	$e_2\mathbf{H}^\top$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_s	$c_1 + e_s$	$c_2 + e_s$	$\dots$	$c_m + e_s$	$e_s\mathbf{H}^\top$

Le calcul du syndrome d'un mot reçu x désigne son représentant e_i. Le décodage s'effectue en calculant $x - e_i$.

Décodage par syndrome

Exemple

On considère le code linéaire $\mathcal{L}$ défini par la matrice génératrice $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Représentant e_i	Syndrome $e_i\mathbf{H}^\top$
0000	00
1000	01
0010	10
1010	11

Décodage par syndrome

Exemple

On suppose que $x = 1110$ a été reçu. Le calcul de son syndrome donne :

$$x\mathbf{H}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le représentant de la classe est donc 1010 et l'on obtient

$$c = 1110 - 1010 = 0100.$$