TD n° 3 : Modélisation *markovienne* des sources d'information binaires

L'importance de sources d'information binaires provient de leur robustesse au bruit et de la puissance de traitement offerte par l'électronique numérique. C'est la raison pour laquelle les techniques de codage font généralement usage de symboles binaires.

Soit 0 et 1 les symboles binaires produits par une source binaire S avec les probabilités $p(0)=\alpha$ et $p(1)=1-\alpha$. Différentes modélisations de cette source devront être étudiées en vue de la transmission de messages binaires au travers un canal numérique.

1.

Modéliser S par une ***source sans mémoire***. Déterminer l'expression de son entropie $H_0(S)$, de son entropie limite $H_\infty(S)$, puis de son efficacité informationnelle η_S et de la redondance relative d'un message quelconque émis par cette source r_S . AN : $\alpha=\frac{1}{4}$.

2.

Modéliser S par une ***source de Markov du 1er ordre*** à 2 états émetteurs. Les états gardent le dernier symbole émis (x[t] à l'instant t). La source S est caractérisée par sa matrice de transition :

$$\Pi=\begin{bmatrix} p(0|0)=\beta & p(1|0)=1-\beta \\ p(0|1)=1-\gamma & p(1|1)=\gamma \end{bmatrix}$$

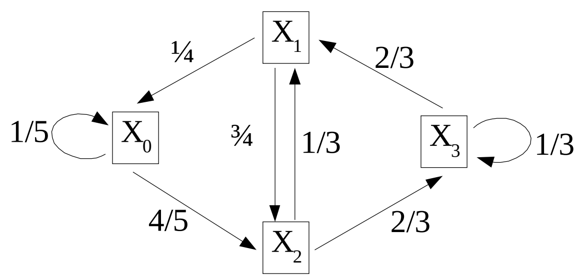
et par le vecteur des probabilités d'apparition des symboles (nommées aussi probabilités marginales) $\mu=[\,p(0)\;p(1)]$

Supposons que la source se trouve en régime stable – source ergodique et stationnaire – . Monter que la connaissance de la matrice de transition Π suffit pour déterminer le vecteur des probabilités d'apparition de symboles μ . Déterminer l'expression de ce vecteur en fonction de β et γ .

Déterminer l'expression de son entropie $H_1(S)$, de son entropie limite $H_\infty(S)$, puis de son efficacité informationnelle η_S et de la redondance relative d'un message quelconque émis par cette source r_S . AN : $\beta=\frac{1}{4}$ et $\gamma=\frac{1}{3}$.

3.

Modéliser S par une ***source de Markov du 2ème ordre*** à 4 états émetteurs (cf. figure ci–dessous). Les états sont constitués des 2 derniers symboles émis (x[t] x[t−1]).



Calculer les probabilités des états, puis déduire l'entropie de la modélisation d'ordre 2 de la source $H_2(S)$.

Calculer les probabilités marginales, puis déduire l'entropie de la modélisation d'ordre 0 de la source $H_0(S)$.

Calculer les probabilités de transition du modèle de Markov d'ordre 1, puis déduire l'entropie de la modélisation d'ordre 1 de la source $H_1(S)$.

Comparer les valeurs d'entropie obtenues et conclure.