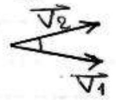
Cours Physique : 1er semestre

Rappels:

Le produit scalaire de 2 vecteurs:

$P = \vec{V_1}.\vec{V_2} = |\vec{V_1}| \times |\vec{V_2}| . \cos(\vec{V_1},\vec{V_2})$

$(\vec{V_1},\vec{V_2})$ etant l'angle entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$



$(\vec{V_1},\vec{V_2})$

A retenir:

$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Longrightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$ « $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ »

Forme analytique d'un produit scalaire:

Dans le repère cartésien:

$\vec{V_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$.

$\vec{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Du fait que:

$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}|.\cos(\vec{i},\vec{i})$

$= |\vec{i}|^2 = 1$

$\vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

* $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

$\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.

Le produit vectoriel de deux vecteurs:

$\vec{C} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$: Produit vectoriel de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

$\vec{C}$ a les propriétés suivantes:

$|\vec{C}| = |\vec{V_1}| \times |\vec{V_2}| \times |\sin(\vec{V_1},\vec{V_2})|$.

* La direction: $\vec{C} \perp \vec{V_1}$, $\vec{C_2} \perp \vec{V_2}$.

$\Longrightarrow \vec{C} \perp$ au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

Sens: $(\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{C})$ forment un triède direct.

Trièdre direct: on passe du 1er vecteur vers le 2ème vecteur, et du 2ème vecteur vers le 3ème vecteur dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La forme analytique d'un produit d'un vecteur:

Dans le repère cartésien:

$\vec{C} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

$\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{i}(y_1.z_2 - y_2.z_1) - \vec{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

A savoir:

$\vec{V_1} \uparrow\uparrow \vec{V_2} \Longrightarrow \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$ $(\sin(0) = 0)$

"parallèle"

Dérivé d'un vecteur

Soit $A(t)$ une fonction vectorielle:

$A(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

parce que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont des vecteurs constants: $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$

* Dérivé du produit scalaire

$$\frac{d}{dt}(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\frac{d\vec{V_2}}{dt}.$$

Dérivé du produit vectoriel

$$\frac{d}{dt}(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt}\wedge\vec{V_2} + \vec{V_1}\wedge\frac{d\vec{V_2}}{dt}$$

Chapitre I: Cinematique du point matériel

Introduction:

La cinematique est l'etude d'un mouvement d'un objet sans s'intéresser aux causes du mouvement

Définitions

2.1) Notion du point materiel:

Le point materiel est un objet de masse finie dont on néglige les dimensions spatiales.

2.2) Définitions d'un repère.

. Repère spatial:
C'est un système constitué d'un point d'origine et d'axes non parallèles.

. Repère de temps:
Le temps permet de préciser le mouvement du mobile. Un chronomètre permet de mesurer les intervalles de temps.

2.3) Notion de mouvement:

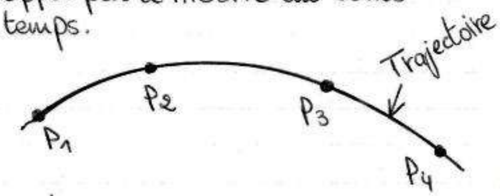
Un corps est en mouvement si les coordonnées dans un repère changent.
. Un corps est immobile si les coordonnées dans un repère ne changent pas.

2.4) Notions de position:

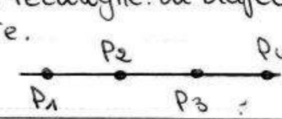
La position d'un mobile représente l'emplacement de ce module par rapport à un repère.

2.5) Trajectoire

La trajectoire d'un mobile représente l'ensemble de positions successives occuppés par le mobile au cours du temps.



Exemples:
* Mouvement rectiligne: la trajectoire est une droite.

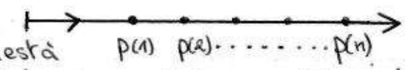


---

3) Le mouvement Rectiligne:

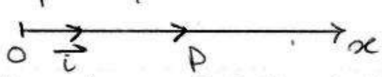
mouvement à une dimension "1D".
La trajectoire est une droite.

3.1) Repérage: Un mobile M est repéré par la coordonnée cartésienne x.
L'axe ox est confondue avec la trajectoire

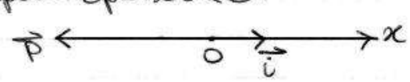


on est à
* Si un temps "t", le mobile se trouve au point "p"
$\vec{OP} = x\vec{i}$.

* Si les vecteurs $\vec{op}$ et $\vec{i}$ sont du même sens: $\vec{op} = x\vec{i} > 0$



* Si les vecteurs $\vec{op}$ et $\vec{i}$ sont de sens opposé. $\vec{op} = x\vec{i} < 0$.



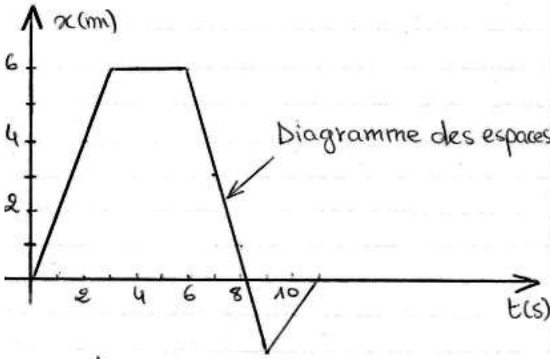
A savoir.
L'équation $x(t)$ est appelé equation de mouvement.

3.2) Diagramme des espaces:

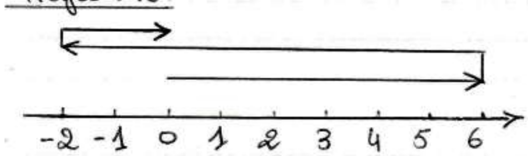
C'est la représentation de la fonction x en fonction du temps:

Exemple:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x (m)	0	2	4	6	6	6	6	3	1	-2	-1	0



Trajectoire:



3.3) Vitesse.

La vitesse d'un mobile représente la variation de la position au cours du temps: "permet de mesurer la rapidité"

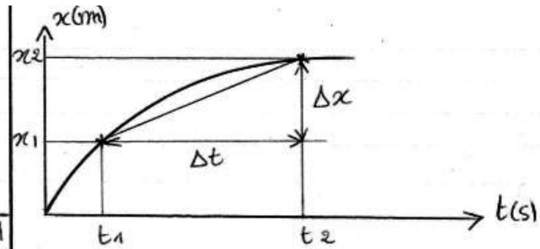
3.3.1) Vitesse moyenne:

Si le mobile se trouve à la position x_1 à l'instant t_1 et à la position x_2 à l'instant t_2, la vitesse moyenne est définie par:

$$v_m\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{Déplacement}}{\text{Durée du trajet}}$$

$$v_m\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

L'unité de la vitesse est en (m/s)



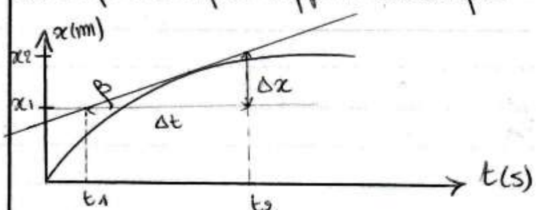
$V_m\Big|_{t_1}^{t_2}$ = pente de la droite qui passe par p_1 et p_2.

Vitesse instantanée:

On définit la vitesse instantanée par:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad \Delta t = t_2 - t_1.$$

La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps:

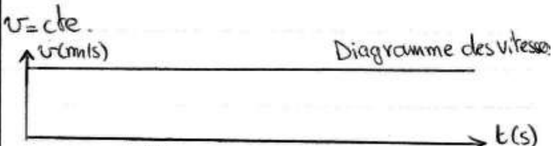


$v(t_1) = \tan(\beta)$ pente de la tangente à $x(t)$ en ce temps là.

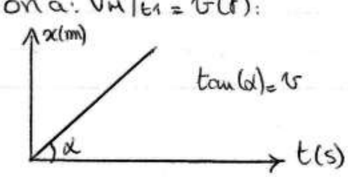
À savoir:

On a deux cas où on peut confondre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne.

1er cas: si on a un mouvement uniforme, c'est à dire: la vitesse est constante: $v = cte$.



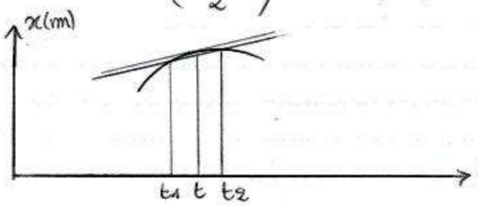
on a: $V_m\Big|_{t_1}^{t_2} = v(t)$.



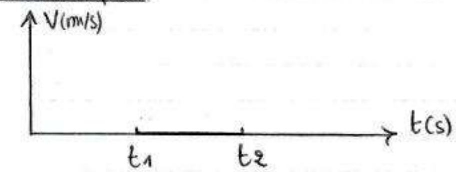
2ème cas:

La vitesse instantané peut être assimilée à la vitesse moyenne au milieu de l'intervale de temps: $\Delta t = t_2 - t_1$ quand $\Delta t \to 0$.

$$v_m \Big|_{t_1}^{t_2} = v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \quad (\Delta t \to 0)$$



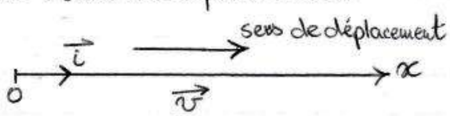
Remarque:



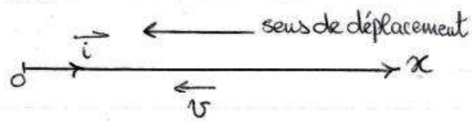
$v = 0$ m/s. Pas de mouvement entre t_1 et t_2.

A savoir:

* $V > 0$: mouvement dans le sens positive des "x": sens de déplacement.



* $V < 0$: mouvement dans le sens négative des "x":



Distance parcourue, déplacement et position à partir du graphe $v(t)$:

A partir du graphe $\vec{v}(t)$ on obtient:

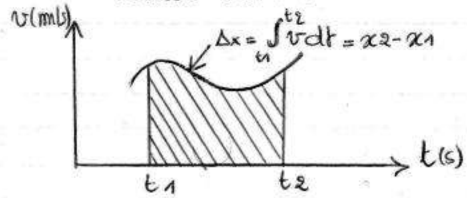
* Le déplacement.
* La position.
* Distance parcourue.

Le Déplacement:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v.dt.$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v.dt$$

$$x_2 - x_1 = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v.dt}_{\text{L'aire sous la courbe } v(t)\big|_{t_1}^{t_2}} = \text{déplacement} \Big|_{t_1}^{t_2}$$



La position:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v.dt \Rightarrow \underset{\text{position } t_2}{x(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} v.dt + \underset{\text{position } t_1}{x(t_1)}$$

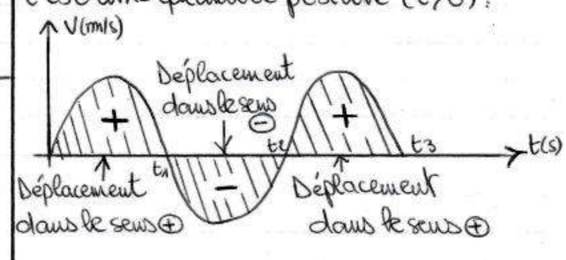
Distance parcourue:

$$\ell \Big|_{t_1}^{t_2} = \text{distance parcourue} \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

$$\ell \Big|_{t_1}^{t_2} = |x_2 - x_1| = \left|\int_{t_1}^{t_2} v.dt\right| = \text{L'aire sous la courbe en valeur absolue}$$

Remarque:

ℓ est une quantité positive ($\ell > 0$).



Calculons le déplacement de : $0 \to t_3$

$$x(t_3) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_3} v.dt .$$

$$= \int_0^{t_1} v.dt + \int_{t_1}^{t_2} v.dt + \int_{t_2}^{t_3} v.dt .$$

$$x(t_3) - x(0) = A_1 + A_2 + A_3 .$$

$A_1 = \int_0^{t_1} v.dt > 0$; $A_2 = \int_{t_1}^{t_2} v.dt < 0$

$A_3 = \int_{t_2}^{t_3} v.dt > 0$

Calculons la distance parcourue entre $t = 0s$ et $t = 3s$:

$$\ell \Big|_0^{t_3} = \left|\int_0^{t_1} v.dt\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2} v.dt\right| + \left|\int_{t_2}^{t_3} v.dt\right|$$

$$\ell \Big|_0^{t_3} = |A_1| + |A_2| + |A_3| .$$

4: Passage de la vitesse à la position:

Equation: $x(t) \underset{\text{l'intégrale}}{\overset{\text{la dérivée}}{\rightleftarrows}} v(t)$

Graphe: $x(t) \underset{\text{l'aire sous la courbe } v(t).}{\overset{\text{pente de tan}(x(t))}{\rightleftarrows}} v(t)$

L'accélération:

L'accélération exprime la variation de la vitesse au cours du temps.

L'accélération moyenne:

$$a_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta V}{\Delta t}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

tel que : à t_2, le mobile a une vitesse v_2

à t_1, le mobile a une vitesse v_1.

L'unité est: m/s^2.

Accélération instantanée:

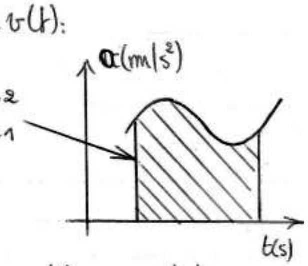
$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$ $\Delta t = t_2 - t_1$

$a = \frac{dv}{dt}$: l'accélération instantanée

est la dérivée de $v(t)$:

Important:

$$\int_{t_1}^{t_2} a.dt = \Delta V \Big|_{t_1}^{t_2}$$



À partir du graphe $a(t)$, on peut trouver la vitesse à chaque instant:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a.dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dv = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} a.dt}_{\text{l'aire sous la courbe } a(t).}$$

$\Delta V \Big|_{t_1}^{t_2} =$ Aire sous la courbe $a(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$

$V_2 - V_1 =$ Aire sous $a(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$

$V_2 =$ Aire sous $a(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + V_1$.

5. Passage de l'accélération à la vitesse:

Equation : $v(t) \underset{\text{l'intégral}}{\overset{\text{la dérivée}}{\rightleftarrows}} a(t)$

Graphe: $v(t) \underset{\text{l'aire sous la courbe } v(t).}{\overset{\text{pente de la tan } v(t)}{\rightleftarrows}} a(t)$

Quelques exemples de types de mouvements:

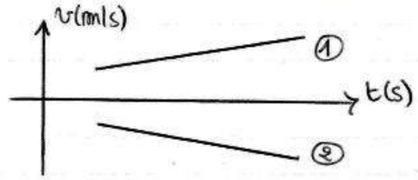
* $a = 0 m/s$; $V =$ cte : le mouvement uniforme
* $a =$ cte : le mouvement est uniformément varié:

- Si $|\vec{V}| \nearrow$: le mouvement est uniformément accéléré $(a.v) > 0$.
- Si $|\vec{V}| \searrow$: le mouvement est uniformément décéléré $(a.v < 0)$.

* $a \neq cte \Rightarrow$ le mouvement est varié :

- Si $|\vec{V}| \nearrow$: le mouvement est accéléré ($a.v > 0$)
- Si $|\vec{V}| \searrow$: le mouvement est décéléré ($a.v < 0$).

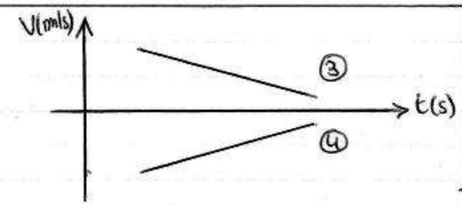
Exemple:



$v(t)$ est une droite $\Rightarrow a = cte$
a = pente de la droite.

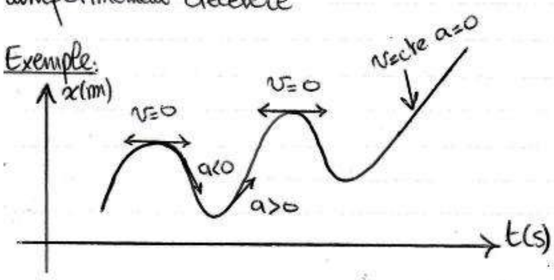
1er cas :
$a > 0$; $V > 0 \Rightarrow$ le mouvement est uniformément accéléré
"$a.v > 0$" ou $|\vec{V}| \nearrow$

2ème cas:
$a < 0$, $V < 0 \Rightarrow$ le mouvement est uniformément accéléré
"$a.v > 0$" ou $|\vec{V}| \nearrow$



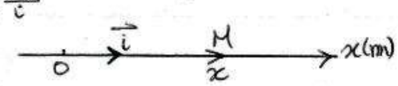
3ème cas: $a < 0$, $v > 0$: mouvement uniformément décéléré.
4ème cas: $a > 0$, $v < 0$: mouvement uniformément décéléré

Exemple:



6. Vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération :

Vecteur position :
le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui indique la position du mobile par rapport à l'origine O.
$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$



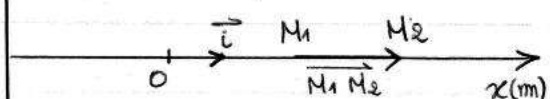
$\overrightarrow{OM} = \vec{x}(t)$

Vecteur déplacement.
- Si à un instant « t_1 », le mobile se trouve en M_1
- Si à un instant « t_2 », le mobile se trouve en M_2.

le vecteur déplacement : $\overrightarrow{M_1M_2}$ est

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$
$\overrightarrow{M_1M_2} = x_2\vec{i} - x_1\vec{i}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i}$.



Vecteur vitesse instantanée.

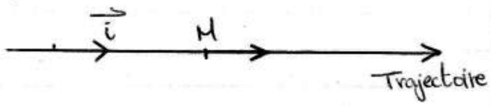
$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$; $v_x = \frac{dx}{dt}$.

Vecteur accélération instantanée.

$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i}$ $\quad a_x = \frac{dv_x}{dt}$.

Propriétés du vecteur vitesse:

* Module: $|\vec{v}| = |v_x|$
* Direction: Tangente à la trajectoire.
* Sens: Sens du mouvement.
* Origine: la position du mobile.



Propriétés du vecteur accélération pour le mouvement rectiligne:

* Module $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2} = |a_x|$
* Direction: Tangente à la trajectoire
* Origine: la position du mobile.

Remarque:
Si le mouvement est accéléré, on a $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le même sens.

Quelques mouvements particuliers:

1) Mouvement rectiligne uniforme:

$a = 0\ m/s^2 \Rightarrow v = cte$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v.dt.$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v.dt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

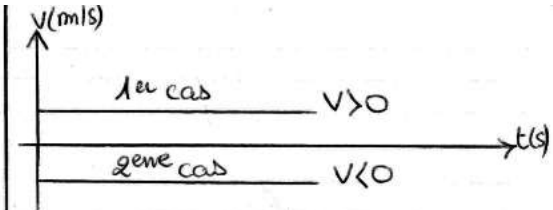
$x(t) - x(t_0) = v(t - t_0).$

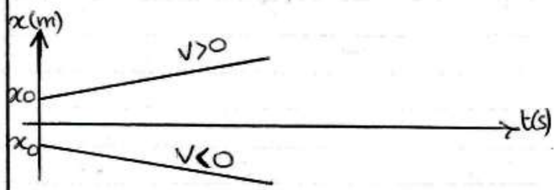
pour simplifier, on pose $t_0 = 0$

$x(t) - x(0) = vt = v.t$

$x(t) = v.t + x(0).$

Representation graphique:





2) Mouvement réctiligne uniformément varié:

$a = cte \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a.dt.$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = a\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow v(t) - v(t_0) = a(t - t_0).$$

on pose $t_0 = 0 \Rightarrow v(t) - v(0) = a \times t.$

$v(t) = at + v(0)$; $v(0) = v_0.$

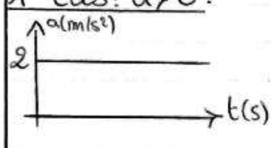
* $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v.dt.$

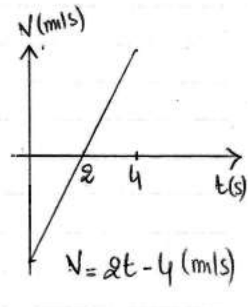
$$dx = (at + v_0)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} a.t\,dt + \int_{0}^{t} v_0 dt$$

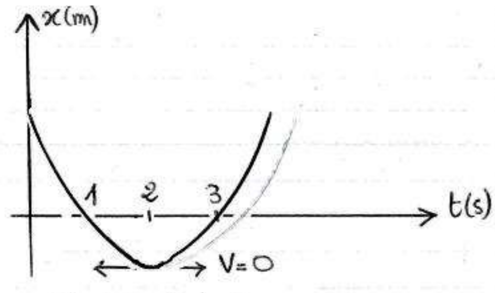
$$(x - x(0)) = a\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^t + v_0(t - t_0)$$

Representation graphique:

1er cas: $a > 0$:

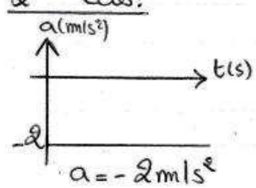


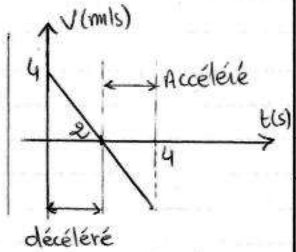




$x = t^2 - 4t + 3$ (m).

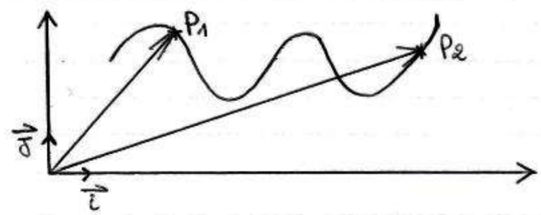
2ème cas:





$v = -2t + 4$

Mouvement dans un plan "2 dimensions" en coordonnées cartésiennes:



*Vecteur position:

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\overrightarrow{OP}$: Vecteur position qui a comme origine le point O et l'extrémité le point P. $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

*Vecteur déplacement:

Le mobile se trouve à la position "P_1" à t_1 et se trouve à la position "P_2" à t_2.

$\overrightarrow{P_1P_2}$: Vecteur déplacement qui caractérise le changement de position ($P_1 \rightarrow P_2$)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$.

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

Vecteur vitesse moyenne:

$$V_m\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta(x\vec{i} + y\vec{j})}{\Delta t}.$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$V_m\Big|_{t_1}^{t_2} = (V_m)_x\vec{i} + (V_m)_y\vec{j}.$$

$(v_m)_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $(v_m)_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$.

Vecteur vitesse instantanée:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$; $\vec{v_x} \perp \vec{v_y}$.

$|V| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Vecteur accélération moyenne:

$$\overrightarrow{a_m}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$\vec{V_1}$: vitesse à l'instant "t_1".
$\vec{V_2}$: vitesse à l'instant "t_2".

Vecteur accélération instantanée:

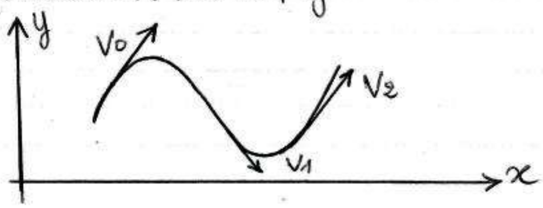
$$\vec{a} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}.$$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ $\quad \vec{a_x} \perp \vec{a_y}$.

$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Propriétés du vecteur vitesse :

Origine : la position du mobile.
Direction : Tangente à la trajectoire
Sens : de sens du mouvement.
Module : $|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$



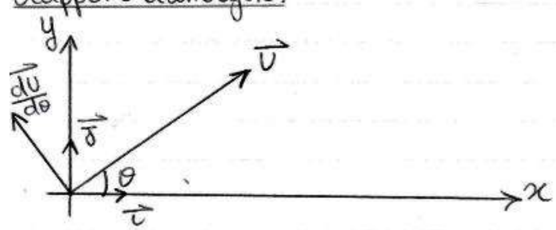
Acanatre :
l'equation de la trajectoire est $y = f(x)$. Exemple :

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 - 2 \end{cases}$$

$$x(t) = 2t \Longrightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y(x) = 4\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2 = x^2 - 2.$$

Derivée d'un vecteur unitaire par rapport a un cycle :



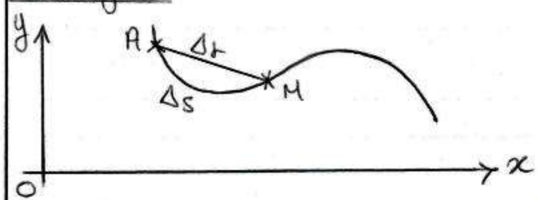
$\vec{u}$ est un vecteur unitaire qui fait "θ" variable avec l'axe (ox)
$\theta = (\vec{ox}, \vec{u})$; $|\vec{U}| = 1$

$\vec{U} = |\vec{U}| \cos(\theta) \vec{i} + |\vec{U}| \sin(\theta) \vec{J}$.
$\vec{U} = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{J}$.
$\frac{d\vec{U}}{d\theta} = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{J}$.

$\vec{U} \frac{d\vec{U}}{d\theta} = -(\cos(\theta) * \sin(\theta)) + (\sin(\theta)\cos(\theta))$
$\vec{U} \frac{d\vec{U}}{d\theta} = 0$

coordonnées intrinsèques :

Abcisse, vitesse et accélérations curviligne :



le point "A" représentant la position du mobile à t = 0 s sur la trajectoire qu'on va prendre comme origine.

la valeur algébrique de l'arc $\widehat{AM}$ est l'abcisse curviligne tel que
$S = \widehat{AM}$: Abscisse curviligne
S : représentant la distance parcourue par le mobile.
S : la longueur de l'arc $\widehat{AM}$.

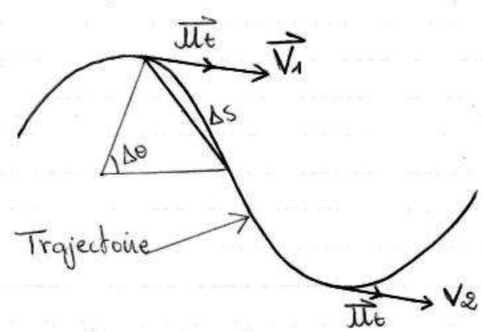
Vitesse curviligne :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{ds}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire $= \vec{U_t}$.

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{U_t}.$$

Remarque :



* a t_1, le mobile se trouve en m1.
* a t_2, le mobile se trouve en m2.
$\Delta S = \widehat{mm'}$: la distance parcourue entre t_1 et t_2.

$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v.dt$

$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v.dt$

$\Rightarrow \Delta S |_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} v.dt \; ; \; v = |\vec{v}|.$

$|v| = \frac{ds}{dt}.$

<u>Vecteur accélération curviligne:</u>

$a = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(v.\vec{u_t})$

$= \frac{dv}{dt} \times \vec{u_t} + \frac{d\vec{u_t}}{dt} v.$

or: $a_t = \frac{dv}{dt}$ $\quad \vec{a_t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{u_t}$: Accélération tangentielle

$\vec{v} = |\vec{v}|$

$\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{du_t}{d\theta} \cdot \frac{\vec{d\theta}}{dt} = \frac{du_t}{d\theta} \cdot \frac{\vec{d\theta}}{ds} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt}$

$\frac{d\vec{u_t}}{dt}$ = vecteur unitaire $\perp \vec{u_t}$

$\frac{d\vec{u_t}}{d\theta} = \vec{u_n}.$

$\frac{d\vec{u_t}}{dt} = v.\frac{d\theta}{ds}.\vec{u_n}.$

$\Delta s = \rho.\Delta\theta \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}.$

$ds = \rho.d\theta$

avec ρ: Rayon de courbure.

$\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v}{\rho}.\vec{u_n}$

<u>on aura donc:</u>

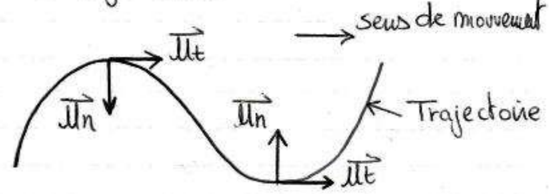
$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v.\frac{v}{\rho}.\vec{u_n}.$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{\rho}.\vec{u_n}.$

$\vec{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{u_n}$: Accélération normale à la trajectoire. $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

<u>Remarques:</u>

* $\vec{u_n}$ est dirigé vers la concavité de la trajectoire.



$(\vec{u_t}, \vec{u_n})$

$\vec{u_n} \perp \vec{u_t} \quad |\vec{u_n}| = |\vec{u_t}| = 1$

$\vec{a} = \vec{u_t} + \vec{u_n}.$

$|a| = \sqrt{u_t^2 + u_n^2}$

<u>A connaître:</u>

* Mouvement uniforme $\Rightarrow v = cte$

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \\ a_n = u_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad \vec{a} = \vec{a_n}$$

* $\rho \longrightarrow \infty$ $\begin{cases} a_t = \frac{d|v|}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \longrightarrow a_n = 0 \\ \vec{a} = \vec{a_t} \end{cases}$

* $\rho \longrightarrow cte \qquad a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

$\rho = R \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$

$a = \vec{a_t} + \vec{a_n}.$

<u>Conclusion:</u>

* La composante "a_t" renseigne sur le changement de $|\vec{V}|$.
* La composante "a_n" renseigne sur le changement de la direction de $\vec{v}$.

A connaitre

* Si a t = cte $\Rightarrow$ Mouvement uniformément varié

a t > 0 $\Rightarrow$ Mouvement uniformément accéléré

a t < 0 $\Rightarrow$ Mouvement uniformément décéléré.

Coordonnées Polaires:

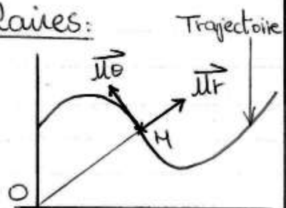
Vecteur position:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$\vec{r} = |\overrightarrow{OM}|\,\vec{u_r}$

$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$

$|\overrightarrow{OM}| = r > 0$



Telque : $\vec{U_r}$: un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$ ($\vec{U_r} \nearrow\nearrow \overrightarrow{OM}$)

* le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est repéré par l'angle "θ"

Telque : "θ" est l'angle polaire définie par $\theta = (\vec{Ox}; \overrightarrow{OM})$, θ en radiant.
$\vec{u_\theta}$: vecteur unitaire perpendiculaire a $\vec{u_r}$ ($(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}) = \frac{\pi}{2}$).

Vecteur vitesse: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \times \vec{u_r})}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u_r} + r\,\frac{d\vec{u_r}}{dt}.$$

$\vec{V_r} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u_r}$ * composante radiale....

$V_r = \frac{dr}{dt}$ * composante radiale....

$$\frac{d\vec{U_r}}{dt} = \frac{d\vec{u_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \vec{u_\theta}$: vecteur unitaire $\perp$ $\vec{u_r}$.

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u_r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}.$$

$\vec{V_\theta} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}$: vitesse transversale.

$V_\theta = r\,\frac{d\theta}{dt}$: vitesse transversale.

Vecteur Acceleration:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\,\vec{u_r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\,\vec{u_r}\right] + \frac{d}{dt}\left[r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}\right]$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt}\,\vec{u_r} + \frac{d\vec{u_r}}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}\right] + \left[\frac{dr\,d\theta}{dt.dt}\right] u_\theta$$
$$+ \left[\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} \times r\,\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{u_r} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,u_\theta\right]$$

$$+ \left[\left[\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt}\right]\vec{u_\theta} + r\,\frac{d\theta}{dt} \times \frac{du_\theta}{dt}\right]$$

avec : • $\frac{d\vec{U_r}}{dt} = \frac{d\vec{u_r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}$

• $\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u_r}$

et : • $\vec{u_\theta} = \frac{d\vec{U_r}}{dt}$ • $u_r = -\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$.

$a = a_r\,\vec{u_r} + a_\theta\,\vec{u_\theta}$.

$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, acceleration radiale

$a_\theta = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$: Acceleration transversale.

$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_\theta}$.

$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_\theta^2 + a_r^2}$

a_r : acceleration radiale

a_θ : acceleration transversale.

On note:

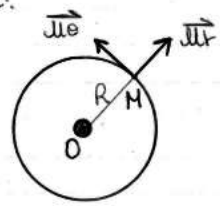
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = vitesse angulaire (rad/s)

$d\theta = \omega.dt \Rightarrow \theta = \int \omega.dt$

Quelques mouvements particuliers:

Mouvement circulaire en coordonnées polaires:

* Mouvement circulaire : la trajectoire est un cercle.



Vecteur positions:

$\vec{OM} = r\,\vec{u_R} \quad r = R = cte$

$\vec{OM} = R\,\vec{u_R}$

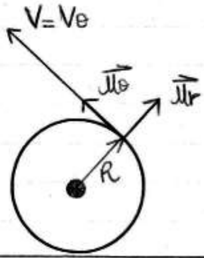
Vecteur vitesse:

$\vec{V} = V_r\,\vec{u_R} + V_\theta\,\vec{u_\theta}$

$$\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_r = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dR}{dt} = 0. \\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt}. \end{array}\right.$$

$\vec{V} = \vec{V_\theta} = R\dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta}$

$V = V_\theta = R\dfrac{d\theta}{dt}$



Vecteur Acceleration:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}\right)$$

$$= R\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}\right)$$

$$\vec{a} = R\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta} + \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} \times \frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u_r}$$

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\vec{u_r}$$

$$\vec{a} = R\frac{d^2\theta}{dt}\vec{u_\theta} + R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} \times (-\vec{u_r})$$

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta}$$

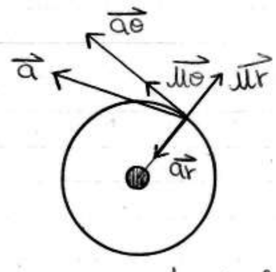
$$\vec{a_r} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -R\omega^2$$

$$\vec{a_\theta} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} \qquad \text{avec } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

On a:

$$a_r = -R\omega^2 \left|\begin{array}{l} \omega^2 > 0 \\ R > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a < 0$$

Cela veut dire que $\vec{a_r}$ est dirigé vers le centre du cercle.



$\vec{a_r} \uparrow\downarrow \vec{u_r}$

Pour un mouvement circulaire uniforme

Mouvement uniforme $|\vec{V}| = cte$.

Vecteur vitesse:

$\vec{V} = R\dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta} \quad ; \; V = R\dfrac{d\theta}{dt}$

$|\vec{V}| = cte \Rightarrow V = cte$

$\Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \omega = cte$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega . dt.$

$\theta = \int \omega . dt + cte = \omega t + cte.$

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement periodique, sa periode est T:

La periode de Rotation T:

C'est le temps pour faire un tour telque $1 \text{ tour} = 2\pi$.

* On définit la fréquence f par le nombre de tour par unité de temps: telque:

$f = \frac{1}{T}$ "En hertz" ou s^{-1}.

on a: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

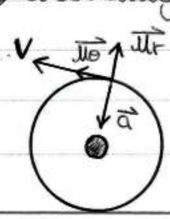
Vecteur acceleration:

$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \vec{a_r} = -R\omega^2 \\ \vec{a_\theta} = R\frac{d\omega}{dt} = 0 \end{array} \right.$

Donc:

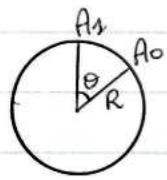
$a = a_r = -R\omega^2$ "a_r est dirigé vers "o""

$\vec{a} = \vec{a_r} \Rightarrow \vec{a}$ est dirigée vers le "o".



Etude du mouvement circulaire en coordonnées curviligne:

Abcisse curviligne:



$S = A_0 A_1 = R\theta$

θ: en radiant

Vitesse: $\vec{V} = \frac{ds}{dt}$

$S = R\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = V$

$\vec{V} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u_t}$

Vecteur accélération:

$\vec{a} = a_t\vec{u_t} + a_n\vec{u_n}$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$a_t = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{R} = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$a_n = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega$

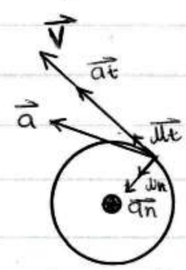
$a = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_t} + R\omega^2\vec{u_n}$

Remarque:

$a_n = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = R\omega^2$

$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 > 0 \\ R > 0 \end{array} \right. \Rightarrow a_n > 0$

an est dirigée vers le "o".



V est tangent à la trajectoire.

Mouvement circulaire uniforme

$v = cte$

$v = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega = cte \quad \omega = cte.$

Vecteur acceleration:

$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_t = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = 0 \\ a_n = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = R\omega^2 \end{array} \right. \quad \omega = cte$

$\vec{a} = a_n$ "Dirigé vers le centre"

Important :

$\vec{V}\cdot\vec{a} > 0$: "Mouvement accéléré"

$\vec{V}\cdot\vec{a} < 0$: "Mouvement décéléré"

$\vec{V}\cdot\vec{a} = 0$: "Mouvement uniforme"

$|\vec{V}| = cte$ ou $\vec{v} \perp \vec{a}$.

Application : Exercice 8 : Serie d'exercices cinématique (1)

On a : $s(t) = t^3 + 3t^2$

1) Module de la vitesse :

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t$

2) Donner $a(t)$:

$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t + 6$ de courbure

3) Calcul du rayon de la trajectoire

à $t = 4s$, on a : $50\ m/s^2$

on a $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \Rightarrow a^2 = a_n^2 + a_t^2$

$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = 1600\ m/s$ $\quad a_n = 40\ m/s^2$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 40 \Rightarrow$

$V(4s) = 3(4)^2 + 6(4) = 72\ m/s$.

$\rho = \frac{(72)^2}{40} = 129,6\ m$.

Exercice 11

1) Determinons $V_r(t)$ et $V_\theta(t)$:

$V_r(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[2 - e^{-t}t^2]$

$= \frac{d}{dt}[-e^{-t}t^2] = -[-e^{-t}t^2 + 2te^{-t}]$

$= e^{-t}.t^2 \ 2te^{-t} = e^{-t}(t^2 - 2t)$

$V_\theta(t) = (2 - e^{-t}.t^2)\frac{d\theta}{dt}$ avec $\frac{d\theta}{dt} = -1$

$V_\theta(t) = e^{-t}.t^2 - 2$.

2) des composantes de $a_\theta(t)$ et $a_r(t)$:

$a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta(t) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

$a_r(t) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$a_\theta(t) = 2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$

sachant que :

$\frac{dr}{dt} = t^2e^{-t} - 2te^{-t}$.

$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^{-t} \times t^2) - 2\frac{d}{dt}(e^{-t} \times t)$

$\frac{d^2r}{dt^2} = (-e^{-t} \times t^2 + 2te^{-t}) - 2(-e^{-t} \times t + e^{-t})$.

$\frac{d^2r}{dt^2} = -t^2e^{-t} + 4te^{-t} - 2e^{-t}$. et $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 1$

$a_r = 4te^{-t} - 2e^{-t} - t^2e^{-t} + r$

Sachant que : $\frac{d^2\theta}{dt} = 0$

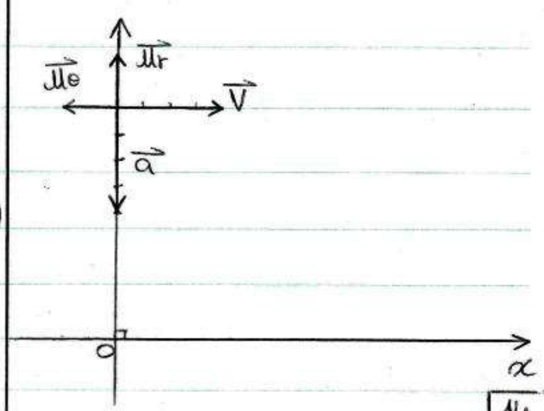
$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}$.

$a_\theta = -2te^{-t}(t-2)$.

3 : Representation de $\vec{OM_0}, \vec{V_0}$ et $\vec{a_0}$:

$\vec{OM} \left| \begin{array}{l} r(0) = 2\ m \\ \theta(0) = \frac{\pi}{2}\ rad \end{array}\right.$ $\quad \vec{V} \left| \begin{array}{l} V_r = 0\ m/s \\ V_\theta = -2\ m/s \end{array}\right.$

$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_r = -4\ m/s^2 \\ a_\theta\ 0\ m/s^2 \end{array}\right.$



4) Déduction du rayon de courbure :

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$

$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 = a_t^2 + a_n^2 = a_r^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow$

$a_n^2 = a_r^2 - a_t^2$

$a_t = \frac{d}{dt} |\vec{V}|$ avec $|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$

$|\vec{V}| = \sqrt{(t^2 e^{-t} - 2te^{-t})^2 + (e^{-t} . t^2 - 2)^2}$

$|\vec{V}| = \sqrt{(t^4 e^{-2t}) + (4t^2 e^{-2t}) - 4(t^3 e^{-2t}) + (e^{-2t} t^4) + (4) - 4e^{-t} t^2}$

Autre methode :

$a_t = os$ $\vec{V} \perp \vec{a} \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow a = a_n$

et $a = a_r$. $a_r = a_n \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n}$

Mouvement Rectiligne sinusoïdale :

On dit qu'un mouvement est rectiligne sinusoïdale si son équilibre de mouvement s'écrit :

$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

ou : $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$.

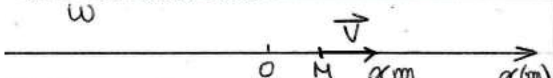
x_m : Amplitude

ω : Pulsation de mouvement "rad/s"

φ : Phase initiale.

de mouvement sinusoïdale est un mouvement periodique de periode "T"

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = constante.



Vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$

$\overrightarrow{OM} = x_m \cos(\omega t + \varphi)\vec{i}$.

Vecteur vitesse

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -x_m \omega . \sin(\omega t + \varphi)\vec{i}$

Vecteur accélération :

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -x_m (\omega)^2 \cos(\omega t + \varphi)\vec{i}$

Remarque :

$\vec{a} = -\omega^2 . \overrightarrow{OM}$.

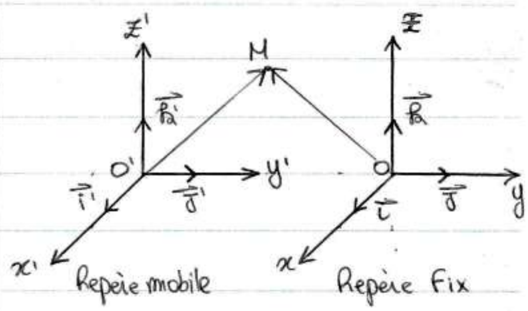
$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Equation differentielle du 2ème ordre.

Composition des mouvements.

Mouvement relatif :



Composition des vecteurs :

Vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$\overrightarrow{OM}$: Vecteur position dans R "Absolue"

O'M : Vecteur position dans R "Relatif"

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

$\overrightarrow{OO'} = x(O')\vec{i} + y(O')\vec{j} + z(O')\vec{k}$

Vecteur vitesse M:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{d\vec{j'}}{dt}y' + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \frac{d\vec{k'}}{dt}z'\right)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$+\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\vec{V_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$: Vitesse Relative.

$$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}.$$

"vitesse d'entraînement".

$$V_a = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$: "Vitesse Absolue"

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}.$$

A savoir:

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \overrightarrow{V_{M/R'}} + \overrightarrow{V_{R'/R}}$$

ou: $\overrightarrow{V_{M/O}} = \overrightarrow{V_{M/O'}} + \overrightarrow{V_{O'/O}}$

Vecteur accélération:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$: accélération dans le repère Absolu.

$$V' = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\left[\frac{d^2x'}{dt}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt}\vec{k'}\right]}_{\vec{a_r}}$$

$$+ \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt} + \frac{d^2\vec{k'}}{dt}}_{\vec{a_e}}$$

$$+ \underbrace{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)}_{a_c:\ \text{accélération de coriolis}}$$

$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

avec $\vec{a_r} = \frac{d^2x'}{dt}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt}\vec{k'}.$

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt} + k'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}.$$

Complément: Mouvement dans l'espace:

"En 3 dimensions"

Coordonnées Cartésiennes:

Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Vecteur vitesse:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}.$$

$$V_x = \frac{dx}{dt};\ V_y = \frac{dy}{dt};\ V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Vecteur accélération:

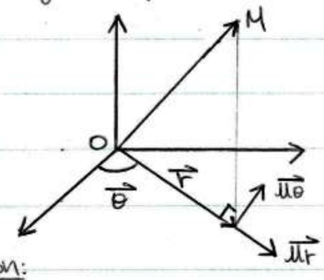
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt}.$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt} = \frac{dV_z}{dt}.$$

Coordonnées cylindriques :



Vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{k}$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{r^2 + z^2}$

Vecteur vitesse.

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{u_r} + z\,\vec{k}\right)$

$\vec{V} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{u_r}\right) + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$\vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \frac{d\vec{u_r}}{dt} \times r + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$.

$\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u_r}}_{V_r} + \underbrace{\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}\,r}_{V_\theta} + \underbrace{\frac{dz}{dt}\vec{k}}_{V_z}$.

$V_r = \frac{dr}{dt}$: composante radiale

$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$: composante transversale

$V_z = \frac{dz}{dt}$: composante azimutale.

Vecteur accélération :

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}\,r + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$

sachant que :

$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_r}$ et $\frac{du_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u_r}$.

$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_\theta} + \vec{a_z}$

$\vec{a_r} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r}$

ou : $\vec{a_r} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\,\vec{u_r}$

$\vec{a_\theta} = \left[2\frac{dr}{dt} \times \frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u_\theta}$

ou : $\vec{a_\theta} = [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a_z} = \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{z}\,\vec{k}$

$\vec{a_r}$ = composante radiale

$\vec{a_\theta}$ = composante transversale

$\vec{a_z}$: composante azimutale.

Chapitre II: Dynamique:

Introduction:

La dynamique est l'étude des corps en fonction des forces qui s'exercent sur eux. Donc elle s'interesse aux causes de mouvements.

Force:

On appelle une force, la cause de tout mouvement ou changement. La force est une grandeur vectorielle, on distingue deux types de forces.

Force d'interaction à distance:

Les corps qui interagissent ne sont pas en contact physique (Ne se touchent pas), exemple:

* Force gravitationnelle
* Force éléctrique et magnétique
* Force forte et force faible

Force en contact:

Les corps qui interagissent sont en contact physique: "Ils se touchent"

Exemple: Force de frottement et force éléctrique.

3) Quantité de mouvement:

On appelle une quantité de mouvement d'un corps de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$, la quantité vectorielle:

$\vec{P} = m\vec{v}$ Kg m/s

Remarque: $\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{v}$.

4) Lois de Newton:

1687, Newton a formulé les "lois de mouvement" dans son ouvrage "Principia"

1ère loi de Newton: "Principe d'inertie":

Tout corps reste au repos ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps que aucune force exterieure ne vient modifier son état.

2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$; $\vec{P} = m\vec{v}$. "force instantanée"

$\sum \vec{F}_{ext}$ = Résultantes de forces exterieurs qui s'appliquent sur m.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$m = cte \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0$.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

La 2ème loi de Newton est appelée Principe fondamental de la dynamique "PFD".

$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$: Force moyenne.

3ème loi: Action et reaction:

Si un corps ①, subi une force $\vec{F}_{21}$ de la part du corps ② alors corps ② subi une force $\vec{F}_{12}$ au corps ①.

Remarque:

$\overrightarrow{F_{12}}$ et $\overrightarrow{F_{21}}$ sont des forces de même nature.

Référentiel Galiléen:

On appelle referentiel galiléen, un referentiel dans lequel le principe d'inertie est pplicable.

Conservation de la quantité de mouvement:

a) Potentiel libre:

Une particule libre n'est soumise à aucune force.

R.F.D:

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

$\Rightarrow \vec{P} = cte \Rightarrow m\vec{v} = cte \Rightarrow \vec{V} = cte.$

"la vitesse est constante en module et direction $\Rightarrow$ la particule a un mouvement rectiligne uniforme.

b) système isolé:

Considerons un système isolé constitué de deux particuliers.

R.F.D:

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P_T}}{dt} = \vec{0}$

$\vec{P_T} = \vec{cte}$

$\vec{P_T} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$

$\vec{P_1}$: Quantité de mouvement de la particule ①.

P_2: Quantité de mouvement de la particule ②

$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{cte} \Rightarrow m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = cte$

Remarque:

$\frac{dP_T}{dt} = 0 \quad \frac{d(\vec{P_1} + \vec{P_2})}{dt} = \vec{0}$

$\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P_1}}{dt} = \frac{-d\vec{P_2}}{dt}.$

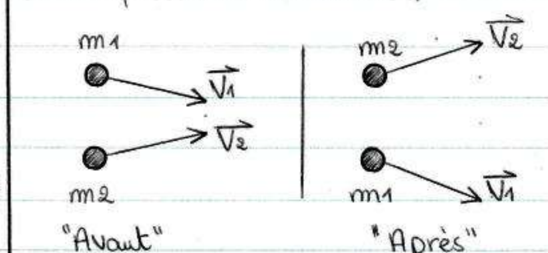
$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = \vec{F_{2/1}}$: la force qu'applique la particule ② sur la particule ①

$\frac{d\vec{P_2}}{dt} = \vec{F_{1/2}}$: la force qu'applique la particule ① sur la particule ②.

$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = \frac{-d\vec{P_2}}{dt} \Rightarrow \vec{F_{2/1}} = -\vec{F_{1/2}}$. "Action et Reaction"

Remarque: "Complément"

Considerons deux particules de masse m_1 et m_2 qui rentre en collision:



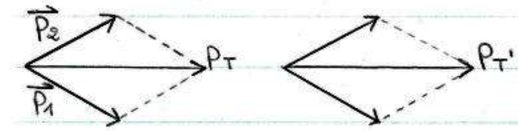
Système isolé $\Rightarrow$ conservation de la quantité de mouvement:

$\vec{P_T}$: quantité de mouvement avant choc

$\vec{P_T'}$: quantité de mouvement après choc

$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{P_1'} + \vec{P_2'} \Rightarrow \vec{P_2} - \vec{P_2'} = \vec{P_1'} - \vec{P_1}$

$-(\vec{P_2'} - \vec{P_2}) = \vec{P_1'} - P_1 \Rightarrow -\vec{\Delta P_2} = \vec{\Delta P_1}.$



Avant Après.

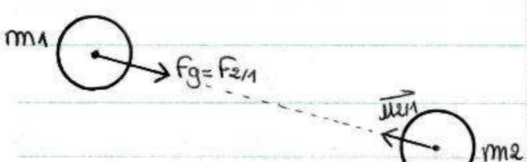
$$\vec{P_T} = \vec{P_T'}$$

Force d'interaction gravitationelle

Considérons deux corps de masses m_1 et m_2 séparés de distance r

F_{12} est la force qu'applique le corps ② sur le corps ①, telque F_{21} :

$$F_{21} = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u_{21}} = F_g.$$



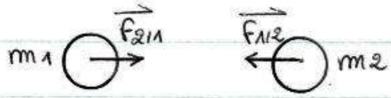
$\vec{u_{21}}$: vecteur unitaire de m_2 vers m_1.

G : $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N.m^2/Kg^2$: constante gravitationelle.

Remarque

Selon la 3ème loi de Newton :

$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$ "Action et Réaction"

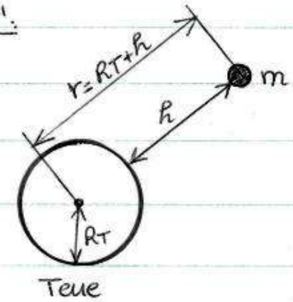


Le Poids :

On appelle poids d'un corps la force gravitationnelle que la terre applique sur un corps, on la denomme $\vec{P}$ telque $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{g}$: Acceleration de pesanteur

A une hauteur "h" :



$$\vec{P} = \vec{F_g} = -\frac{G M_T m}{r^2}\,\vec{u_r}$$

M_T : masse de la terre

R_T : rayon de la terre

$\vec{u_r}$: vecteur unitaire.

$$\vec{P} = -\frac{G M_T m}{(h+R_T)^2}\,\vec{u_r} = m\vec{g}$$

$$\vec{g} = \frac{-G M_T}{(h+R_T)^2}\,\vec{u_r}.$$

Au voisinnage de la terre :

$R_T + h \approx R_T$

$$\vec{P} = \frac{-G M_T . m}{(h+R_T)^2}\,\vec{u_r} \approx \frac{-G . M_T . m}{(R_T)^2}\,\vec{u_r}.$$

$\vec{P} = m\vec{g_0}$ telque : $g_0 = \frac{-G . M_T}{(R_T)^2}\,\vec{u_r}.$

on a : $g = \frac{G M_T}{R_T^2} = cte.$

$G = 6{,}67 . 10^{-11}$

$M_T = 5{,}98 . 10^{24}\ Kg$

$R_T = 6{,}38 . 10^6\ m$

$g_0 = 9{,}83\ m/s^2.$

Remarque :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{G M_T}{(R_T+h)^2} \times \frac{R_T^2}{G M_T} \Rightarrow g = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\, g_0.$$

Applications:

3ème loi de Kepler des periodes:

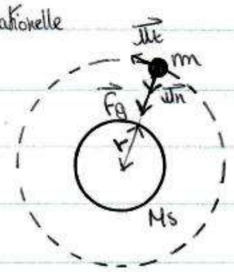
Une planète tourne autour du soleil avec un orbite de Rayon "r" et de periode "T".

La planète a une trajectoire circulaire autour du soleil:

R.F.D:

$\sum\vec{F} = m\vec{a}$; $\sum\vec{F} = \vec{F_g} = m\vec{a}$.

$\vec{F_g}$: Force gravitationelle



$\vec{F_G} = G\frac{M_s.m}{r^2}\vec{u_n} = m a$

$\vec{F_G} = \frac{GM_s}{r^2}\vec{u_n} = a$

a: $\vec{a_n} \Rightarrow \vec{a_t} = 0$

$a_t = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} = cte$

$\Rightarrow$ mouvement uniforme.

$a_n = \frac{GM_s}{r^2} = \frac{V^2}{r}$

on a:

$S = r\theta$ et $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$.

$\Rightarrow \omega = cte$

"$r = cte$"

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v = r\omega = r \times \frac{2\pi}{T}$

$a_n = \frac{GM_s}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 4\pi^2}{r T^2}$

$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{r\,4\pi^2}{T^2}$

$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}}$ "3ème loi de Kepler".

Si on a deux planètes en orbite autour du soleil:

$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$; $\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$

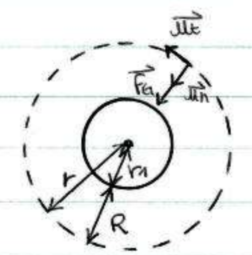
$\Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$.

Remarque:

On a considéré que la trajectoire est un cercle.

Satellite Geostationnaire.

Un satellite geostationnaire est un satellite qui tourne autour de la terre avec la même vitesse angulaire que celle de la terre ($T = 24$ heures).



R.F.D:

$\sum\vec{F} = m\vec{a}$

$\sum\vec{F} = \vec{F_G} = G\frac{M_T.m}{r^2}\vec{u_n}$

$\frac{GM_T.m}{r^2}\vec{u_n} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \frac{GM_T}{r^2}\vec{u_n} \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow v = cte.$

mouvement uniforme : on a :
un mouvement circulaire uniforme
donc un mouvement periodique.

$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$

$v^2 = \frac{GM_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

$r = R_T + h$

$v = r\omega$

$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{r^2\omega^2}{r}$

$GM_T = r^3\omega^2 = r^3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$\frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$

$\Rightarrow r^3 = \frac{GM_T \times T^2}{4\pi^2}$

$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T . T^2}{4\pi^2}} = \left(\frac{GM_T . T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

$v^3 = r^3\omega^3 = \frac{GM_T . T^2}{4\pi^2} \times \frac{2^3\pi^3}{T^3}$

$v^3 = \frac{GM_T . 2\pi}{T} = GM_T . \omega.$

Force de contact :

Ce sont des forces qui apparaissent lorsequ'il y'a contact entre deux corps ou plus. cette force est nomée $\vec{C}$:

Propriétés de $\vec{C}$:

* Point d'application : Milieu de la surface de contact.
* Direction, sens et module : Déterminer par la relation fondamentale de la dynamique.

. Si le mobile est en équilibre, on écrit :
$\sum\vec{F} = 0$

. Si le mobile est en mouvement on écrit : $\sum\vec{F} = m\vec{a}$

La force $\vec{C}$ a deux composantes :
$\vec{C} = \vec{C_{/\!/}} + \vec{C_{\perp}}$

$\vec{C_{\perp}}$: composante perpendiculaire à l'axe tangent au mouvement.
« Empêcher le module de pénétrer ».
$\vec{C_{/\!/}}$: Composante tangente à la trajectoire, elle modélise les frottements

$\vec{C} = \underbrace{\vec{C_{/\!/}}}_{\text{Frottement.}} + \underbrace{\vec{C_{\perp}}}_{\text{Réaction.}}$

Il y'a deux types de frottement :

* Frottement statique : Il empêche le mouvement de s'établir.
* Frottement dynamique : Il se manifeste lorseque le mobile est en mouvement.

Remarque :
En l'absence de frottement
$\vec{C_{/\!/}} = \vec{0}$ et $\vec{C} = \vec{C_{\perp}}$

Relation entre $C_{//}$ et $C_{\perp}$:

• A la rupture de l'équilibre :

On définit un coefficient statique μ_s telque : $C_{//} = \mu_s C_{\perp}$

$\mu_s > 0$ et $\mu_s < 1$ et μ_s est sans dimensions

• En cas de mouvement :

On définit un coefficient de frottement dynamique μ_d telque : $C_{//} = \mu_d C_{\perp}$

$\mu_d > 0$ et $\mu_d < 1$ est sans dimensions

Remarque :

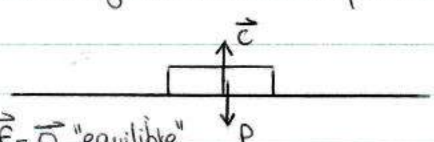
$\mu_s > \mu_d$.

Exemple :

Plan horizontal :

* Corps en équilibre :

Un objet de masse m posé sur un plan horizontal et est en equilibre.

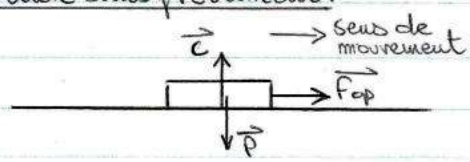


$\sum \vec{F} = \vec{0}$ "equilibre"

$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P}$

$|\vec{C}| = |\vec{P}| = mg$.

Etude sans frottement :



On applique une force $\vec{F_{op}}$ pour mettre l'objet en mouvement : pas de frottement.

$\vec{F_{op}}$: F opérateur

R.F.D : $\vec{P} + \vec{C} + \vec{F_{op}} = m\vec{a}$

Projection sur x :

$0 + 0 + |\vec{F_{op}}| = ma$

Projection sur y :

$-|\vec{P}| + |\vec{C}| + 0 = 0$ "Pas de mouvement selon oy".

$|\vec{F_{op}}| = F_{op} = ma$

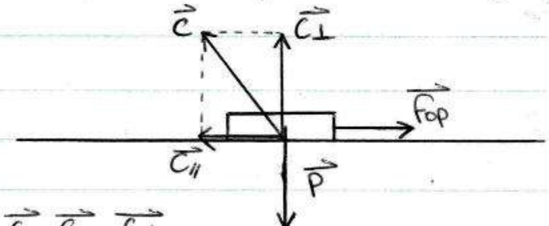
$|\vec{C}| = |\vec{P}| = mg$

Etude avec frottement :

Présence de frottement $\Rightarrow$ Contact non-lisse.

1) cas statique : frottement statique.

On applique une force $\vec{F_{op}}$ sur l'objet :



$\vec{C} = \vec{C_{//}} + \vec{C_{\perp}}$

R.F.D : cas statique $\Rightarrow$

$\sum \vec{F_{ext}} = 0$

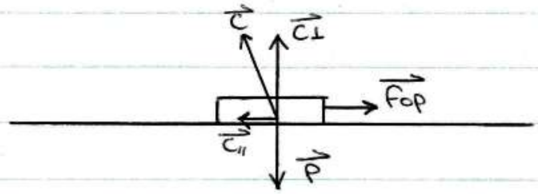
$\vec{F_{op}} + \vec{P} + \vec{C} = 0$

$ox : F_{op} + 0 - C_{//} = 0$ $\quad F_{op} = C_{//}$

$oy : 0 - P + C_{\perp} = 0$ $\Rightarrow$ $P = C_{\perp} = mg$

~~Cas statique a la rupture~~

Cas statique à la rupture de l'équilibre :



R.F.D : $\sum \vec{F} = 0$

$\vec{P} + \vec{C} + \vec{F_{op}} = 0$

$ox : F_{op} - C_\parallel = 0$

$oy : -P + C_\perp = 0$

À la rupture de l'équilibre : $C_\parallel = \mu_s C_\perp$

$F_{op} = C_\parallel$

$P = C_\perp = mg$

$C_\parallel = \mu_s mg$

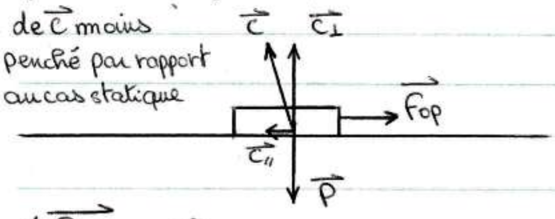
$F_{op} = C_\parallel = \mu_s mg.$

donc il faut appliquer une force $F_{op} \gg \mu_s$ pour mettre l'objet en mouvement.

Cas dynamique :

frottement dynamique :

de $\vec{C}$ moins penché par rapport au cas statique



$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$

$\vec{F_{op}} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$

$ox : F_{op} - C_\parallel = ma$

$oy : C_\perp - P = 0$

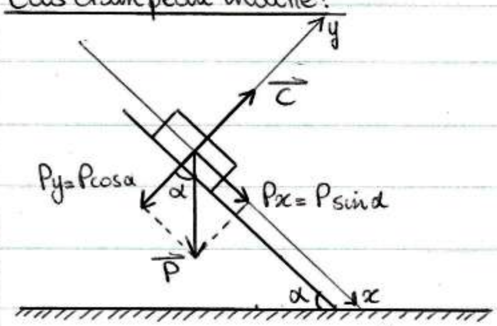
$C_\parallel = \mu_d C_\perp$

$F_{op} = ma + C_\parallel = ma + \mu_d mg.$

$C_\perp = P = mg.$

$\vec{F_{op}} = ma + \mu_d mg.$

Cas d'un plan incliné :



R.F.D : "Absence de frottement $C_\parallel = 0$"

$\sum ext = m\vec{a}$; $\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}.$

$ox : P_x = P\sin\alpha = ma$ ①

$oy : -P_y + C = -P\cos\alpha + C = 0$ ②

① $\Rightarrow mg \cdot \sin\alpha = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha.$

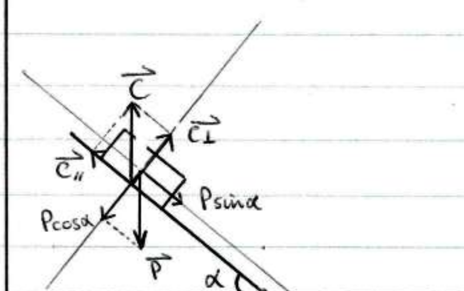
② $\Rightarrow C = mg\cos\alpha$

Remarque :

On a un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Etude avec frottement :

Cas statique :



R.F.D:

$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \vec{P}+\vec{C}=0$

ox: $P\sin\alpha - C_{\parallel} = 0$ ①

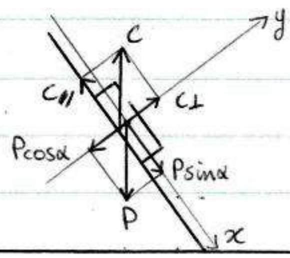
oy: $-P\cos\alpha + C_{\perp} = 0$ ②

$C_{\parallel} = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$

$C_{\perp} = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$

A la rupture de l'équilibre :

On augmente "α" jusqu'à avoir une rupture de l'équilibre pour $\alpha=\alpha_0$



R.F.D:

$\vec{P}+\vec{C}=0$

ox: $P\sin\alpha_0 - C_{\parallel} = 0$ ①

oy: $-P\cos\alpha_0 + C_{\perp} = 0$ ②

$C_{\parallel} = \mu_s C_{\perp}$

$C_{\perp} = P\cos\alpha_0 = mg\cos\alpha_0$

$C_{\parallel} = \mu_s . mg\cos\alpha_0$.

$\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ $P\sin\alpha_0 - \mu_s . mg\cos\alpha_0 = 0$

$mg\sin\alpha_0 - \mu_s mg\cos\alpha_0 = 0$

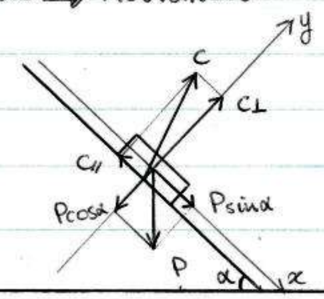
$\sin\alpha_0 = \mu_s\cos\alpha_0$.

$\mu_s = \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = \tan\alpha_0$.

Remarque: Le plan incliné est une méthode expérimental pour calculer μ_s

Cas dynamique: "Mouvement"

Si $\alpha > \alpha_0 \Rightarrow$ Mouvement.



R.F.D:

$\vec{P}+\vec{C} = m\vec{a}$

ox: $P\sin\alpha - C_{\parallel} = ma$

oy: $-P\cos\alpha + C_{\perp} = 0$

$C_{\parallel} = \mu_d C_{\perp}$

$C_{\perp} = mg\cos\alpha$

$C_{\parallel} = mg\cos\alpha\,\mu_d$

$P\sin\alpha - (mg)(\cos\alpha)\,\mu_d$

$mg\sin\alpha - (mg\cos\alpha)\times\mu_d = ma$.

$mg(\sin\alpha - \cos\alpha\,\mu_d) = ma$.

$g\sin\alpha - g\cos\alpha\,\mu_d = a$

$\mu_d = \frac{-a}{g\cos\alpha} + \frac{g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{-a}{g\cos\alpha} + \tan\alpha$.

Remarque: $\mu_d \neq \tan\alpha$.

Propriétés de μ_s et μ_d:

* Ne dependent pas de la masse
* Ne dependent pas de la vitesse de contact
* μ_s et μ_d dependent de la nature des surfaces!!

Materiaux	μ_s	μ_d
Acier-Acier	0,74	0,57
Bois-Bois	0,5	0,3

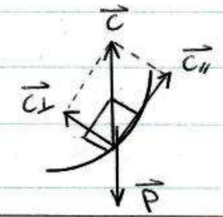
Surface circulaire:

Equilibre:

$\vec{P}+\vec{C}=\vec{0}$

$\vec{C}=-\vec{P}$

$\vec{C}=\underbrace{\vec{C_{//}}}_{\text{frottement}}+\vec{C_{\perp}}$



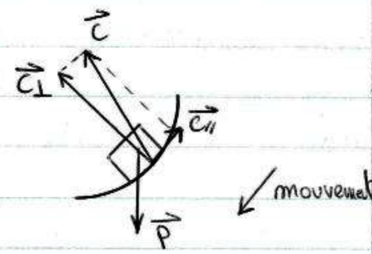
Absence de frottement:

On a un mouvement

$\vec{C}=\vec{C_{\perp}}$

$\vec{C_{//}}=0$

Mouvement en présence de frottement.



Frottement visqueux:

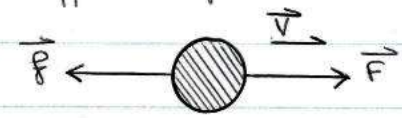
Si un corps x se déplace dans l'air ou un fluide, il subit une resistance lors de son mouvement, cette force qu'exerce le fluide sur le corps est donnée par: $\vec{f}=-k\vec{v}$, tel que:

$\vec{v}$: vitesse du corps

k: coefficient de viscosité: Il dépend de la nature du fluide, sa viscosité et de la forme du corps.

Application:

Un corps qui se déplace dans un fluide sous l'effet d'une force exterieure $\vec{F}$.



R.F.D:

$\sum \vec{F_{ext}}=m\vec{a}$

$\vec{F}+\vec{f}=m\vec{a}$

$\vec{F}-k\vec{v}=m\vec{a}$

ox: $F_x-k v_x=m a_x$

$F-kv=ma$

$\Rightarrow v_x=v$ et $a_x=a$.

$ma+kv=F$

$m\frac{dv}{dt}+kv=F$

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=\frac{F}{m}}$$ Equation differentielle du 1er ordre

$\tau=\frac{m}{k}$: constante de temps.

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\frac{F}{m}.}$$

La solution s'écrit: $\boxed{v=Ae^{-t/\tau}+v_{limite}}$

v_{limite}? c'est quand $\frac{dv}{dt}=0$.

$\frac{v}{\tau}=\frac{F}{m}\Rightarrow\frac{kv}{m}=\frac{F}{m}$

$\Rightarrow v_{limite}=\frac{F}{k}.$

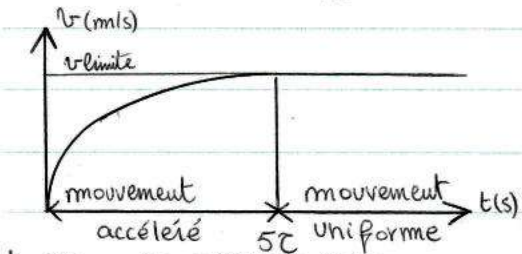
$A = ?$ condition initiale :

$t = 0\,s$ et $v = 0\,m/s$.

$0 = Ae^{-0} + v_{limite} \Rightarrow A = -v_{limite}$

$v = v_{limite}\,(1 - e^{-t/\tau})$.

$v_{limite} = \frac{F}{k}$ et $\tau = \frac{m}{k}$.



$t = 5\tau \Rightarrow v = 0{,}993\ v_{limite}$

Remarque :

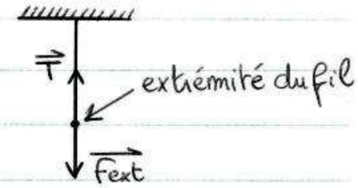
* Pour des faibles vitesses, on a : $\vec{f} = -kv$
* Pour des vitesses plus élevés : $\vec{f} = -kv^2\vec{i}$

des forces électriques :

Tension du fil :

Si on tire sur l'extrémité d'un fil l'autre extrémité est fixe. le fil exerce une resistance nommé $\vec{T}$ tel que $\vec{T}$ a les propriétés suivantes.

* Point d'application : d'extremité du fil
* direction : da direction du fil (// au fil)
* Sens : Opposé a la force appliqué $(\vec{F}_{ext})$.
* de module ou intensité : à déterminer par l'application : R.F.D.



Tension du resort :

Si on applique une force pour déformer un ressort « étirement ou compression », le ressort exerce une force de rappel appelée « Tension du ressort » nommée $\vec{T}$ tel que :

$\vec{T} = -k.\vec{\Delta l} = -k.\Delta l\,\vec{u}$ $\quad \Delta l = l - l_0$.

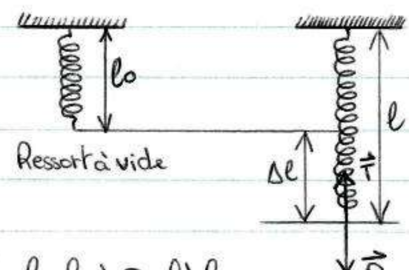
l_0 : longueur à vide du ressort « sens d deformation »

l : longueur du ressort après ettirement.

k : constante de raideur du ressort.

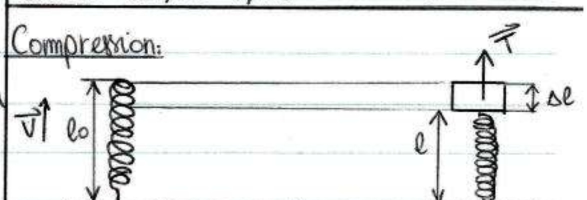
$\vec{u}$: vecteur unitaire sortant du ressort.

Etirement :



$\Delta l = l - l_0 > 0 \quad l > l_0$

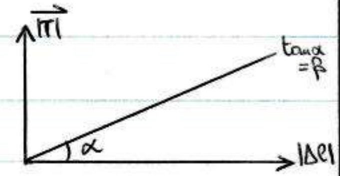
Compression :



$\Delta l = l - l_0 < 0 \quad l < l_0$

Remarque :

* Etirement ($\ell > \ell_0$) ; $\vec{T}$ rentre dans le ressort.
* Compression ($\ell < \ell_0$) ; $\vec{T}$ sort du ressort.
* $T = f(\Delta\ell)$.



Moment cinetique :

Definition : Soit un point materiel de masse m repère par le vecteur position $\vec{OM} = \vec{r}$ et qui possède une vitesse $\vec{v}$. de moment cinetique du corps par rapport à « o » est donné par :

$\vec{L} = (\vec{r} \wedge \vec{P}) = (\vec{r} \wedge m\vec{v})$

$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$.

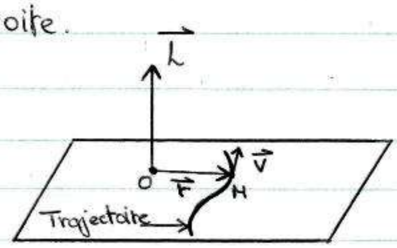
$\vec{P}$: Quantité de mouvement $= m\vec{v}$.

Propriété de $\vec{L}$:

* Direction : $\vec{L} \perp \vec{r}$ et $\vec{L} \perp \vec{v}$

$L \perp$ plan formé par $\vec{r}$ et $\vec{v}$

* module « intensité » : $|\vec{L}| = m|\vec{r}|.|\vec{v}|.|\sin(\vec{r}, \vec{v})|$
* Sens donné par la règle de la main droite.



Par convention,

⊙ Sortant

⊗ Rentrant

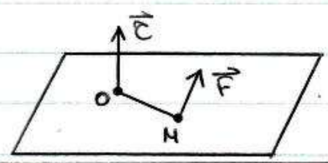
Moment d'une force.

On appelle moment d'une force $\vec{F}$ appliqué sur le point materiel, par rapport a « o », la grandeur :

$\vec{\tau} = (\vec{OM} \wedge \vec{F})$; $\vec{OM} = \vec{r}$. d'unité : N.m

Propriétés de $\vec{\tau}$:

* Direction : $\vec{\tau} \perp \vec{OM}$ et $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ donc $\vec{\tau} \perp$ au plan formé par $\vec{OM}$ et $\vec{F}$.
* Sens : Donné par la règle de la main droite.
* Module : $|\vec{\tau}| = |\vec{OM}|.|\vec{F}|.|\sin(\vec{OM}, \vec{F})|$



Théorème du moment cinetique :

Définition :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Verification :

$\vec{L} = (\vec{r} \wedge \vec{P})$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\frac{d}{dt} = \vec{v}$; $p = m\vec{v}$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = m.\vec{a}$

avec $ma = F$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge (m\vec{v}) + \vec{r} \wedge (\vec{F})$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \wedge \vec{v}) + \vec{r} \wedge (\vec{F})$ « $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ »

$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = r \wedge \vec{F} = \tau(\vec{F})$.

<u>Conservation du moment cinetique.</u>

En absence de force exterieure agissant sur le point materiel ou dans le cas ou on a des forces centrales qui agissent sur le point materiel, on a conservation du moment cinetique donc; $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

<u>1er cas.</u> $\vec{F} = 0$

Pour un système isolé « $\vec{F} = \vec{0}$ »

$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} \wedge \vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = cte$.

<u>2ème cas:</u>

des forces centrales sont des forces qui passent par point fixe "o" et qui sont parallèles à $\vec{OM}$ et qui dépendent généralement de $r = |\vec{OM}|$.

donc $\vec{F}$ s'écrit:

$\vec{F} = F\,\vec{u}_r$; $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$

$\vec{F} \,//\, \vec{OM}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{F})$; $\vec{r} = \vec{OM}$

$\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ « $\vec{F} \,//\, \vec{r}$ »

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

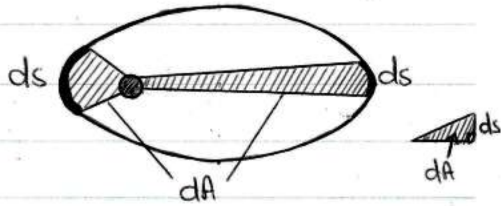
<u>Remarque:</u>

la force gravitationnelle est une force centrale.

<u>Conséquence de la conservation du moment cinetique:</u>

<u>2ème loi de Kepler: "loi des aires":</u>

la ligne joignant le soleil et la planète balaie des aires cycles en des temps égaux



ds: longueur de l'arc

dA: d'aire d'un triangle droit.

$dA = \frac{1}{2} r . ds$

$ds = r . d\theta \Rightarrow dA = \frac{1}{2} r \times r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$.

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$.

la planète est soumise a la force gravitationelle F_G.

$F_G = \frac{G M_s . m}{r^2}$; $\vec{F_G} \,//\, \vec{r}$.

M_s: masse du soleil.

m: masse de la planète

F_G est une force centrale.

$\Rightarrow \vec{L} = cte$; $\frac{dL}{dt} = 0$

$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$

en coordonnées polaires:

$\vec{V} = V_r\vec{u_r} + V_\theta\vec{u_\theta}$

$\vec{r} = r\vec{u_r}$

$\vec{L} = m\left(r\vec{u_r} \wedge (V_r\vec{u_r} + V_\theta\vec{u_\theta})\right)$

$\vec{L} = m\left(rV_r(\vec{u_r}\wedge\vec{u_r}) + rV_\theta(\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta})\right)$

on a: $\vec{u_r}\wedge\vec{u_r} = 0$ et $\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta} = \vec{u_z}$.

$\vec{u_z}\perp\vec{u_r}$ et $\vec{u_z}\perp\vec{u_\theta}$

$\vec{L} = m.r.V_\theta\vec{u_z}$.

Sachant que: $V_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$.

$\vec{L} = m.r.r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_z} = m.r^2.\frac{d\theta}{dt}\vec{u_z} = cte$

$m.r^2.\frac{d\theta}{dt} = cte$.

2eme loi de Kepler:

$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\theta}{dt} = cte$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{2dA}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} = cte$

$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{L}{2m}$

Remarque:

* $\frac{dA}{dt}$ est appelée vitesse aerolaire
* $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = m\frac{|\vec{r}\wedge\vec{v}|}{2m}$

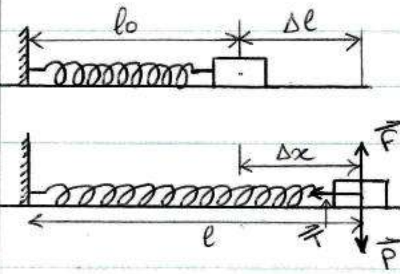
$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{r}\wedge\vec{v}|}{2}$

A savoir:

En coordonnées polaires l'expression de $\vec{L} \Rightarrow \vec{L} = m r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u_z}$.

Mouvements Particuliers:

Mouvement Harmonique: "Sinusoïdale".



On tire le ressort et puis on le lache.

le contact entre l'objet et le support horizontal est lisse.

R.F.D.:

$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m\vec{a}$

oy: $C - P = 0 \Rightarrow C = P = mg$

ox: $-T = ma$

$T = K|\Delta l|$.

$\Delta l = l - l_0 > 0 \Rightarrow |\Delta l| = l - l_0$

$\Delta l = \Delta x = x - x(0) = x - \Rightarrow \Delta l = x$

ox: $-kx = ma \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt}$.

$-kx = m\frac{d^2x}{dt}$.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$ "Equation differentielle du 2eme ordre"

L'equation est équivalente à:

$\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = 0$

La solution est: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$.

A: amplitude

ω: Pulsation (rad/s) | φ: phase initiale

$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Un mouvement harmonique est un mouvement periodique

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

<u>Vitesse:</u>

$x = A \sin(\omega t + \varepsilon)$

$v = \frac{dx}{dt} = +\omega A \quad (\omega t + \varepsilon).$

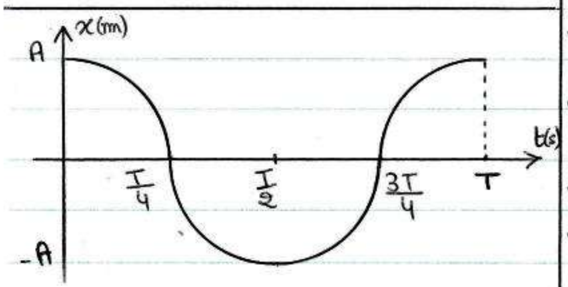
<u>Acceleration:</u>

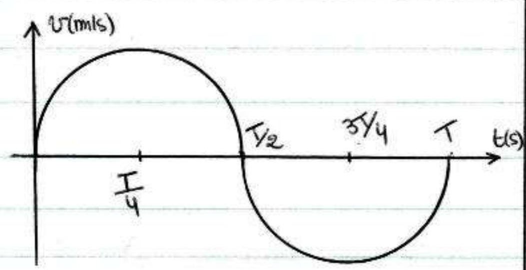
$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varepsilon).$

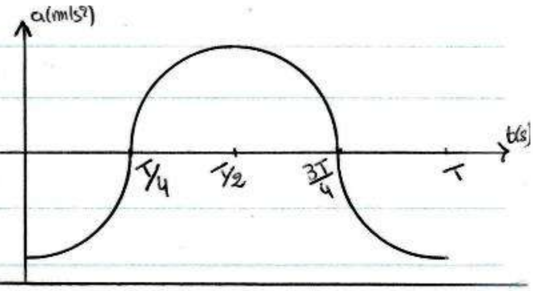
on trace $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$.

$t = 0s$, $\ell = 0$, $x = A$; $v = 0$

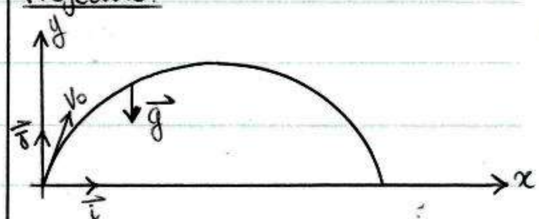
$x = A \sin\left((\omega t) + \frac{\pi}{2}\right)$







<u>Projectile:</u>



<u>R.F.D.:</u>

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{g}$: acceleration de pesanteur.

$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \vec{a_x} = 0 \\ \vec{a_y} = -g \end{array} \right.$

$V_x = \int a_x \, dt + cte = cte$

at $= 0s$ $\vec{V_0} \left| \begin{array}{l} V_{0x} = +V_0 \cos\theta. \\ V_{0y} = V_0 \sin\theta. \end{array} \right.$

$V_x = V_{0x} \Rightarrow V_x = V_0 \cos\theta.$

$V_y = \int -g \, . \, dt + cte = -gt + cte.$

at $= 0s$ $V_y = V_0 \sin\theta \Rightarrow$

$V_y = -gt + V_0 \sin\theta.$

$x = \int V_x \, dt + cte = \int V_0 \cos\overset{(\theta)}{} dt + cte$

$x = V_0 \cos(\theta) . t + cte$

$t = 0s$, $x = 0 \Rightarrow cte = 0$

$x = V_0 \cos(\theta) \times t$ ①

$y = \int V_y \, dt + cte$

$y = -\int g t . dt + \int V_o \sin\theta . dt + cte.$

$y = -\frac{g}{2} t^2 + V_o \sin\theta . t + cte.$

à $t=0 \Rightarrow cte = 0$

$y = -g \frac{t^2}{2} + V_o \sin\theta (t)$ ②

<u>L'equation de la trajectoire:</u>

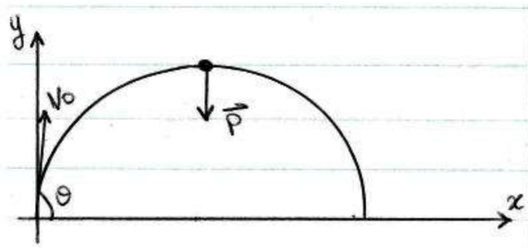
Trouver y en fonction de x:

$x = V_o \cos\theta . t \Rightarrow t = \frac{x}{V_o \cos\theta}$ dans ②

on aura:

$$y = -g \left(\frac{x}{V_o . \cos\theta}\right)^2_{\times 2} + V_o \sin(\theta) \frac{x}{V_o \cos(\theta)}$$

$$y = -g \frac{x^2}{2 \times V_o^2 \cos^2\theta} + \tan(\theta) \times x.$$



<u>Hauteur maximale:</u>

$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow V_y = 0$

$V_y = -gt + V_o \sin\theta = 0$

$t = \frac{V_o \times \sin\theta}{g}$ dans ②

$$y_s = -g \left(\frac{V_o \times \sin\theta}{g}\right)^2 \times \frac{1}{2} + V_o \times \sin(\theta) \times \frac{V_o . \sin\theta}{g}$$

$$y_s = -\frac{V_o^2 \times \sin^2\theta}{2g} + \frac{V_o^2 \times \sin^2(\theta)}{g} = \frac{V_o^2 \times \sin^2(\theta)}{2g}$$

y_s : y sommet.

<u>Portée:</u>

La portée est la distance maximale horizontale "sur les "x"" entre le point de tir et le point $y = 0$.

$y = 0$

$y = \frac{-g}{2 V_o^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \times x = 0$

$x = 0$ "au début (point de tir"

$x = \frac{V_o^2 \sin 2\theta}{g}$

avec "$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$"

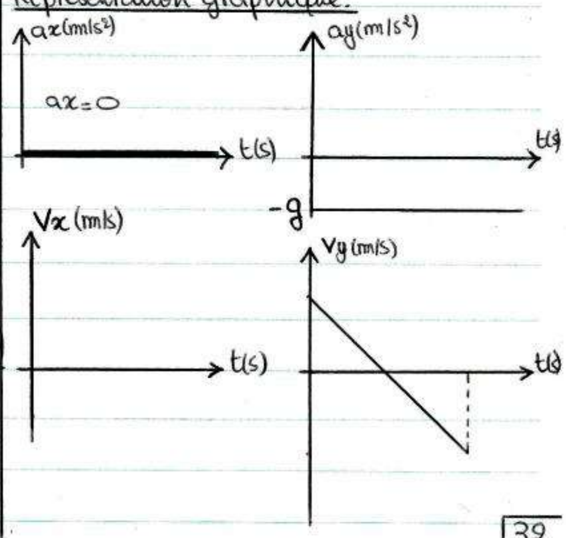
$$y = \frac{-g}{2 V_o^2 \cos^2\theta} \times \frac{V_o^4 (\sin 2\theta)^2}{g^2} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{V_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$y = \frac{-V_o^2 \times (4 \sin^2\theta \times \cos^2\theta)}{2 \cos^2\theta \times g} + \frac{V_o^2 \sin\theta (2 \sin\theta \cos\theta)}{\cos g}$$

$$y = \frac{-2 V_o^2 \times (\sin^2\theta \cos^2\theta)}{\cos^2\theta \times g} + \frac{2 V_o^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\cos^2\theta \times g}$$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{V_o^2 \sin 2\theta}{g}$

<u>Representation graphique:</u>



Chapitre : Travail et Energie :

"Partie travail indisponible"

Energie cinetique :

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$; elle est par nature ≥ 0

Théoreme de l'energie cinetique :

$$W|\overrightarrow{F_{ext}}|_A^B = \Delta E_c|_A^B = E_{c(B)} - E_{c(A)}.$$

$$\int_A^B \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{dl} = E_{c(B)} - E_{c(A)}.$$

$$= \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2.$$

Demonstration :

R.F.D : $\overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$$W(\overrightarrow{F_{ext}})|_A^B = \int_A^B \overrightarrow{F_{ext}} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B m\vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On a : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

$$W(\overrightarrow{F_{ext}})|_A^B = \int_A^B m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \overrightarrow{dl} \quad \boxed{\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{V}}$$

$$W(\overrightarrow{F_{ext}}) = \int_A^B m \cdot \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

On a : $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot V + V \cdot \frac{dV}{dt} = 2V \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{V} \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$= 2V\frac{dV}{dt}.$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{V} = V \cdot dV$$

$$W(\overrightarrow{F_{ext}})|_A^B = m \int_A^B V \cdot dV = m\left[\frac{V^2}{2}\right]_A^B$$

$$= m\frac{V_B^2}{2} - m\frac{V_A^2}{2} = E_{c(B)} - E_{c(A)}$$

Remarque :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \quad \text{avec } p = mv.$$

Energie potentielle :

L'Energie potentielle est une energie lié a la position du corps est dénommée $E_p = f(x, y, z)$.

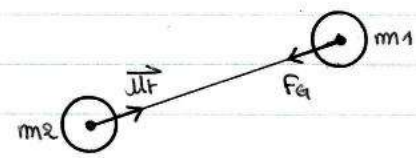
Energie potentielle gravitationnelle :

On défini :

$$E_{pg} = -\int \overrightarrow{F_G} \cdot \overrightarrow{dl} + cte$$

$$\overrightarrow{F_G} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$\overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ "déplacement en coordonnés polaires"



$$\overrightarrow{F_G} = F_r\,\overrightarrow{u_r} \; ; \; F_r = \frac{-G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\overrightarrow{F_G} \cdot \overrightarrow{dl} = F_r \cdot dr\,(\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_r}) + 0 \cdot r\,d\theta(\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\theta})$$

$$\overrightarrow{F_G} \cdot \overrightarrow{dl} = F_r \cdot dr \quad \text{avec } "\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_r} = 1"$$

$$\overrightarrow{F_G} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{-G m_1 m_2}{r^2} \times dr.$$

$$E_{pG} = -\int \frac{-G m_1 \cdot m_2}{r^2} \times dr + cte$$

$$E_{pG} = G \cdot m_1 \cdot m_2 \int \frac{dr}{r^2} + cte$$

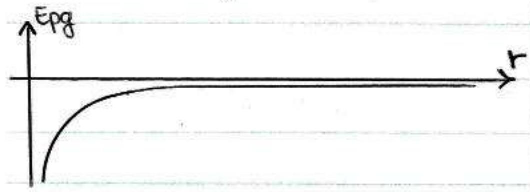
$$E_{pG} = G \cdot m_1 \cdot m_2 \left[-\frac{1}{r}\right] + cte$$

$$E_{pG} = \frac{-G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} + cte.$$

Origine des energies potentielles Gravitationnelles:

$r \to \infty \Rightarrow E_{pG} = 0J \Rightarrow cte = 0$

$\Rightarrow E_{pG} = \frac{-G m_1 m_2}{r}$



Energie potentielle gravitationnelle terestre:

$E_{pg} = \frac{-G.M_T.m}{r} + cte$ $\quad m_1 = M_T$

$m_2 = m$

M_T : masse de la terre.

m : masse d'un corps.

$r = R_T + h$

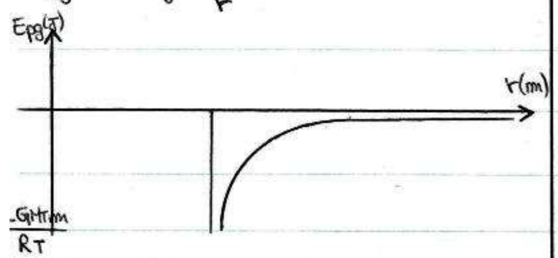
On a: $g_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2}$ = accélération de la pesanteur.

$G.M_T = g_0.R_T^2$.

$E_{pg} = \frac{-m.g_0.R_T^2}{r} + cte$

$cte = 0$ $(E_{pg}(0) = 0J)$

$E_{pg} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r}$.



$E_{pg}(R_T) = -m g_0 . R_T$

$E_{pg}(R_T) = -\frac{G.m.M_T}{R_T}$ avec $g_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2}$

Au voisinnage de la terre:

$\vec{P} = m\vec{g_0}$ $\quad r = R_T + h$ $\quad R \ll R_T$

$E_{pg} = -\int \vec{P}.\vec{dl} + cte$ $\quad \vec{g_0}\downarrow \quad \downarrow\vec{P}$

$\vec{g_0} = -g_0\vec{j}$

$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

$\vec{P} = -m.g_0.\vec{j}$

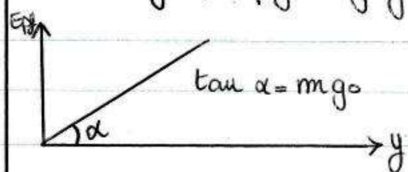
$\vec{P}.\vec{dl} = -m g_0 . dy$.

$E_{py} = -\int -m g_0 \, dy + cte$

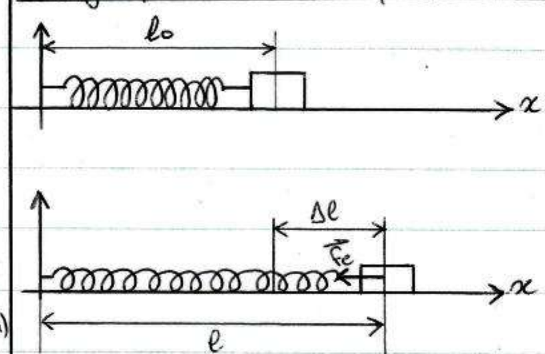
$E_{py} = m g_0 \int dy + cte = m g_0 y + cte$.

$y = 0 \Rightarrow E_{pg} = 0J$.

$\Rightarrow cte = 0J \Rightarrow E_{pg} = m g_0 y \Rightarrow$ droite



Energie potentielle elastique: (Ressort).



$\vec{F_{el}} = -K\Delta l = -K\Delta l\,\vec{i}$

$E_{pel} = -\int \vec{F_{el}}.\vec{dl} + cte$

$\vec{dl} = dx\vec{i}$

$\Delta l = l - l_0 = x - 0$

$\vec{F_{el}} = -Kx\vec{i}$

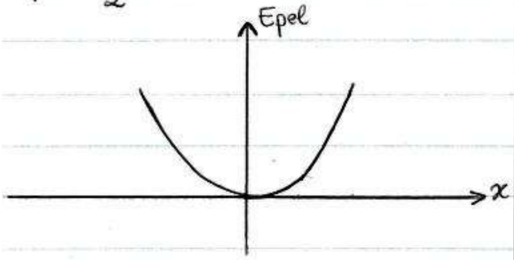
$E_{pel} = \int -Kx\,dx + cte$

$E_{pel} = K\int x\,dx + cte = K\left[\frac{x^2}{2}\right] + cte$

$E_{pel} = \frac{1}{2}Kx^2 + cte$

$x = 0 \Rightarrow E_{pel} = 0 \Rightarrow cte = 0J.$

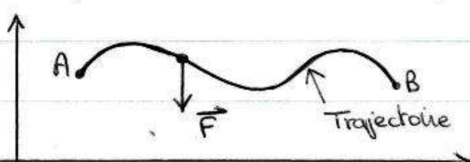
$E_{pel} = \frac{1}{2}Kx^2.$



Forces conservatives:

on dit qu'une force "$\vec{F_c}$" est conservative ou qu'elle dérive d'un potentiel si son travail entre deux points A et B ne depend pas du chemin suivi, ils depend uniquement des positions initiale et finale: «A» et «B».

Exemple: Calcul du travail d'un poids



$W(\vec{P})|_A^B = \int_A^B \vec{P}.\vec{dl}$

$\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g} = -g\vec{j}$

$\vec{P} = -mg\vec{j}$

$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$\vec{P}.\vec{dl} = -mg\,dy.$

$W(\vec{P}) = -mg\int_A^B dy$

$W(\vec{P}) = -mg[y]_A^B = -mg[y_B - y_A]$

Remarque

* $\vec{F_G}$, $\vec{P}$ et la tension du ressort sont des forces conservatives
* le travail d'une force conservative le long d'un chemin fermé est nul.

La relation entre l'energie potentiel et la force conservative.

Par définition, la variation de l'energie potentielle entre deux points «A» et «B» est liée au travail de la force conservative associée a cette energie telque:

$W(\vec{F_c})|_A^B = -\Delta E_p|_A^B$

$W(\vec{F_c})|_A^B = E_p(A) - E_p(B).$

Exemple:

$E_{pg} = mgy \qquad E_p(0) = 0J.$

l'energie potentiel du poids.

$W(\vec{P})|_A^B = -\Delta E_p|_A^B$

$W(\vec{P})|_A^B = E_p(A) - E_p(B)$

$W(\vec{P})|_A^B = mgy_A - mgy_B.$

$W(\vec{P})|_A^B = mg(y_A - y_B).$

Remarque:

* $E_p(B) = -\int_A^B \vec{F_c}.\vec{dl} + E_p(A)$: force integrale
* $dw(\vec{F_c}) = -dE_p$: forme differentielle.

Théorème de l'energie mécanique:

Forces non conservatives:

Considérons un point materiel soumis a un ensemble de forces exterieurs «$\vec{F_{ext}}$»:

"$\vec{F_{ext}}$" est décomposée
- Forces conservative "F_c"
- Forces non conservatives "F_{NC}"

A partir du théorème de l'energie cinetique, on a:

$W(\vec{F_{ext}})|_A^B = \Delta Ec|_A^B$.

$\vec{F_{ext}} = \vec{F_C} + \vec{F_{NC}}$

$W(\vec{F_C})|_A^B + W(\vec{F_{NC}})|_A^B = \Delta Ec|_A^B$.

$-\Delta Ep|_A^B + W(\vec{F_{NC}})|_A^B = \Delta Ec|_A^B$.

$W(\vec{F_{NC}})|_A^B = (\Delta Ec + \Delta Ep)|_A^B$

$\underbrace{W(\vec{F_{NC}})|_A^B = \Delta E_T|_A^B}$

Théoreme de l'energie totale.

Résultats:

Pour un système conservatif ou il existe que des forces conservatives, on a: $\vec{F_{NC}} = 0$.

$\vec{F_{ext}} = \vec{F_C}$ on aura.

$W(\vec{F_{NC}})|_A^B = 0 \Rightarrow \Delta E_T|_A^B = 0$.

$E_T(B) - E_T(A)$.

L'energie totale se conserve au cours du temps.

Remarque:

Les forces de frottements sont des forces non conservatives:

$W(\vec{F_{NC}}) < 0 \Rightarrow \Delta E_{pT} < 0$

L'energie totale diminue pour un système non isolé (non conservatif).

Relation entre la force conservative et la derivée de l'energie potentielle:

$dw(\vec{F_C}) = -dEp$.

$\vec{F_C} \cdot \vec{dl} = -dEp$.

$Ep = f(x, y, z)$.

$$dEp = \frac{\partial Ep}{\partial x} dx + \frac{\partial Ep}{\partial y} dy + \frac{\partial Ep}{\partial z} dz.$$

$$\vec{F_C} \cdot \vec{dl} = F_{Cx} dx + F_{Cy} dy + F_{Cz} dz$$
$$= \frac{-\partial Ep}{\partial x} dx + \frac{-\partial Ep}{\partial y} dy + \frac{-\partial Ep}{\partial z} dz.$$

Par identification:

$$\vec{F_C} \left| \begin{array}{l} F_{Cx} = \frac{-\partial Ep}{dx} \\ F_{Cy} = \frac{-\partial Ep}{dy} \\ F_{Cz} = \frac{-\partial Ep}{dz} \end{array} \right.$$

ceci donne:

$\vec{F_C} = -\vec{\nabla} Ep = -\text{grad}\, Ep$.

$\vec{\nabla}$: Nabla: $\frac{\partial \cdot}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \cdot}{\partial z} \vec{k}$

En coordonnées polaires:

$\vec{F_C} = F_{Cr} \vec{u_r} + F_{C\theta} \vec{u_\theta}$

$\vec{dl} = dr \vec{u_r} + r d\theta \vec{u_\theta}$.

$dEp = \frac{\partial Ep}{\partial r} dr + \frac{\partial Ep}{\partial \theta} d\theta$.

$dw(\vec{F_C}) = -dEp$

$\vec{F_C} \cdot \vec{dl} = \frac{-\partial Ep}{\partial r} dr - \frac{\partial Ep}{\partial \theta} d\theta$.

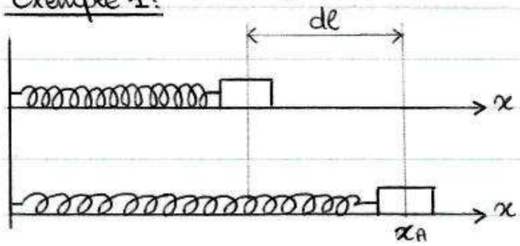
$F_{Cr} \cdot dr + F_{C\theta}\, r d\theta = \frac{-\partial Ep}{\partial r} dr - \frac{\partial Ep}{\partial \theta} d\theta$

$\Rightarrow F_{Cr} = \frac{-\partial Ep}{\partial r}$.

$F_{C\theta} = \frac{-\partial Ep}{\partial \theta} \times \frac{1}{r}$

Tracé d'une courbe d'énergie:

Exemple 1:



On a un contact lisse : pas de frottement

pour $x = x_A$; on a: $V = 0\,m/s$

$E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0\,J$

$E_p = E_{py} + E_{pel}$ avec $E_{py} = 0\,J$.

$E_p = E_{pel} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2$.

$\Delta \ell = x_A - x_0 = x_A$.

$E_p = \frac{1}{2} k (x_A)^2$

$E_T(A) = E_c(A) + E_p(A)$

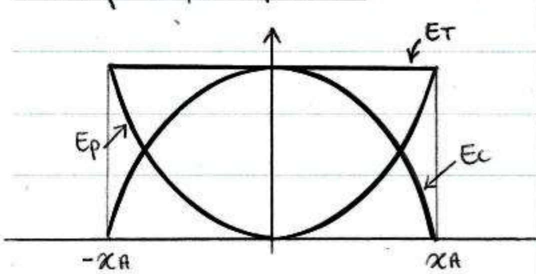
$E_T(A) = \frac{1}{2} k (x_A)^2$

On a que des forces conservatives.

$E_T = cte = \frac{1}{2} k (x_A)^2$

$E_{pel}(\;) = \frac{1}{2} k (x)^2 = E_p(x)$.

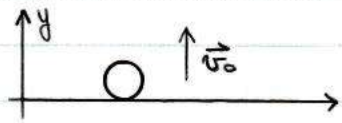
à n'importe quelle position:



Tracer d'une courbe d'énergie:

Exemple:

Si on lance un corps avec une vitesse v_0 à partir du sol vers le haut,



on néglige les frottements.

on a que des forces conservatives: $\vec{P}$

on a conservation de l'énergie totale.

$E_T(y=0) = E_T(y)$

$E_T(y=0) = E_c(y=0) + E_p(y=0)$

$$\left.\begin{array}{l} E_c(y=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ E_{py}(y=0) = mgy \end{array}\right\} E_T(y=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 = cte$$

$E_c(y) = \frac{1}{2} m v^2$

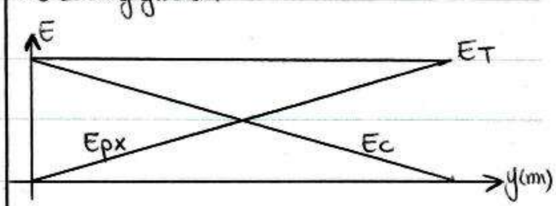
$E_{py}(y) = mgy$

$E_T(y) = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = \frac{1}{2} m v_0^2$

pour $y = y_{max}$, on a : $v = 0\,m/s$

$E_T(y_{max}) = mg\,y_{max} = \frac{1}{2} m v_0^2$.

$v_0^2 = 2g\,y_{max}$.



Pour tracer E_c: $E_c = E_T - E_{py}$.

Etude qualitative du mouvement.

Etude liés d'un système soumis a des forces conservatives:

d'energie mécanique totale d'un système soumis a qu'a des forces conservatives est constante:

$E_T = E_c + E_p = $ constante.

Par nature on a l'energie cinetique $E_c \geqslant 0$

donc: $E_c = E_T - E_p \geqslant 0 \Rightarrow E_T \geqslant E_p$.

De ce fait pour avoir un mouvement:

$E_T \geqslant E_p$.

Exemples: Oscillateur harmonique.

$E_{pel} = \frac{1}{2} k x^2$.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Pas de frottement $\Rightarrow E_T = cte$

$E_T = E_c + \frac{1}{2} k x^2$

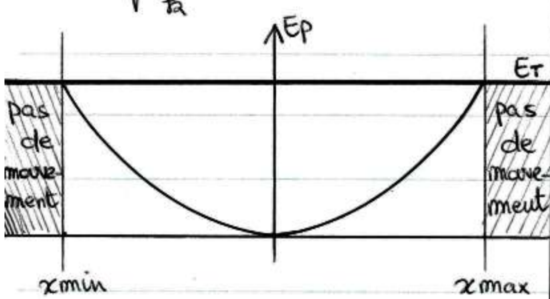
$E_c = E_T - \frac{1}{2} k x^2 \geqslant 0 \quad E_T \geqslant \frac{1}{2} k x^2$

$x^2 \leqslant \frac{2E_T}{k}$

$$-\sqrt{\frac{2E_T}{k}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{2E_T}{k}}$$

$x_{max} = \sqrt{\frac{2E_T}{k}}$

$x_{min} = -\sqrt{\frac{2E_T}{k}}$



Equilibre: Un point matériel est en equilibre lorseque sa vitesse et son accéleration sont nulles ce qui impose: $\sum \vec{F} = 0$

Determination des positions d'equilibres:

On cherche les positions d'equilibres pour un système conservatif. On peut utiliser un raisonnement energetique sachant une force conservative dérive d'une énergie potentielle:

$\vec{F} = \vec{F_c} = -\overrightarrow{grad} E_p = -\vec{\nabla} E_p$

$\vec{F_c} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i} \Rightarrow F_c = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i}$

à l'equilibre: $F_c = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$.

d'energie potentielle passe par un extremum « maximum ou minimum » aux points d'equilibres

Etude de stabilité des positions d'equilibres

Definition.

On dit que un equilibre est stable si quand on écarte le système de cette position; il revient spontanément a cette position.

Une position d'equilibre est instable si quand on écarte le système, il s'eloigne définitivement de cette position, ceci se traduit comme suit:

* Equilibre stable pour $x = x_0 \Rightarrow$ $\frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ « Ep minimale »
* Equilibre instable pour $x = x_0 \Rightarrow$ $\frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ « Ep maximale »

Exemple :

$E_p = 2x^3 - 3x^2$.

on a : $\frac{dE_p}{dx} = 6x^2 - 6x = (6x)(x-1)$.

on a : $x \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow 1$

$E_p(0) = 0J \longrightarrow$ maximum d'energie

$E_p(1) = -1J \longrightarrow$ minimum d'energie

$x = 0 \longrightarrow$ equilibre instable ($E_p$max)

$x = 1 \longrightarrow$ equilibre stable ($E_p$min).

Sinon :

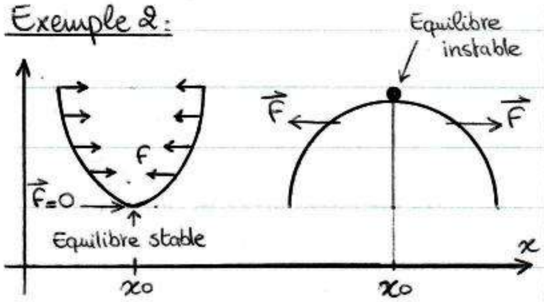
* $\frac{d^2E_p}{dx^2} = 12x - 6$, pour $x = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx} = -6 < 0$ "Equilibre instable"

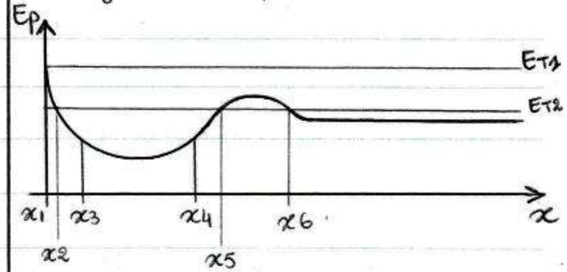
pour $x = 1 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx} = 6 > 0$

"Equilibre stable".

Exemple 2 :



Nature de mouvement en fonction de l'energie mécanique :



on a un mouvement pour $E_T \geqslant E_p$.

* Si $E_T = E_{T1}$:

on a un mouvement sur $x_1 \longrightarrow \infty$

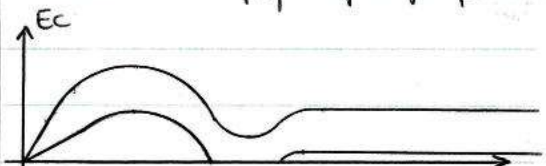
* Si $E_T = E_{T2}$

on a un mouvement :

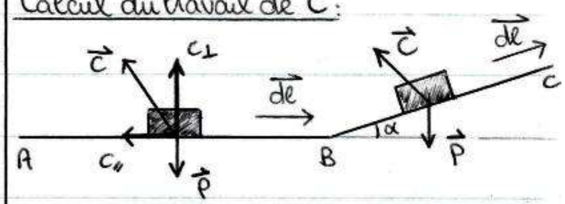
$x \in [x_2, x_5]$ oscillative

$x \in [x_6, \infty[$

On a : $E_c = E_T - E_p$; faire point par point :



Calcul du travail de $\vec{C}$:



des frottements sont caractérisés par le coefficient de frottement μd.

$W(\vec{C})|_A^C = W(\vec{C})|_A^B + W(\vec{C})|_B^C$.

$W(\vec{C})|_A^B = \int_A^B \vec{C}.\vec{dl} = \int_A^B (\vec{C_{\parallel}}+\vec{C_{\perp}}).\vec{dl}$

$W(\vec{C})|_A^B = \int_A^B (\vec{C_{\parallel}}).dl + \int_A^B (\vec{C_{\perp}}).dl$

$\vec{C_{\perp}} \perp \vec{dl} \Rightarrow \vec{C_{\perp}}.\vec{dl} = 0$

$\Rightarrow \int_A^B \vec{C_{\perp}}.\vec{dl} = 0$

$W(\vec{C})|_A^B = \int_A^B \vec{C_{\parallel}}.\vec{dl}$

$\vec{C_{\parallel}}.\vec{dl} = -C_{\parallel}.dl$

$W(C)|_A^B = -\int_A^B C_{\parallel}.dl$

$P = C_{\perp} = mg \Rightarrow C_{\parallel} = mg.\mu d$

$W(C)|_A^B = -\int_A^B mg\mu d\, dl = -mg.\mu d \int_A^B dl$

$W(C)|_A^B = -mg.\mu d.(AB).$

$W(\vec{C})|_B^C = \int_B^C \vec{C}.\vec{dl} = \int_B^C (\vec{C_{\parallel}}+\vec{C_{\perp}}).dl$

$W(\vec{C})|_B^C = \int_B^C \vec{C_{\parallel}}.\vec{dl} + \int_B^C \vec{C_{\perp}}.\vec{dl}$

$\vec{C_{\perp}} \perp \vec{dl} \Rightarrow \vec{C_{\perp}}.\vec{dl} = 0$

$\Rightarrow W(C_{\perp})|_B^C = 0.$

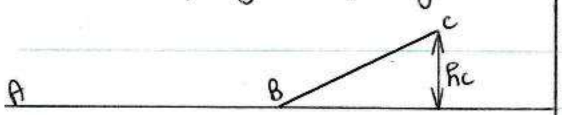
$W(\vec{C})|_B^C = \int_B^C \vec{C_{\parallel}}.\vec{dl} = -\int_B^C C_{\parallel}.dl$

$C_{\parallel} = C_{\perp}.\mu d$ avec $C_{\perp} = mg\cos\alpha$

$W(C)|_B^C = -\mu d\, mg\cos\alpha \int_B^C dl$

$W(C)|_B^C = -\mu d\, mg\cos\alpha.BC$

$W(C)|_A^C = -\mu d\, mg.AB - \mu d\, mg\cos\alpha.BC$



On a $\sin\alpha = \frac{h_C}{BC} \Rightarrow BC = \frac{h_C}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow$

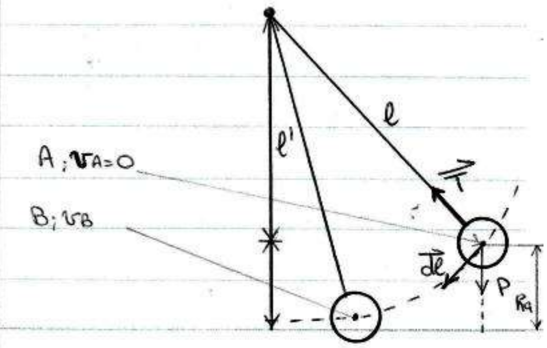
$W(C)|_A^C = -\mu d\, mgAB - \mu d\, mg\cos\alpha \frac{h_C}{\sin\alpha}$

Théorème de l'energie totale implique :

$\Delta E_T|_A^C = W(\vec{F_{N.C}})|_A^C$; $\vec{F_{N.C}} = \vec{C}$

$\Delta E_T|_A = W(\vec{C})|_A^C$ $\vec{E_T} = \vec{E_C} + \vec{E_p}$

Equation du mouvement a partir d'un raisonnement energetique:



$E_T(A) = E_c(A) + E_{pg}(A)$

$E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0 \Rightarrow v_A = 0$

$E_{pg}(A) = mgh_A$ $h=0$ on a $E_{pg} = 0J$

$h_A = l - l'$ $l' = l\cos\theta_{max}$

$h_A = l - l\cos\theta_{max} = l(1-\cos\theta_{max})$

$E_{pg}(A) = mgl(1-\cos\theta_{max})$

$E_T(A) = E_{pg}(A) = mgl(1-\cos\theta_{max}).$

Trouvons l'equation de mouvement:

$E_T = E_c + E_{pg}$; en n'importe qu'elle position

$E_T = \frac{1}{2} mv^2 + E_{pg}$

$E_{pg} = mgh$; $h = l - l\cos\theta.$

$E_T = \frac{1}{2} mv^2 + l(1-\cos\theta).$

En coordonnées polaires:

$v \begin{cases} \vec{v_r} = \frac{dr}{dt} \\ \vec{v_\theta} = r\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$ $r = l = cte$ $\begin{cases} v_r = \frac{dl}{dt} \\ v_\theta = l\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$

$$v = v_\theta \times \ell \frac{d\theta}{dt}$$

$$E_T = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Delta E_T \Big|_i^f = W(\vec{F_{NC}}) \Big|_i^f$$

$\vec{P}$: est une force conservative

$\vec{T}$: est une force non conservative

$$\Delta E_T \Big|_i^f = W(\vec{T}) \Big|_i^f = \int_i^f \vec{T} . \vec{d\ell} .$$

$$\vec{T} \perp \vec{d\ell} \Rightarrow W(T) = 0J .$$

$$\Delta E_T \Big|_i^f = 0 \Rightarrow E_T = cte \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} m\ell^2 \left[2 \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d^2\theta}{dt}\right] + mg\ell\left[0 - \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\right]$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$m\ell^2 \times \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d^2\theta}{dt} + mg\ell \times \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = 0$$

$$\ell \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

pour θ faible $\Rightarrow \sin\theta = \theta$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$ "oscillation harmonique"

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$