

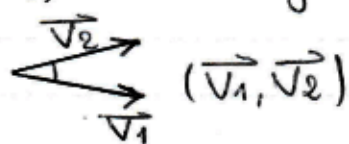
Cours Physique : 1^{er} semestre

Rappels:

Le produit scalaire de 2 vecteurs:

$$P = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \times |\vec{V}_2| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

(\vec{V}_1, \vec{V}_2) étant l'angle entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2



A retenir:

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad \text{"cos } \frac{\pi}{2} = 0 \text{"}$$

Forme analytique d'un produit scalaire:

Dans le repère cartésien:

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Du fait que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos(\vec{i}, \vec{i})$$

$$= |\vec{i}|^2 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs:

$$\vec{C} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 : \text{Produit vectoriel de } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2$$

\vec{C} a les propriétés suivantes:

$$|\vec{C}| = |\vec{V}_1| \times |\vec{V}_2| \times |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|$$

* La direction: $\vec{C} \perp \vec{V}_1, \vec{C} \perp \vec{V}_2$

$\Rightarrow \vec{C} \perp$ au plan formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

Sens: ($\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{C}$) forment un trièdre direct.

Trièdre direct: on passe du 1^{er} vecteur vers le 2^{ème} vecteur, et du 2^{ème} vecteur vers le 3^{ème} vecteur dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La forme analytique d'un produit d'un vecteur:

Dans le repère cartésien:

$$\vec{C} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{i} (y_1 z_2 - y_2 z_1) - \vec{j} (x_1 z_2 - x_2 z_1) + \vec{k} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

A savoir:

$$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad (\sin(0) = 0)$$

"parallèle"

Dérivée d'un vecteur

Soit $A(t)$ une fonction vectorielle:

$$A(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

parce que ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) sont des vecteurs

$$\text{constants: } \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

* Dérivé du produit scalaire

$$\frac{d}{dt} (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

Dérivé du produit vectoriel

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

Chapitre I: Cinématique du point matériel

Introduction:

la cinématique est l'étude d'un mouvement d'un objet sans s'intéresser aux causes du mouvement

Définitions

2.1) Notion du point matériel:

un point matériel est un objet de masse finie dont on néglige les dimensions spatiales.

2.2) Définitions d'un repère.

Repère spatial:

C'est un système constitué d'un point d'origine et d'axes non parallèles.

Repère de temps:

le temps permet de préciser le mouvement du mobile. Un chronomètre permet de mesurer les intervalles de temps.

2.3) Notion de mouvement:

Un corps est en mouvement si les coordonnées dans un repère changent.

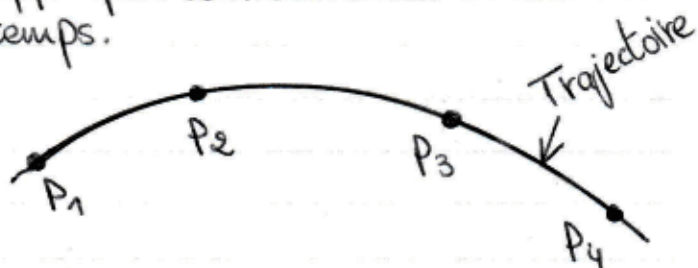
Un corps est immobile si les coordonnées dans un repère ne changent pas.

2.4) Notions de position:

la position d'un mobile représente l'emplacement de ce mobile par rapport à un repère.

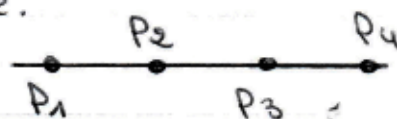
2.5) Trajectoire

la trajectoire d'un mobile représente l'ensemble de positions successives occupées par le mobile au cours du temps.



Exemples:

* Mouvement rectiligne: la trajectoire est une droite.



3)

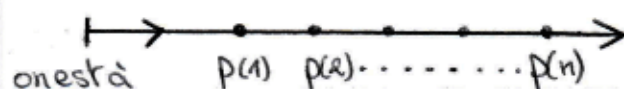
le mouvement Rectiligne:

mouvement à une dimension: "1D".

la trajectoire est une droite.

3.1) Repérage: un mobile M est repéré par la coordonnée cartésienne x.

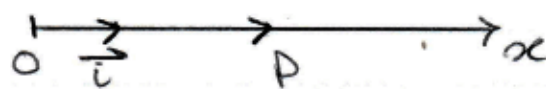
d'axe Ox est confondue avec la trajectoire



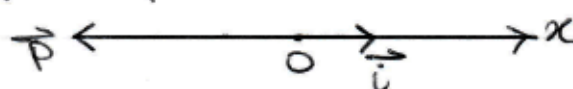
* Si un temps "t", le mobile se trouve au point "p"

$$\vec{OP} = x \vec{e}$$

* Si les vecteurs \vec{OP} et \vec{e} sont du même sens: $\vec{OP} = x \vec{e} > 0$



* Si les vecteurs \vec{OP} et \vec{e} sont de sens opposé: $\vec{OP} = x \vec{e} < 0$.



A savoir:

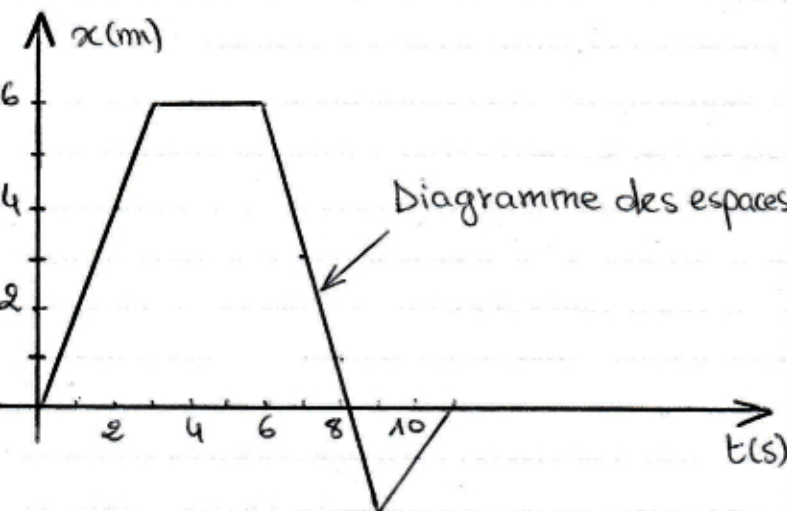
l'équation $x(t)$ est appelée équation de mouvement.

3.2) Diagramme des espaces:

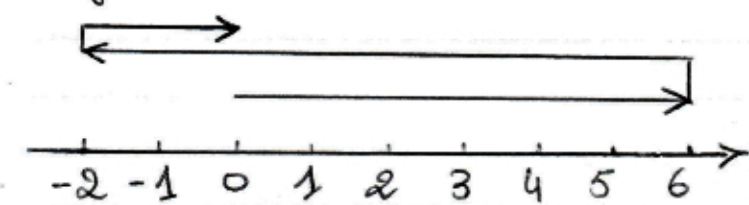
C'est la représentation de la fonction x en fonction du temps:

Exemple:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x (m)	0	2	4	6	6	6	6	3	1	-2	-1	0



Trajectoire:



3.3) Vitesse:

la vitesse d'un mobile représente la variation de la position au cours du temps: "permet de mesurer la rapidité"

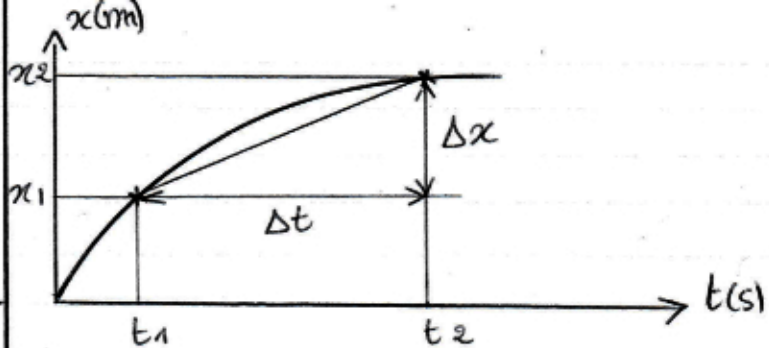
3.3.1) Vitesse moyenne:

Si le mobile se trouve à la position x_1 à l'instant t_1 et à la position x_2 à l'instant t_2 , la vitesse moyenne est définie par:

$$v_{m} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{Déplacement}}{\text{Durée du trajet}}$$

$$v_{m} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

d'unité de la vitesse est en (m/s)



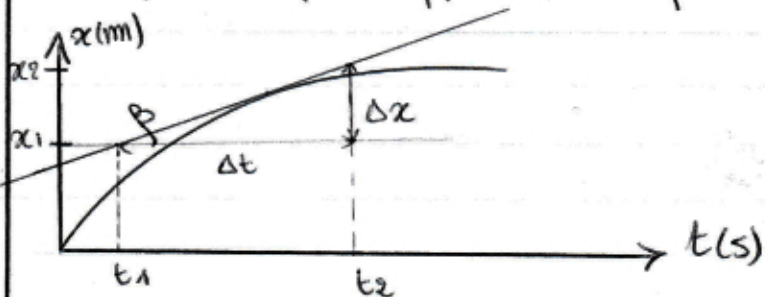
$v_m \Big|_{t_1}^{t_2}$ = pente de la droite qui passe par p_1 et p_2 .

Vitesse instantanée:

On définit la vitesse instantanée par:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

la vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps:



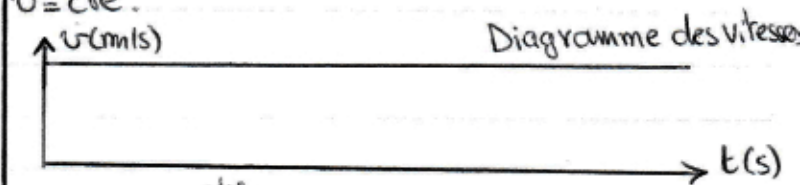
$v(t_1) = \tan(\beta)$ pente de la tangente à $x(t)$ en ce temps là.

À savoir:

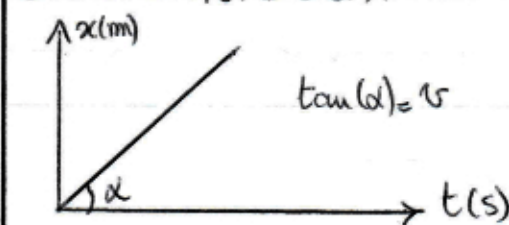
On a deux cas où on peut confondre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne:

1^{er} cas: si on a un mouvement uniforme, c'est à dire: la vitesse est constante:

$$v = cte$$



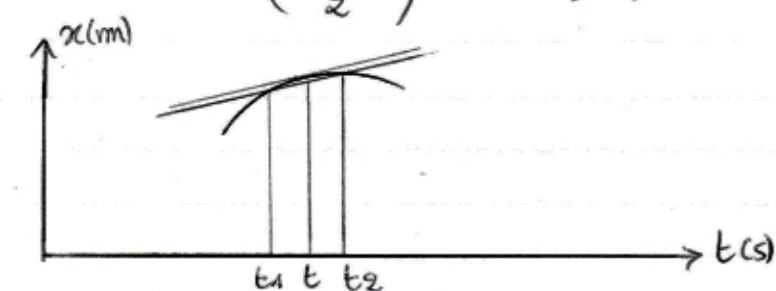
on a: $v_m \Big|_{t_1}^{t_2} = v(t)$:



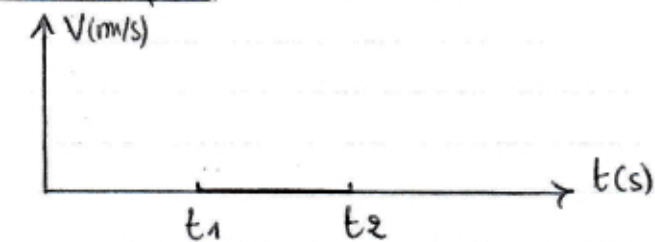
2^{ème} cas:

la vitesse instantané peut être assimilée à la vitesse moyenne au milieu de l'intervalle de temps:
 $\Delta t = t_2 - t_1$ quand $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v_m |_{t_1}^{t_2} = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) (\Delta t \rightarrow 0)$$



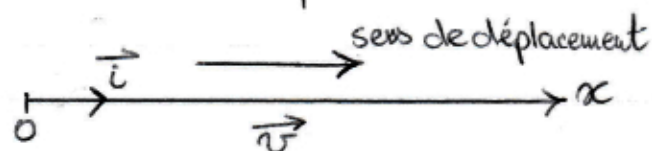
Remarque:



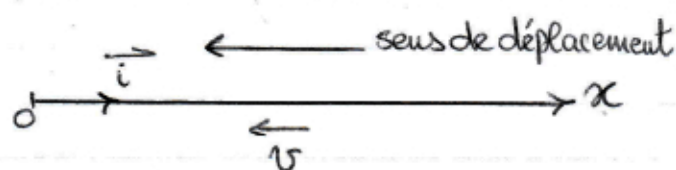
$v = 0$ m/s. Pas de mouvement entre t_1 et t_2 .

À savoir:

* $V > 0$: mouvement dans le sens positive des "x": sens de déplacement.



* $V < 0$: mouvement dans le sens négative des "x":



Distance parcourue, déplacement et position à partir du graphe $v(t)$:

À partir du graphe $\vec{v}(t)$ on obtient:

- * de déplacement.
- * de position.
- * Distance parcourue.

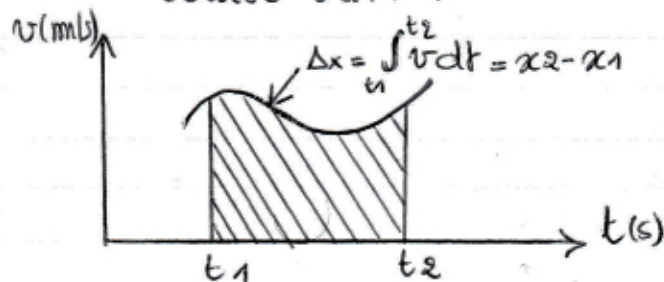
Le Déplacement:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \text{déplacement} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

d'aire sous la courbe $v(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$.



La position:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \Rightarrow x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt + x(t_1)$$

position t_2 position t_1

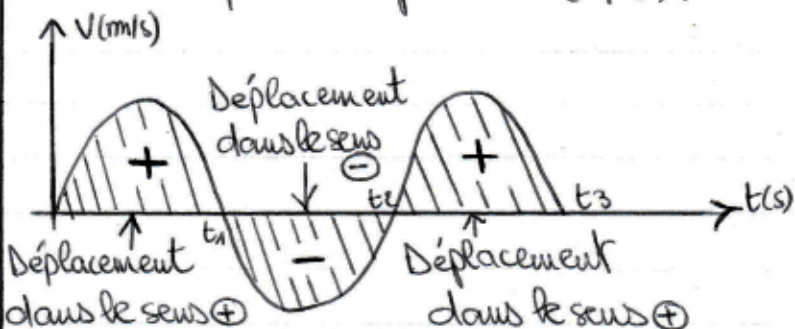
Distance parcourue:

$$l \Big|_{t_1}^{t_2} = \text{distance parcourue} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$l \Big|_{t_1}^{t_2} = |x_2 - x_1| = \left| \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \right| = \text{d'aire sous la courbe en valeur absolue}$$

Remarque:

l est une quantité positive ($l > 0$).



Calculons le déplacement de: $0 \rightarrow t_3$

$$x(t_3) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_3} v \cdot dt$$

$$= 0 \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt + t_1 \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt + t_2 \int_{t_2}^{t_3} v \cdot dt$$

$$x(t_3) - x(0) = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = 0 \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt > 0; A_2 = t_1 \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt < 0$$

$$A_3 = t_2 \int_{t_2}^{t_3} v \cdot dt > 0$$

Calculons la distance parcourue entre $t=0s$ et $t=3s$:

$$l_{0 \rightarrow 3} = \left| \int_{t_0}^{t_1} v \cdot dt \right| + \left| t_1 \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \right| + \left| t_2 \int_{t_2}^{t_3} v \cdot dt \right|$$

$$l_{0 \rightarrow 3} = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

4. Passage de la vitesse à la position:

Equation: $x(t) \xrightleftharpoons[\text{d'intégrale}]{\text{la dérivée}} v(t)$

Graphie:

$x(t) \xrightleftharpoons[\text{d'aire sous la courbe } v(t)]{\text{pente de } \tan(x(t))} v(t)$

d'accélération:

d'accélération exprime la variation de la vitesse au cours du temps.

d'accélération moyenne:

$$a_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

tel que: à t_2 , le mobile a une vitesse v_2
à t_1 , le mobile a une vitesse v_1 .
d'unité est: m/s^2 .

Accélération instantanée:

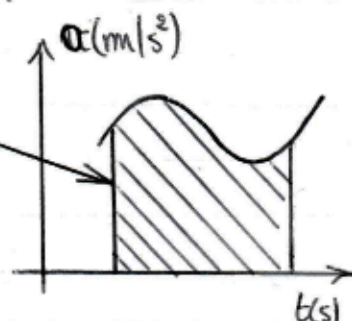
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

$$a = \frac{dv}{dt} : \text{d'accélération instantanée}$$

est la dérivée de $v(t)$:

Important:

$$t_1 \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt = \Delta V \Big|_{t_1}^{t_2}$$



À partir du graphe $a(t)$, on peut trouver la vitesse à chaque instant:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt$$

d'aire sous la courbe $a(t)$.

$$\Delta V \Big|_{t_1}^{t_2} = \text{Aire sous la courbe } a(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$V_2 - V_1 = \text{Aire sous } a(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$V_2 = \text{Aire sous } a(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + V_1$$

5. Passage de l'accélération à la vitesse:

Equation: $v(t) \xrightleftharpoons[\text{d'intégrale}]{\text{la dérivée}} a(t)$

Graphie: $v(t) \xrightleftharpoons[\text{d'aire sous la courbe } a(t)]{\text{pente de la tangente } v(t)} a(t)$

Quelques exemples de types de mouvements:

* $a = 0 m/s^2$; $V = cte$: de mouvement uniforme
* $a = cte$: de mouvement est uniformément varié:

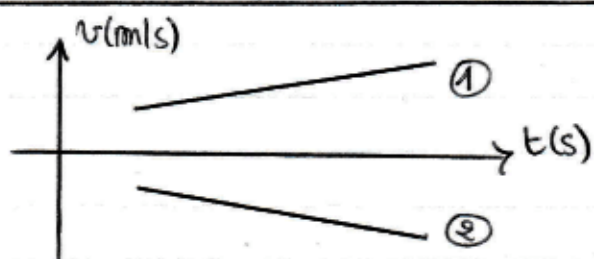
Si $\vec{V} \nearrow$: de mouvement est uniformément accéléré ($a \cdot v > 0$).

Si $\vec{V} \searrow$: de mouvement est uniformément décéléré ($a \cdot v < 0$).

* $a \neq \text{cte} \Rightarrow$ de mouvement est varié :

- Si $|\vec{V}| \nearrow$: de mouvement est accéléré ($a \cdot v > 0$)
- Si $|\vec{V}| \searrow$: de mouvement est décéléré ($a \cdot v < 0$).

Exemple :



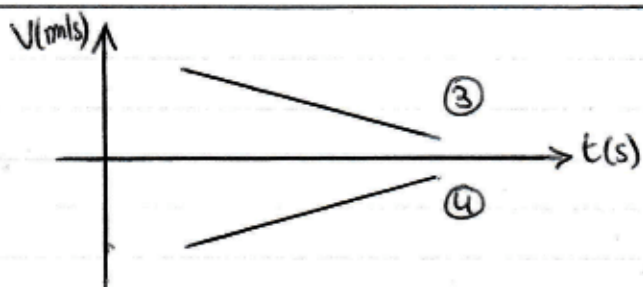
$v(t)$ est une droite $\Rightarrow a = \text{cte}$
 $a =$ pente de la droite.

1^{er} cas :

$a > 0$, $v > 0 \Rightarrow$ de mouvement est uniformément accéléré
 "a. v > 0" ou $|\vec{V}| \nearrow$

2^{ème} cas :

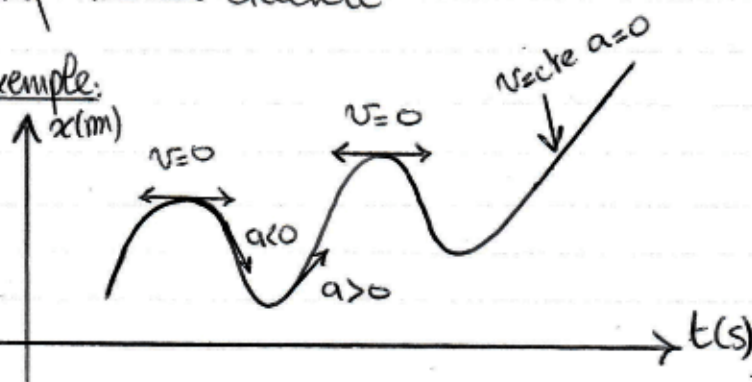
$a < 0$, $v < 0 \Rightarrow$ de mouvement est uniformément accéléré
 "a. v > 0" ou $|\vec{V}| \nearrow$



3^{ème} cas : $a < 0$, $v > 0$: mouvement uniformément décéléré.

4^{ème} cas : $a > 0$, $v < 0$: mouvement uniformément décéléré

Exemple :

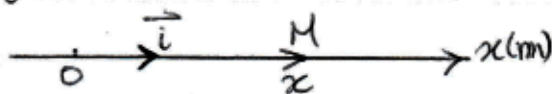


6. Vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération :

Vecteur position :

le vecteur position est le vecteur \vec{OM} qui indique la position du mobile par rapport à l'origine O.

$$\vec{OM} = x \vec{i}$$



$$\vec{OM} = \vec{x}(t)$$

Vecteur déplacement :

• Si à un instant "t₁", le mobile se trouve en M₁

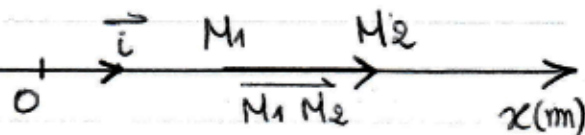
• Si à un instant "t₂", le mobile se trouve en M₂.

le vecteur déplacement : $\vec{M_1 M_2}$ est

$$\vec{M_1 M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}$$

$$\vec{M_1 M_2} = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i}$$

$$\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \vec{i}$$



Vecteur vitesse instantanée :

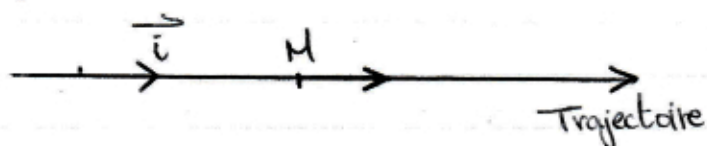
$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} ; v_x = \frac{dx}{dt}$$

Vecteur accélération instantanée :

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} ; a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Propriétés du vecteur vitesse:

- * Module: $|\vec{v}| = |v_x|$
- * Direction: Tangente à la trajectoire.
- * Sens: Sens du mouvement.
- * Origine: la position du mobile.



Propriétés du vecteur accélération pour le mouvement rectiligne:

- * Module $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2} = |a_x|$
- * Direction: Tangente à la trajectoire
- * Origine: la position du mobile.

Remarque:

Si le mouvement est accéléré, on a \vec{v} et \vec{a} dans le même sens:



Quelques mouvements particuliers:

1) Mouvement rectiligne uniforme:

$$a = 0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v = \text{cte}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v \cdot dt = v \int_{t_0}^t dt$$

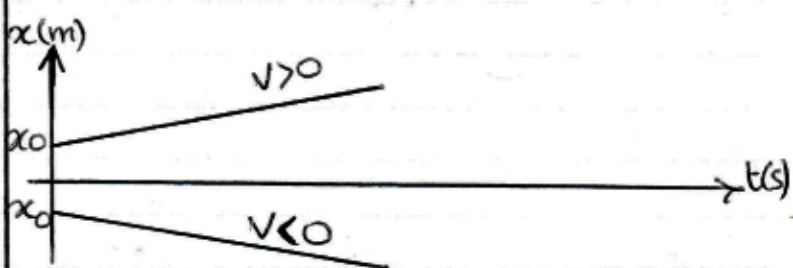
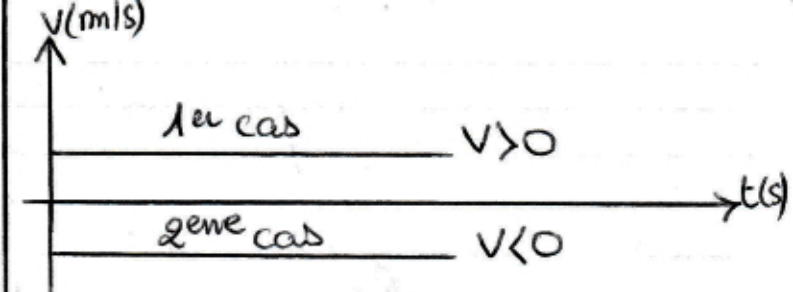
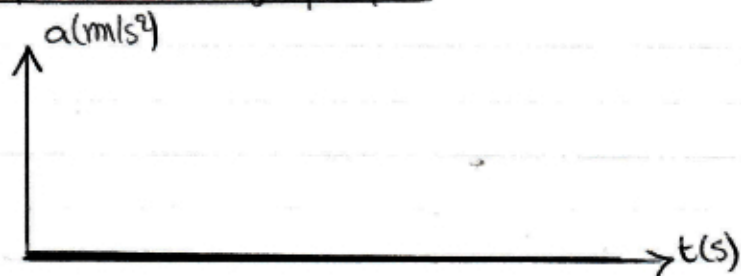
$$x(t) - x(t_0) = v(t - t_0)$$

Pour simplifier, on pose $t_0 = 0$

$$x(t) - x(0) = v \cdot t = v \cdot t$$

$$x(t) = v \cdot t + x(0)$$

Représentation graphique:



2) Mouvement rectiligne uniformément varié:

$$a = \text{cte} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = a \int_{t_0}^t dt \Rightarrow v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

$$\text{on pose } t_0 = 0 \Rightarrow v(t) - v(0) = a \cdot t$$

$$v(t) = a \cdot t + v(0); v(0) = v_0$$

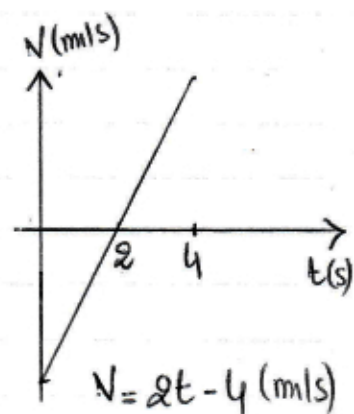
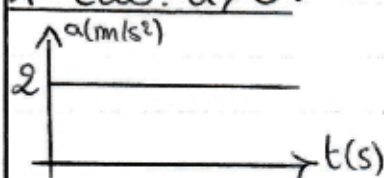
$$* v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

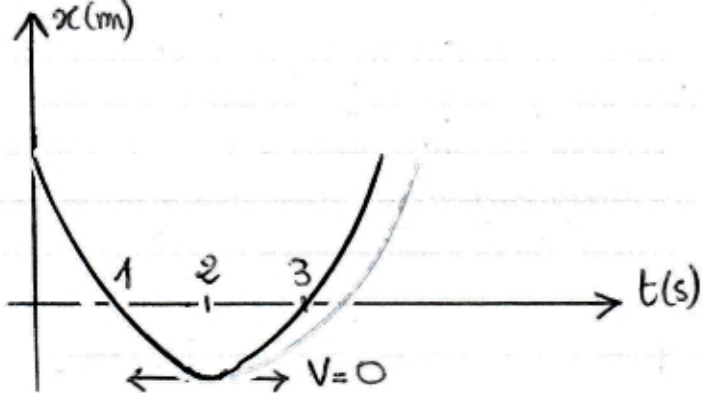
$$dx = (at + v_0) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t a \cdot t \cdot dt + \int_0^t v_0 dt$$

$$(x - x(0)) = a \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^t + v_0(t - t_0)$$

Représentation graphique:

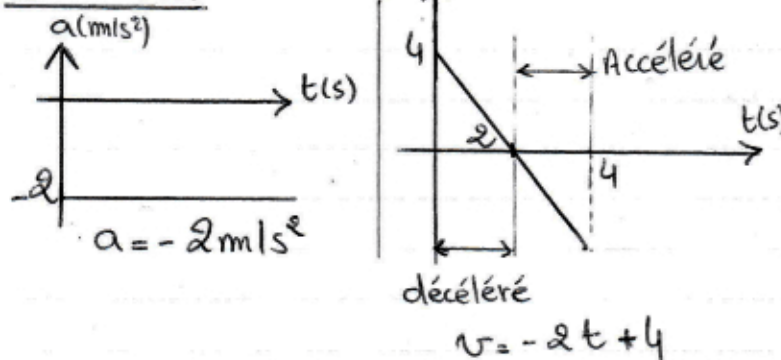
1er cas: $a > 0$:



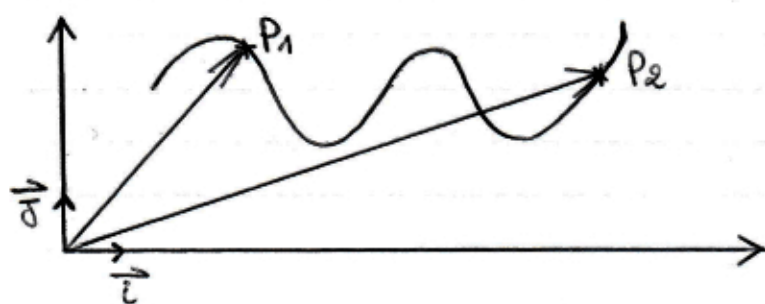


$$x = t^2 - 4t + 3 \text{ (m)}.$$

2^{ème} cas:



Mouvement dans un plan "2 dimensions"
en coordonnées cartésiennes:



* Vecteur position:

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

\vec{OP} : Vecteur position qui a comme origine le point O et l'extrémité le point P. $\vec{OP} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

* Vecteur déplacement:

de mobile se trouve à la position "P1" à t1 et se trouve à la position "P2" à t2.

$\vec{P1P2}$: Vecteur déplacement qui caractérise le changement de position (P1 → P2)

$$\vec{P1P2} = \vec{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}.$$

$$\vec{P1P2} = (x2 - x1)\vec{i} + (y2 - y1)\vec{j}.$$

Vecteur vitesse moyenne:

$$V_m \Big|_{t1}^{t2} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta(x\vec{i} + y\vec{j})}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} \Big|_{t1}^{t2}$$

$$V_m \Big|_{t1}^{t2} = (V_m)_x \vec{i} + (V_m)_y \vec{j}.$$

$$(V_m)_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ et } (V_m)_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Vecteur vitesse instantanée:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ et } v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}; \vec{v}_x \perp \vec{v}_y.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vecteur accélération moyenne:

$$\vec{a}_m \Big|_{t1}^{t2} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \Big|_{t1}^{t2} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \Big|_{t1}^{t2}$$

\vec{v}_1 : vitesse à l'instant "t1".

\vec{v}_2 : vitesse à l'instant "t2".

Vecteur accélération instantanée:

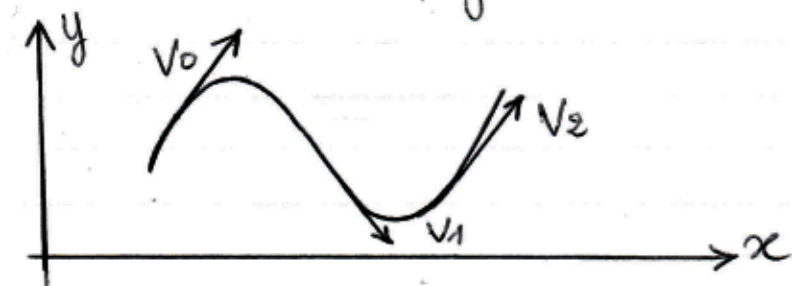
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j}.$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad \vec{a}_x \perp \vec{a}_y.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Propriétés du vecteur vitesse:

Origine: la position du mobile.
 Direction: Tangente à la trajectoire.
 Sens: de sens du mouvement.
 Module: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$



Aconatue:

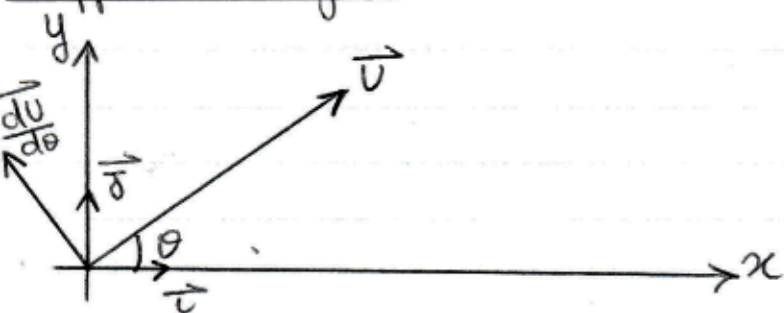
d'équation de la trajectoire est $y = f(x)$. Exemple:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 - 2 \end{cases}$$

$$x(t) = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y(x) = 4\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2 = x^2 - 2.$$

Dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à un cycle:



\vec{u} est un vecteur unitaire qui fait "theta" variable avec l'axe (ox)

$$\theta = (\vec{ox}, \vec{u}); |\vec{u}| = 1$$

$$\vec{u} = |\vec{u}| \cos(\theta) \vec{i} + |\vec{u}| \sin(\theta) \vec{j}.$$

$$\vec{u} = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}.$$

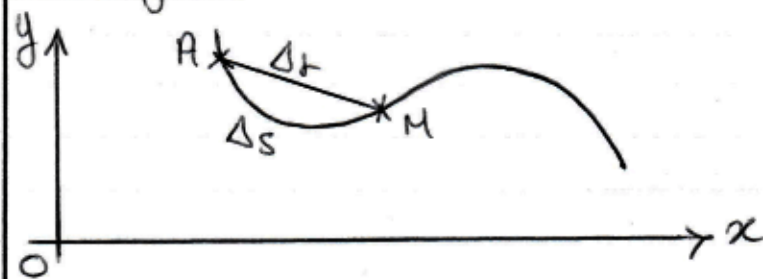
$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j}.$$

$$\vec{u} \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -(\cos(\theta) * \sin(\theta)) + (\sin(\theta) \cos(\theta))$$

$$\vec{u} \frac{d\vec{u}}{d\theta} = 0$$

Coordonnées intrinsèques:

Abscisse, vitesse et accélérations curvilignes:



de point "A" représentant la position du mobile à $t=0$ sur la trajectoire qu'on va prendre comme origine.

la valeur algébrique de l'arc \widehat{AM} est l'abscisse curviligne tel que

$S = \widehat{AM}$: Abscisse curviligne

S: représentant la distance parcourue par le mobile.

S: la longueur de l'arc \widehat{AM} .

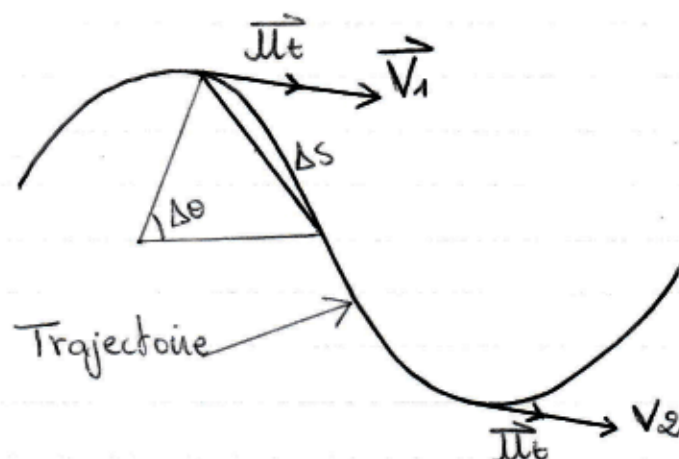
Vitesse curviligne:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$\frac{d\vec{r}}{ds}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire = \vec{u}_t .

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t.$$

Remarque:



* à t_1 , le mobile se trouve en m_1 .

* à t_2 , le mobile se trouve en m_2 .

$\Delta s = \widehat{m_1 m_2}$: la distance parcourue entre t_1 et t_2 .

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \cdot dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \Delta s |_{t_1=t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt ; v = |\vec{v}|$$

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

Vecteur accélération curviligne:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \cdot \vec{u}_t) \\ &= \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{d\vec{u}_t}{dt} \cdot v \end{aligned}$$

$$\text{or: } a_t = \frac{dv}{dt} \quad \vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{u}_t : \text{Accélération tangentielle}$$

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u}_t$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \text{vecteur unitaire} \perp \vec{u}_t$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \vec{u}_n$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = v \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{u}_n$$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \rho \cdot \Delta \theta & \frac{d\theta}{ds} &= \frac{1}{\rho} \\ ds &= \rho \cdot d\theta & \frac{d\theta}{ds} &= \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

avec ρ : Rayon de courbure.

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

on aura donc:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \cdot \frac{v}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

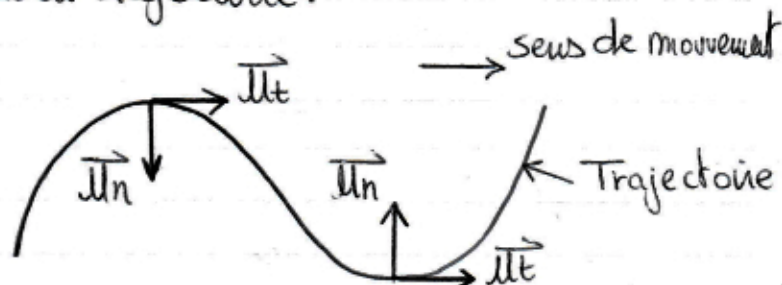
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n : \text{Accélération normale}$$

$$\text{à la trajectoire. } a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Remarques:

* \vec{u}_n est dirigé vers la concavité de la trajectoire.



$$(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_n \perp \vec{u}_t & \quad |\vec{u}_n| = |\vec{u}_t| = 1 \\ \vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

A connaître:

* Mouvement uniforme $\Rightarrow v = cte$

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \vec{a} = \vec{a}_n \end{cases}$$

$$* \rho \rightarrow \infty \quad \begin{cases} a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow a_n = 0 \\ \vec{a} = \vec{a}_t \end{cases}$$

$$* \rho \rightarrow cte \quad a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

$$\rho = R \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Conclusion:

* la composante " a_t " renseigne sur le changement de $|\vec{v}|$.

* la composante " a_n " renseigne sur le changement de la direction de \vec{v} .

A connaître

* Si $a = \text{cte} \Rightarrow$ Mouvement uniformément varié

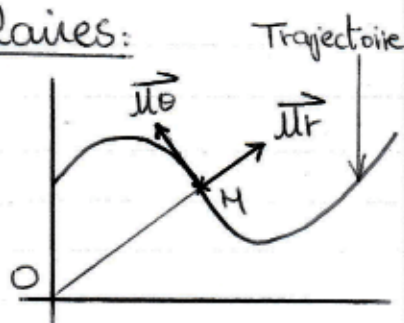
$a > 0 \Rightarrow$ Mouvement uniformément accéléré

$a < 0 \Rightarrow$ Mouvement uniformément décéléré.

Coordonnées Polaires:

Vecteur position:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{OM} \\ \vec{r} &= |\vec{OM}| \vec{u}_r \\ \vec{r} &= r \vec{u}_r \\ |\vec{OM}| &= r > 0\end{aligned}$$



Tel que: \vec{u}_r : un vecteur unitaire porté par \vec{OM} ($\vec{u}_r \parallel \vec{OM}$)

* le vecteur position \vec{OM} est repéré par l'angle " θ "

Tel que: " θ " est l'angle polaire définie par $\theta = (\vec{Ox}; \vec{OM})$, θ en radians.

\vec{u}_θ : vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{u}_r ($(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \frac{\pi}{2}$).

Vecteur vitesse: $\vec{r} = \vec{OM} = r \vec{u}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \cdot \vec{u}_r)}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r \quad \text{"composante radiale"}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{"composante radiale"}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta: \text{vecteur unitaire } \perp \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta: \text{vitesse transversale.}$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}: \text{vitesse transversale.}$$

Vecteur Accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \vec{u}_r \right] + \frac{d}{dt} \left[r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right]$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \right] + \left[\frac{dr d\theta}{dt \cdot dt} \vec{u}_\theta \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \times r \frac{d\theta}{dt} \right] \right]\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right]$$

$$+ \left[\left[\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right]$$

$$\text{avec: } \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$$

$$\text{et: } \cdot \vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad \cdot \vec{u}_r = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$$

$$a = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \text{ accélération radiale}$$

$$a_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}: \text{Accélération transversale.}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

$$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_\theta^2 + a_r^2}$$

a_r : accélération radiale

a_θ : accélération transversale.

On note:

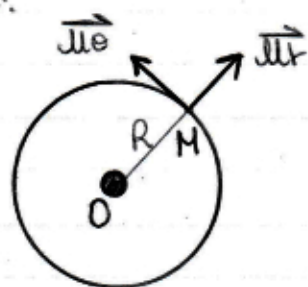
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{vitesse angulaire (rad/s)}$$

$$d\theta = \omega \cdot dt \Rightarrow \theta = \int \omega \cdot dt$$

Quelques mouvements particuliers:

Mouvement circulaire en coordonnées polaires:

* Mouvement circulaire: la trajectoire est un cercle.



Vecteur positions:

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \quad r = R = \text{cte}$$

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r$$

Vecteur vitesse:

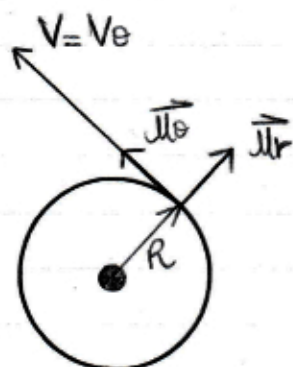
$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0 \\ V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \end{array} \right.$$

$$V_\theta = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{V} = V_\theta = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$V = V_\theta = R \frac{d\theta}{dt}$$



Vecteur Acceleration:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right) = R \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right)$$

$$\vec{a} = R \left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \times \frac{d\theta}{dt} \right) \right]$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + R \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \times (-\vec{u}_r)$$

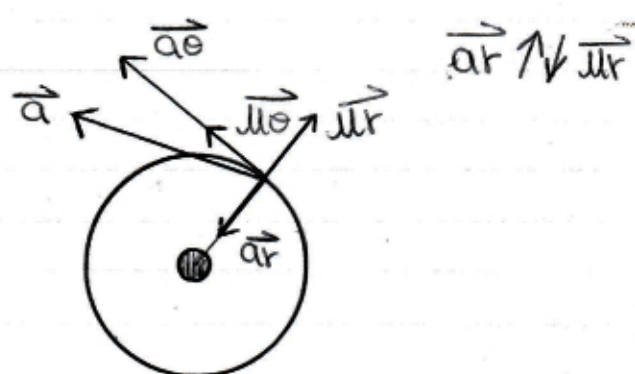
$$\vec{a} = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r + R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_r = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -R \omega^2$$

$$\vec{a}_\theta = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} \quad \text{avec } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{On a: } \left. \begin{array}{l} \omega^2 > 0 \\ R > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a < 0$$

Cela veut dire que \vec{a}_r est dirigé vers le centre du cercle.



Pour un mouvement circulaire uniforme

Mouvement uniforme $|\vec{V}| = \text{cte}$.

Vecteur vitesse:

$$\vec{V} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta ; V = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$|\vec{V}| = \text{cte} \Rightarrow V = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cte}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega \cdot dt$$

$$\theta = \int \omega \cdot dt + \text{cte} = \omega t + \text{cte}$$

le mouvement circulaire uniforme est un mouvement périodique, sa période est T:

la période de Rotation T:

C'est le temps pour faire un tour tel que 1 tour = 2π .

* On définit la fréquence f par le nombre de tour par unité de temps: telque:

$$f = \frac{1}{T} \text{ "En hertz" ou } s^{-1}$$

$$\text{on a: } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Vecteur accélération:

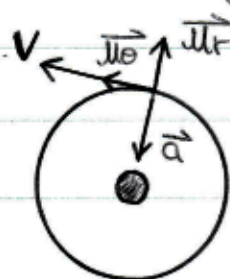
$$\vec{a} \mid \vec{a}_r = -R\omega^2$$

$$\vec{a}_\theta = R \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Donc:

$$a = a_r = -R\omega^2 \text{ "a est dirigé vers "o" "}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r \Rightarrow \vec{a} \text{ est dirigée vers le "o".}$$

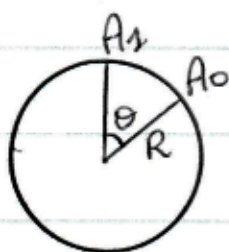


Etude du mouvement circulaire en coordonnées curviligne:

Abscisse curviligne:

$$S = A_0 A_1 = R\theta$$

θ : en radiants



$$\text{Vitesse: } \vec{V} = \frac{ds}{dt}$$

$$S = R\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = V$$

$$\vec{V} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\theta}{dt} \right) = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_t = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R \frac{\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}{R} = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_n = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

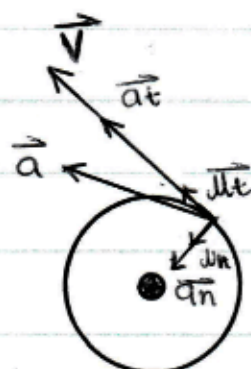
$$a = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_t + R \omega^2 \vec{u}_n$$

Remarque:

$$a_n = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R \omega^2$$

$$\begin{cases} \omega^2 > 0 \\ R > 0 \end{cases} \Rightarrow a_n > 0$$

a_n est dirigée vers le "o".



Vest tangent à la trajectoire.

Mouvement circulaire uniforme

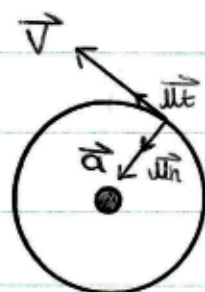
$$v = cte$$

$$v = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega = cte \quad \omega = cte$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} \mid \begin{cases} a_t = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ a_n = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R \omega^2 \end{cases} \quad \omega = cte$$

$\vec{a} = a_n$ "Dirigé vers le centre"



Important:

$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$: "Mouvement accéléré"

$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$: "Mouvement décéléré"

$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$: "Mouvement uniforme"

$|\vec{v}| = \text{cte}$ ou $\vec{v} \perp \vec{a}$.

Application: Exercice 8: Série d'exercices
Cinématique (1)

On a: $s(t) = t^3 + 3t^2$

1) Module de la vitesse:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t$$

2) Donner $a(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t + 6 \quad \swarrow \text{de combiner}$$

3) Calcul du rayon de la trajectoire

at = 4s, on a: 50 m/s²

$$\text{on a } a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = 1600 \text{ m/s}^2 \quad a_n = 40 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 40 \Rightarrow$$

$$v(4s) = 3(4)^2 + 6(4) = 72 \text{ m/s.}$$

$$r = \frac{(72)^2}{40} = 129,6 \text{ m.}$$

Exercice 11

1) Déterminer $V_r(t)$ et $V_\theta(t)$:

$$\begin{aligned} V_r(t) &= \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [2 - e^{-t} t^2] \\ &= \frac{d}{dt} [-e^{-t} t^2] = -[-e^{-t} t^2 + 2te^{-t}] \\ &= e^{-t} t^2 - 2te^{-t} = e^{-t}(t^2 - 2t) \end{aligned}$$

$$V_\theta(t) = (2 - e^{-t} t^2) \frac{d\theta}{dt} \quad \text{avec } \frac{d\theta}{dt} = -1$$

$$V_\theta(t) = e^{-t} t^2 - 2$$

2) des composantes de $a_\theta(t)$ et $a_r(t)$:

$$a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta(t) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_r(t) = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_\theta(t) = 2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

sachant que:

$$\frac{dr}{dt} = t^2 e^{-t} - 2te^{-t}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} (e^{-t} t^2) - 2 \frac{d}{dt} (e^{-t} t)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = (-e^{-t} t^2 + 2te^{-t}) - 2(-e^{-t} t + e^{-t})$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -t^2 e^{-t} + 4te^{-t} - 2e^{-t} \quad \text{et } \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 1$$

$$a_r = 4te^{-t} - 2e^{-t} - t^2 e^{-t} + r$$

Sachant que: $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$

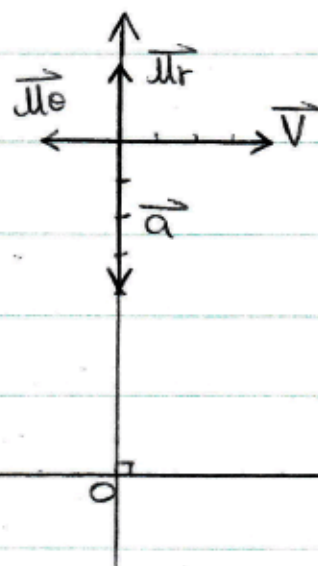
$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = -2te^{-t}(t-2)$$

3: Représentation de \vec{OM}_0 , \vec{V}_0 et \vec{a}_0 :

$$\begin{array}{l|l} \vec{OM} & \begin{cases} r(0) = 2 \text{ m} \\ \theta(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases} \\ \vec{V} & \begin{cases} V_r = 0 \text{ m/s} \\ V_\theta = -2 \text{ m/s} \end{cases} \end{array}$$

$$\vec{a} \quad \begin{cases} a_r = -4 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta = 0 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$



4) Dédution du rayon de courbure:

$$a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 = a_t^2 + a_n^2 = a_r^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow$$

$$a_n^2 = a_r^2 - a_t^2$$

$$a_t = \frac{d}{dt} |\vec{V}| \text{ avec } |\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(t^2 e^{-t} - 2t e^{-t})^2 + (e^{-t} \cdot t^2 - 2)^2}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(t^4 e^{-2t}) + (4t^2 e^{-2t}) - 4(t^3 e^{-2t}) + (e^{-2t} + 4) + 4}$$

$$- 4e^{-t} t^2$$

Autre méthode:

$$a_t = 0 \text{ si } \vec{V} \perp \vec{a} \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow a = a_n$$

$$\text{et } a = a_r. \quad a_r = a_n \Rightarrow r = \frac{V^2}{a_n}$$

Mouvement Rectiligne sinusoïdal:

On dit qu'un mouvement est rectiligne sinusoïdal si son équation de mouvement s'écrit:

$$x = x_m \cos(\omega t + \epsilon)$$

$$\text{ou: } x = x_m \sin(\omega t + \epsilon)$$

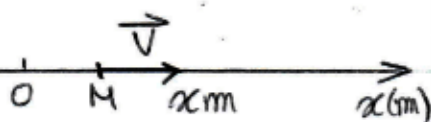
x_m : Amplitude

ω : Pulsation de mouvement "rad/s"

ϵ : Phase initiale.

de mouvement sinusoïdale est un mouvement périodique de période "T"

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{constante.}$$



Vecteur position:

$$\vec{OM} = x \vec{i}$$

$$\vec{OM} = x_m \cos(\omega t + \epsilon) \vec{i}$$

Vecteur vitesse

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \epsilon) \vec{i}$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \epsilon) \vec{i}$$

Remarque:

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{OM}$$

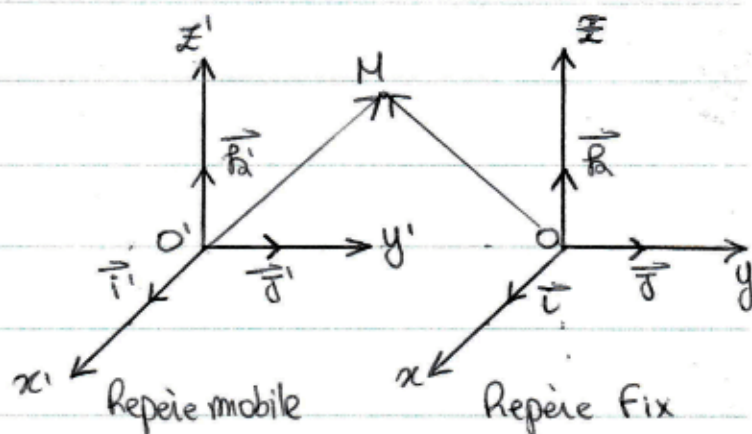
$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Equation différentielle du 2^{ème} ordre:

Composition des mouvements:

Mouvement relatif:



Composition des vecteurs:

Vecteur position:

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

\vec{OM} : Vecteur position dans R "Absolue"

$\vec{O'M}$: Vecteur position dans R "Relatif"

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{O'M} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$

$$\vec{OO'} = x(\theta') \vec{i} + y(\theta') \vec{j} + z(\theta') \vec{k}$$

Vecteur vitesse M:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\vec{OO'} + \vec{O'M})}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{d\vec{j}}{dt} y' + \frac{dz'}{dt} \vec{k} + \frac{d\vec{k}}{dt} z' \right)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right)$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} : \text{Vitesse Relative.}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} : \text{"vitesse d'entraînement".}$$

$$\vec{V}_a = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} : \text{"Vitesse Absolue"}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

À savoir:

$$\vec{VMIR} = \vec{VMIR'} + \vec{VR'IR}$$

$$\text{ou: } \vec{VMIO} = \vec{VMIO'} + \vec{Vo'I/O}$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} : \text{accélération dans le repère Absolu.}$$

$$\vec{V}' = \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} + \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k} \right] + \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)}_{\vec{a}_e : \text{accélération de Coriolis}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\text{avec } \vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}.$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}}{dt^2}.$$

Complément: Mouvement dans l'espace:

"En 3 dimensions"

Coordonnées Cartésiennes:

Vecteur position:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Vecteur vitesse:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}.$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Vecteur accélération:

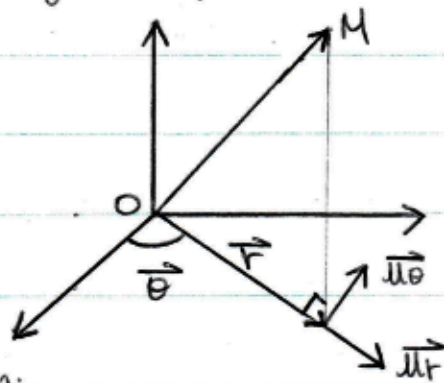
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}.$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt}.$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}.$$

Coordonnées Cylindriques:



Vecteur position:

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{R}$$

$$|\vec{OM}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Vecteur vitesse:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \vec{u}_r + z \vec{R})$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} (r \vec{u}_r) + \frac{dz}{dt} \vec{R}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt} r + \frac{dz}{dt} \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{V} = \underbrace{\frac{dr}{dt} \vec{u}_r}_{V_r} + \underbrace{\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta r}_{V_\theta} + \underbrace{\frac{dz}{dt} \vec{R}}_{V_z}$$

$$V_r = \frac{dr}{dt} : \text{composante radiale}$$

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} : \text{composante transversale}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} : \text{composante azimutale.}$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta r + \frac{dz}{dt} \vec{R} \right)$$

sachant que:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r$$

$$\text{ou: } \vec{a}_r = [\ddot{r} - r \dot{\theta}^2] \vec{u}_r$$

$$\vec{a}_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \times \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta$$

$$\text{ou: } \vec{a}_\theta = [2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_z = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{R} = \ddot{z} \vec{R}$$

\vec{a}_r = composante radiale

\vec{a}_θ = composante Transversale

\vec{a}_z = composante azimutale.

Chapitre II: Dynamique:

Introduction:

la dynamique est l'étude des corps en fonction des forces qui s'exercent sur eux. Donc elle s'intéresse aux causes de mouvements.

Force:

On appelle une force, la cause de tout mouvement ou changement. La force est une grandeur vectorielle, on distingue deux types de forces.

Force d'interaction à distance:

des corps qui interagissent ne sont pas en contact physique (Ne se touchent pas), exemple:

- * Force gravitationnelle
- * Force électrique et magnétique
- * Force forte et force faible

Force en contact:

des corps qui interagissent sont en contact physique: "ils se touchent"

Exemple: Force de frottement et force électrique.

3) Quantité de mouvement:

On appelle une quantité de mouvement d'un corps de masse m , animé d'une vitesse \vec{v} , la quantité vectorielle:

$$\vec{P} = m\vec{v} \text{ Kg m/s}$$

Remarque: $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{v}$.

4) lois de Newton:

1687, Newton a formulé les "lois de mouvement" dans son ouvrage "Principia"

1^{ère} loi de Newton: "Principe d'inertie":

Tout corps reste au repos ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps que aucune force extérieure ne vient modifier son état.

2^{ème} loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \vec{P} = m\vec{v}. \text{ "force instantanée"}$$

$\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ = Résultantes de forces extérieures qui s'appliquent sur m .

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m = \text{cte} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0.$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

La 2^{ème} loi de Newton est appelée

Principe fondamental de la dynamique
"PFD".

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}: \text{Force moyenne.}$$

3^{ème} loi: Action et réaction:

Si un corps ①, subit une force \vec{F}_{21} de la part du corps ② alors corps ② subit une force \vec{F}_{12} au corps ①.

Remarque:

\vec{F}_{12} et \vec{F}_{21} sont des forces de même nature.

Référentiel Galiléen:

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie est applicable.

Conservation de la quantité de mouvement:

a) Potentiel libre:

Une particule libre n'est soumise à aucune force.

R.F.D:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P} = cte \Rightarrow m \vec{v} = cte \Rightarrow \vec{v} = cte.$$

"la vitesse est constante en module et direction \Rightarrow la particule a un mouvement rectiligne uniforme.

b) système isolé:

Considérons un système isolé constitué de deux particules:

R.F.D:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_T = cte$$

$$\vec{P}_T = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

\vec{P}_1 : Quantité de mouvement de la particule ①.

\vec{P}_2 : Quantité de mouvement de la particule ②

②

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = cte \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = cte$$

Remarque:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = 0 \quad \frac{d(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

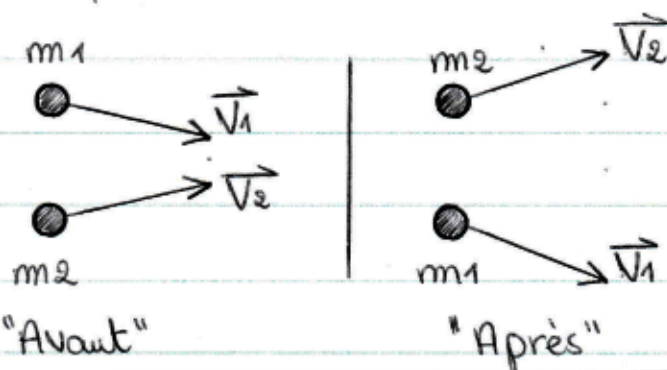
$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{2/1}$: la force qu'applique la particule ② sur la particule ①

$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{1/2}$: la force qu'applique la particule ① sur la particule ②.

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} \text{ "Action et Reaction"}$$

Remarque: "Complément"

Considérons deux particules de masse m_1 et m_2 qui entrent en collision:



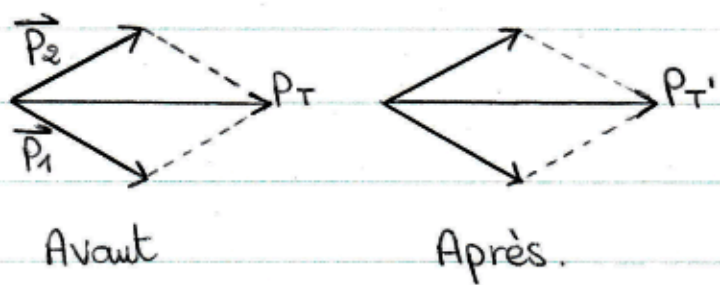
Système isolé \Rightarrow conservation de la quantité de mouvement:

\vec{P}_T : quantité de mouvement avant choc

\vec{P}_T' : quantité de mouvement après choc

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \Rightarrow \vec{P}_2 - \vec{P}_2' = \vec{P}_1' - \vec{P}_1$$

$$-(\vec{P}_2' - \vec{P}_2) = \vec{P}_1' - \vec{P}_1 \Rightarrow -\Delta \vec{P}_2 = \Delta \vec{P}_1$$



$$\vec{P}_T = \vec{P}_{T'}$$

Force d'interaction gravitationnelle

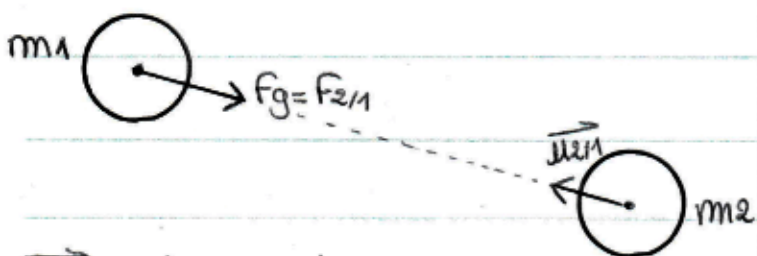
Considérons deux corps de masses

m_1 et m_2 séparés de distance r

$F_{1/2}$ est la force qu'applique le corps

② sur le corps ①, tel que $F_{2/1}$:

$$F_{2/1} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{21} = F_g$$



\vec{u}_{21} : vecteur unitaire

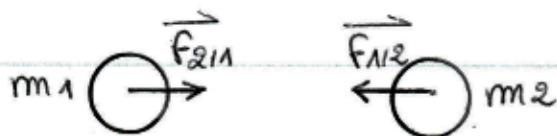
de m_2 vers m_1 .

$G: 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$: constante gravitationnelle.

Remarque

Selon la 3^{ème} loi de Newton:

$$\vec{F}_{1/2} = - \vec{F}_{2/1} \text{ "Action et Réaction"}$$



Le Poids:

On appelle poids d'un corps la force gravitationnelle que la terre applique sur un corps, on la dénote \vec{P}

tel que $\vec{P} = m \vec{g}$

\vec{g} : Accélération de pesanteur

A une hauteur " h ".

$$\vec{P} = \vec{F}_g$$

$$= - \frac{G M_T m}{r^2} \vec{u}_r$$

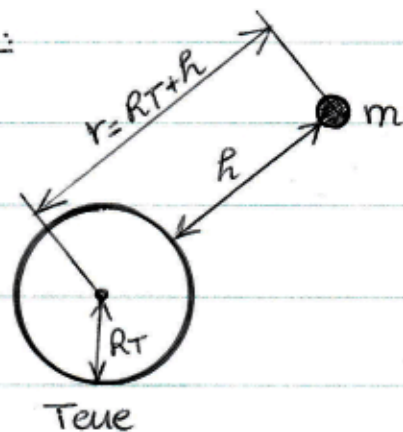
M_T : masse de la terre

R_T : rayon de la terre

\vec{u}_r : vecteur unitaire.

$$\vec{P} = - \frac{G M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r = m \vec{g}$$

$$\vec{g} = - \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r$$



Au voisinage de la terre:

$$R_T + h \approx R_T$$

$$\vec{P} = - \frac{G M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r \approx - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T)^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{P} = m \vec{g}_0 \text{ tel que: } g_0 = - \frac{G \cdot M_T}{(R_T)^2} \vec{u}_r$$

$$\text{on a: } g = \frac{G M_T}{R_T^2} = \text{cte.}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$$

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

$$R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,83 \text{ m/s}^2$$

Remarque:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} \times \frac{R_T^2}{G M_T} \Rightarrow g = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} g_0$$

Applications:

3^{ème} loi de Kepler des périodes:

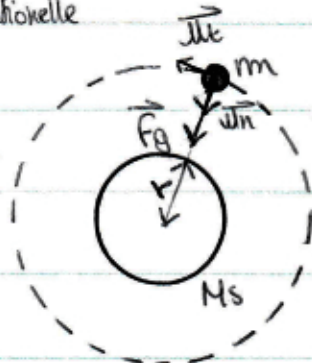
Une planète tourne autour du soleil avec une orbite de Rayon " r " et de période " T ".

La planète a une trajectoire circulaire autour du soleil.

R.F.D:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}; \quad \sum \vec{F} = \vec{F}_g = m\vec{a}.$$

\vec{F}_g : force gravitationnelle



$$\vec{F}_g = G \frac{M_s \cdot m}{r^2} \vec{u}_n = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_g = \frac{GM_s}{r^2} \vec{u}_n = \vec{a}$$

$$a: \vec{a}_n \Rightarrow \vec{a}_t = 0$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cte}$$

\Rightarrow mouvement uniforme.

$$a_n = \frac{GM_s}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

on a:

$$s = r\theta \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega.$$

$$\Rightarrow \omega = \text{cte}$$

$$r = \text{cte}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v = r\omega = r \times \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{GM_s}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 4\pi^2}{r T^2}$$

$$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{r 4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \quad \text{"3^{ème} loi de Kepler"}$$

Si on a deux planètes en orbite autour du soleil:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}; \quad \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

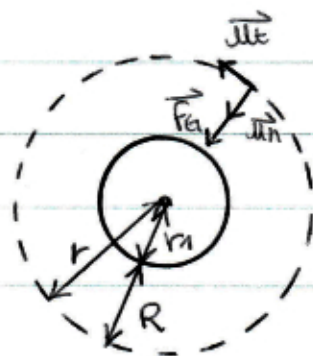
$$\Rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

Remarque:

On a considéré que la trajectoire est un cercle.

Satellite Géostationnaire.

Un satellite géostationnaire est un satellite qui tourne autour de la terre avec la même vitesse angulaire que celle de la terre ($T = 24$ heures).



R.F.D:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g = G \frac{M_t \cdot m}{r^2} \vec{u}_n$$

$$G \frac{M_t \cdot m}{r^2} \vec{u}_n = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_n \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow v = \text{cte.}$$

mouvement uniforme: on a:

un mouvement circulaire uniforme
donc un mouvement périodique.

$$a_n = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{GM_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

$$r = R_T + R$$

$$v = r\omega$$

$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{r^2 \omega^2}{r}$$

$$GM_T = r^3 \omega^2 = r^3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$\frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{GM_T \times T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \left(\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$v^3 = r^3 \omega^3 = \frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2} \times \frac{2^3 \pi^3}{T^3}$$

$$v^3 = \frac{GM_T \cdot 2\pi}{T} = GM_T \cdot \omega$$

Force de contact:

Ce sont des forces qui apparaissent lorsqu'il y a contact entre deux corps ou plus. cette force est nommée \vec{C} :

\vec{C} :

Propriétés de \vec{C} :

* Point d'application: Milieu de la surface de contact.

* Direction, sens et module:

Déterminer par la relation fondamentale de la dynamique.

• Si le mobile est en équilibre, on écrit:

$$\sum \vec{F} = 0$$

• Si le mobile est en mouvement on écrit: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

la force \vec{C} a deux composantes:

$$\vec{C} = \vec{C}_{//} + \vec{C}_{\perp}$$

\vec{C}_{\perp} : composante perpendiculaire à l'axe tangent au mouvement.

"Empêcher le module de pénétrer".

$\vec{C}_{//}$: Composante tangente à la

trajectoire, elle modélise les frottements

$$\vec{C} = \vec{C}_{//} + \vec{C}_{\perp}$$

frottement. \downarrow Réaction.

Il y a deux types de frottement:

* Frottement statique: Il empêche le mouvement de s'établir.

* Frottement dynamique: Il se manifeste lorsque le mobile est en mouvement.

Remarque:

En l'absence de frottement

$$\vec{C}_{//} = \vec{0} \text{ et } \vec{C} = \vec{C}_{\perp}$$

Relation entre $C_{//}$ et C_{\perp} :

À la rupture de l'équilibre:

On définit un coefficient statique

μ_s tel que: $C_{//} = \mu_s C_{\perp}$

$\mu_s > 0$ et $\mu_s < 1$ et μ_s est sans

dimensions

En cas de mouvement:

On définit un coefficient de frottement

dynamique μ_d tel que: $C_{//} = \mu_d C_{\perp}$

$\mu_d > 0$ et $\mu_d < 1$ est sans dimensions

Remarque:

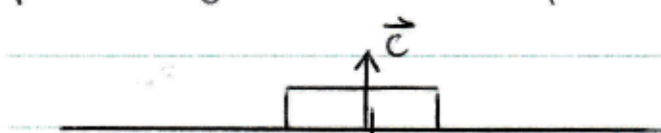
$\mu_s > \mu_d$.

Exemple:

Plan horizontal:

* Corps en équilibre:

Un objet de masse m posé sur un plan horizontal et est en équilibre.

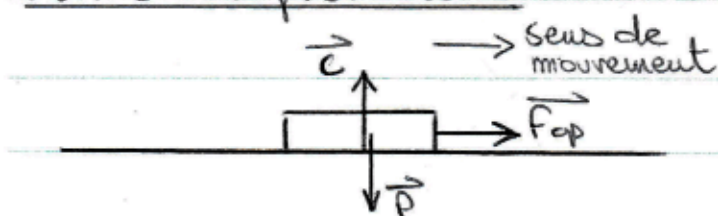


$\sum \vec{F} = \vec{0}$ "équilibre"

$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P}$

$|\vec{C}| = |\vec{P}| = mg$.

Etude sans frottement:



On applique une force \vec{F}_{op} pour mettre l'objet en mouvement:

pas de frottement.

\vec{F}_{op} : Fopérateur

R.F.D: $\vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_{op} = m\vec{a}$

Projection sur x :

$0 + 0 + |\vec{F}_{op}| = ma$

Projection sur y :

$-|\vec{P}| + |\vec{C}| + 0 = 0$ "Pas de mouvement selon oy ".

$|\vec{F}_{op}| = F_{op} = ma$

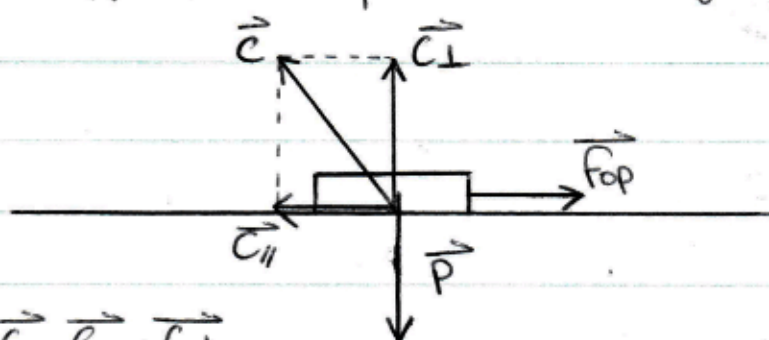
$|\vec{C}| = |\vec{P}| = mg$

Etude avec frottement:

Présence de frottement \Rightarrow Contact non-lisse.

1) cas statique: frottement statique.

On applique une force \vec{F}_{op} sur l'objet:



$\vec{C} = \vec{C}_{//} + \vec{C}_{\perp}$

R.F.D: cas statique \Rightarrow

$\sum \vec{F}_{ext} = 0$

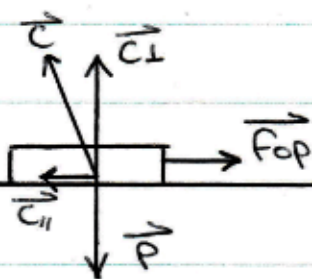
$\vec{F}_{op} + \vec{P} + \vec{C} = 0$

ox: $F_{op} + 0 - C_{//} = 0 \Rightarrow F_{op} = C_{//}$

oy: $0 - P + C_{\perp} = 0 \Rightarrow P = C_{\perp} = mg$

Cas statique à la rupture

Cas statique a la rupture de l'équilibre:



R.F.D: $\sum \vec{F} = 0$

$\vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_{op} = 0$

o x: $\vec{F}_{op} - C_{||} = 0$

o y: $-P + C_{\perp} = 0$

À la rupture de l'équilibre: $C_{||} = \mu_s C_{\perp}$

$F_{op} = C_{||}$

$P = C_{\perp} = mg$

$C_{||} = \mu_s mg$

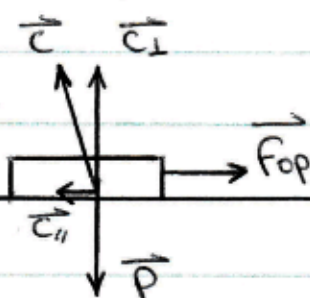
$F_{op} = C_{||} = \mu_s mg$

donc il faut appliquer une force $F_{op} \gg \mu_s$ pour mettre l'objet en mouvement.

Cas dynamique:

frottement dynamique:

de \vec{C} moins penché par rapport au cas statique



$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{F}_{op} + \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$

o x: $F_{op} - C_{||} = ma$

o y: $C_{\perp} - P = 0$

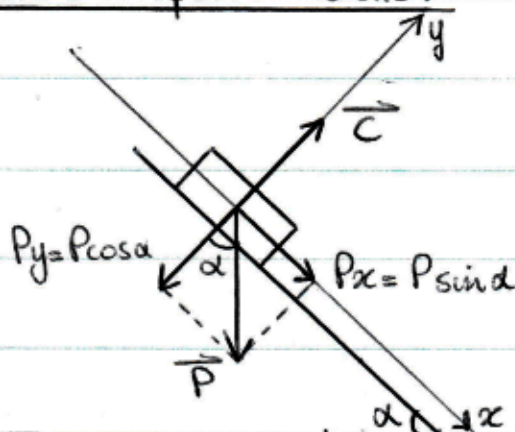
$C_{||} = \mu_d C_{\perp}$

$F_{op} = ma + C_{||} = ma + \mu_d mg$

$C_{\perp} = P = mg$

$\vec{F}_{op} = ma + \mu_d mg$

Cas d'un plan incliné:



R.F.D: "Absence de frottement $C_r = 0$ "

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}; \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$

o x: $P_x = P \sin \alpha = ma$ ①

o y: $-P_y + C = -P \cos \alpha + C = 0$ ②

① $\Rightarrow mg \sin \alpha = ma \Rightarrow a = g \sin \alpha$

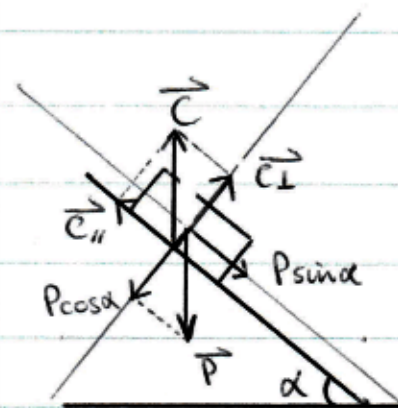
② $\Rightarrow C = mg \cos \alpha$

Remarque:

On a un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Etude avec frottement:

Cas statique:



R.F.D:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \vec{P} + \vec{C} = 0$$

$$ox: P \sin \alpha - C_{//} = 0 \quad (1)$$

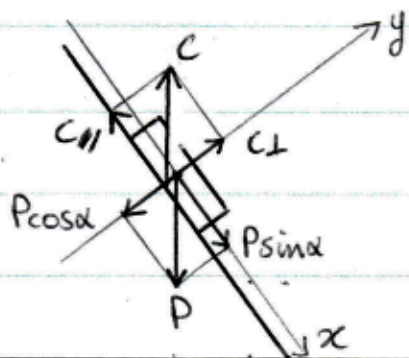
$$oy: -P \cos \alpha + C_{\perp} = 0 \quad (2)$$

$$C_{//} = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$C_{\perp} = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

A la rupture de l'équilibre:

On augmente " α " jusqu'à avoir une rupture de l'équilibre pour $\alpha = \alpha_0$



R.F.D:

$$\vec{P} + \vec{C} = 0$$

$$ox: P \sin \alpha_0 - C_{//} = 0 \quad (1)$$

$$oy: -P \cos \alpha_0 + C_{\perp} = 0 \quad (2)$$

$$C_{//} = \mu_s C_{\perp}$$

$$C_{\perp} = P \cos \alpha_0 = mg \cos \alpha_0$$

$$C_{//} = \mu_s \cdot mg \cos \alpha_0$$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow P \sin \alpha_0 - \mu_s \cdot mg \cos \alpha_0 = 0$$

$$mg \sin \alpha_0 - \mu_s mg \cos \alpha_0 = 0$$

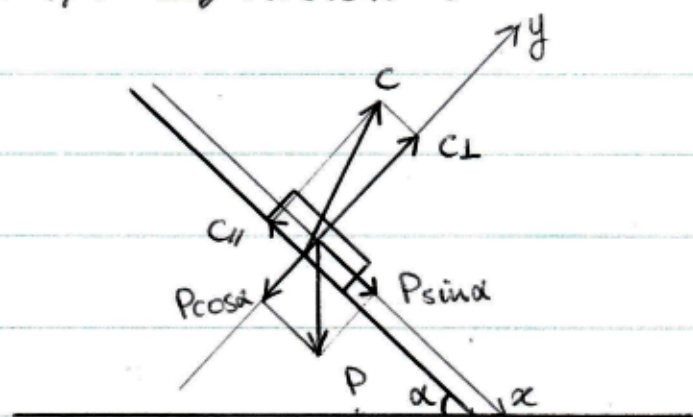
$$\sin \alpha_0 = \mu_s \cos \alpha_0$$

$$\mu_s = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \tan \alpha_0$$

Remarque: Le plan incliné est une méthode expérimentale pour calculer μ_s

Cas dynamique: "Mouvement"

Si $\alpha > \alpha_0 \Rightarrow$ Mouvement.



R.F.D:

$$\vec{P} + \vec{C} = m \vec{a}$$

$$ox: P \sin \alpha - C_{//} = ma$$

$$oy: -P \cos \alpha + C_{\perp} = 0$$

$$C_{//} = \mu_d C_{\perp}$$

$$C_{\perp} = mg \cos \alpha$$

$$C_{//} = mg \cos \alpha \mu_d$$

$$P \sin \alpha - (mg)(\cos \alpha) \mu_d$$

$$mg \sin \alpha - (mg \cos \alpha) \times \mu_d = ma$$

$$mg (\sin \alpha - \cos \alpha \mu_d) = ma$$

$$g \sin \alpha - g \cos \alpha \mu_d = a$$

$$\mu_d = \frac{-a}{g \cos \alpha} + \frac{g \sin \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{-a}{g \cos \alpha} + \tan \alpha$$

Remarque: $\mu_d \neq \tan \alpha$

Propriétés de μ_s et μ_d :

- * Ne dépendent pas de la masse
- * Ne dépendent pas de la vitesse de contact
- * μ_s et μ_d dépendent de la nature des surfaces

Matériaux	μ_s	μ_d
Acier-Acier	0,74	0,57
Bois-Bois	0,5	0,3

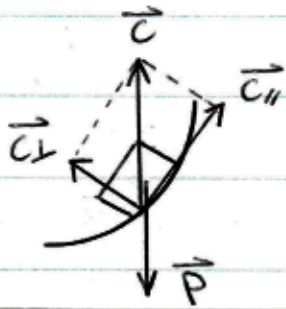
Surface circulaire:

Equilibre:

$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\vec{C} = -\vec{P}$$

$$\vec{C} = \underbrace{\vec{C}_{//}}_{\text{frottement}} + \vec{C}_{\perp}$$



Absence de frottement:

On a un mouvement

$$\vec{C} = \vec{C}_{\perp}$$

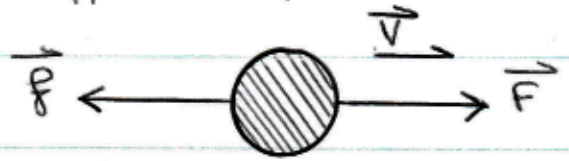
$$\vec{C} = \vec{0}$$



et de la forme du corps.

Application:

Un corps qui se déplace dans un fluide sous l'effet d'une force extérieure \vec{F} .



R.F.D:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} - R\vec{v} = m\vec{a}$$

$$\text{ou: } Fx - Rv_x = max$$

$$F - Rv = ma$$

$$\Rightarrow v_x = v \text{ et } a_x = a.$$

$$ma + Rv = F$$

$$m \frac{dv}{dt} + Rv = F$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m} v = \frac{F}{m} \quad \text{Equation différentielle du 1er ordre}$$

$$\tau = \frac{m}{R} : \text{constante de temps.}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F}{m}$$

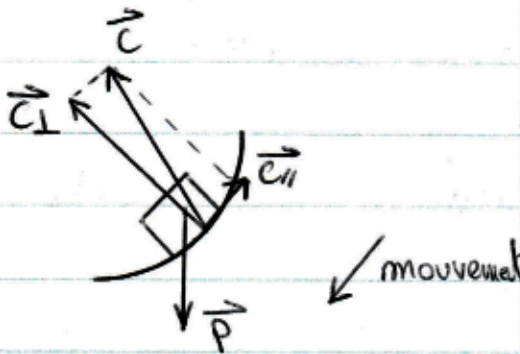
$$\text{La solution s'écrit: } v = Ae^{-t/\tau} + v_{\text{limite}}$$

$$v_{\text{limite}} ? \text{ c'est quand } \frac{dv}{dt} = 0.$$

$$\frac{v}{\tau} = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{Rv}{m} = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow v_{\text{limite}} = \frac{F}{R}$$

Mouvement en présence de frottement.



Frottement visqueux:

Si un corps se déplace dans l'air ou un fluide, il subit une résistance lors de son mouvement, cette force qu'exerce le fluide sur le corps est donnée par: $\vec{f} = -R\vec{v}$, tel que:

\vec{v} : vitesse du corps

R : coefficient de viscosité: il dépend de la nature du fluide, sa viscosité

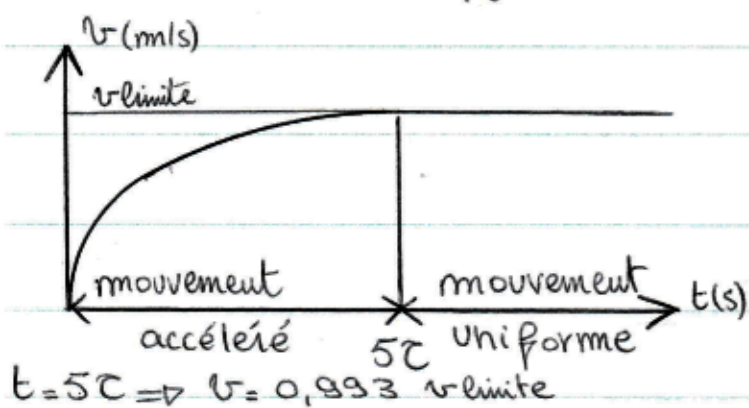
$A = ?$ condition initiale:

$t = 0 \text{ s}$ et $v = 0 \text{ m/s}$.

$$0 = Ae^{-0} + v_{\text{limite}} \Rightarrow A = -v_{\text{limite}}$$

$$v = v_{\text{limite}} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$v_{\text{limite}} = \frac{F}{R} \text{ et } \tau = \frac{m}{R}$$



Remarque:

* Pour des faibles vitesses, on a: $f = -Rv$

* Pour des vitesses plus élevées: $f = -Rv^2$

des forces électriques:

Tension du fil:

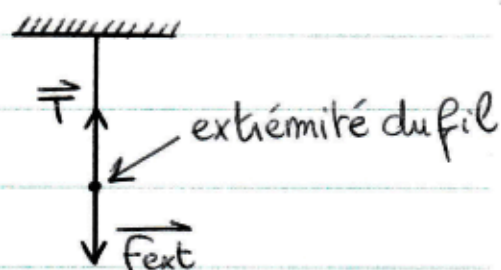
Si on tire sur l'extrémité d'un fil l'autre extrémité est fixe. le fil exerce une résistance nommée \vec{T} tel que \vec{T} a les propriétés suivantes:

* Point d'application: d'extrémité du fil

* direction: la direction du fil (// au fil)

* Sens: Opposé à la force appliquée (\vec{F}_{ext}).

* de module ou intensité: à déterminer par l'application: R.F.D.



Tension du ressort:

Si on applique une force pour déformer un ressort "étirement ou compression", le ressort exerce une force de rappel appelée "Tension du ressort" nommée \vec{T} tel que:

$$\vec{T} = -R \cdot \Delta l = -R \cdot \Delta l \vec{u} \quad \Delta l = l - l_0$$

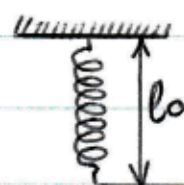
l_0 : longueur à vide du ressort "sans déformation"

l : longueur du ressort après étirement.

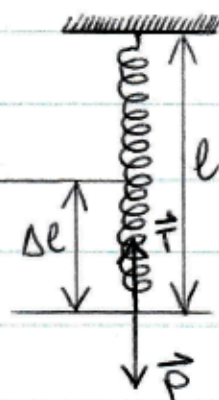
R : constante de raideur du ressort.

\vec{u} : vecteur unitaire sortant du ressort.

Etirement:

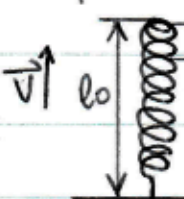


Ressort à vide

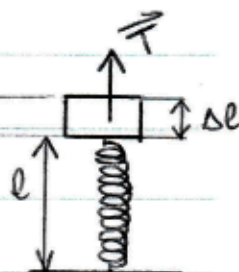


$$\Delta l = l - l_0 > 0 \quad l > l_0$$

Compression:



$$\Delta l = l - l_0 < 0 \quad l < l_0$$

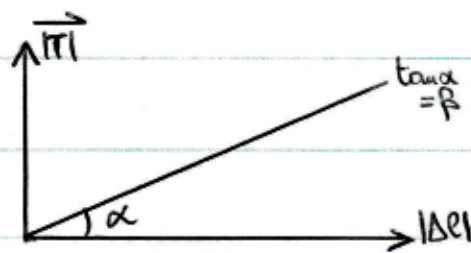


Remarque:

* Etirement ($l > l_0$); \vec{T} rentre dans le ressort.

* Compression ($l < l_0$); \vec{T} sort du ressort.

* $T = f(\Delta l)$.



Moment cinétique:

Définition: Soit un point matériel

de masse m repère par le vecteur position

$\vec{OM} = \vec{r}$ et qui possède une vitesse \vec{v} .

de moment cinétique du corps par rapport à "O" est donné par:

$$\vec{L} = (\vec{r} \wedge \vec{p}) = (\vec{r} \wedge m \vec{v})$$

$$\vec{L} = m (\vec{r} \wedge \vec{v}).$$

\vec{p} : Quantité de mouvement = $m \vec{v}$.

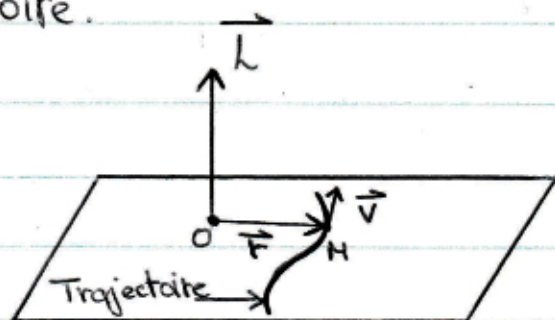
Propriétés de \vec{L} :

* Direction: $\vec{L} \perp \vec{r}$ et $\vec{L} \perp \vec{v}$

$\vec{L} \perp$ plan formé par \vec{r} et \vec{v}

* module: "intensité": $|\vec{L}| = m |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\sin(\vec{r}, \vec{v})|$

* Sens donné par la règle de la main droite.



Par convention,

⊙ Sortant

⊗ Rentrant

Moment d'une force:

On appelle moment d'une force \vec{F} appliqué sur le point matériel, par rapport à "O", la grandeur:

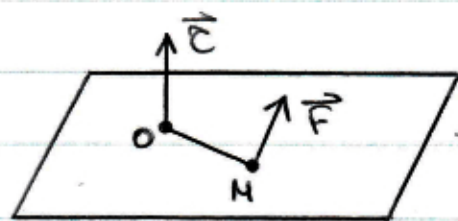
$$\vec{\tau} = (\vec{OM} \wedge \vec{F}); \vec{OM} = \vec{r} \text{ d'unité: N.m}$$

Propriétés de $\vec{\tau}$:

* Direction: $\vec{\tau} \perp \vec{OM}$ et $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ donc $\vec{\tau} \perp$ au plan formé par \vec{OM} et \vec{F} .

* Sens: Donné par la règle de la main droite.

* Module: $|\vec{\tau}| = |\vec{OM}| \cdot |\vec{F}| \cdot |\sin(\vec{OM}, \vec{F})|$



Théorème du moment cinétique:

Définition:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Vérification:

$$\vec{L} = (\vec{r} \wedge \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \vec{p} = m \vec{v}; \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

avec $m a = F$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge (m\vec{v}) + \vec{r} \wedge (\vec{F})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \wedge \vec{v}) + \vec{r} \wedge (\vec{F}) \quad \text{"}\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}\text{"}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \tau(\vec{F})$$

Conservation du moment cinétique:

En absence de force extérieure agissant sur le point matériel ou dans le cas où on a des forces centrales qui agissent sur le point matériel, on a conservation du moment cinétique donc; $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

1^{er} cas: $\vec{F} = \vec{0}$

Pour un système isolé " $\vec{F} = \vec{0}$ "

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{F} \wedge \vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.}$$

2^{ème} cas:

des forces centrales sont des forces qui passent par point fixe "O" et qui sont parallèles à \vec{OM} et qui dépendent généralement de $r = |\vec{OM}|$.

donc \vec{F} s'écrit:

$$\vec{F} = F \vec{ur}; \quad \vec{OM} = r \vec{ur}$$

$$\vec{F} \parallel \vec{OM}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{F}); \quad \vec{r} = \vec{OM}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{"}\vec{F} \parallel \vec{r}\text{"}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

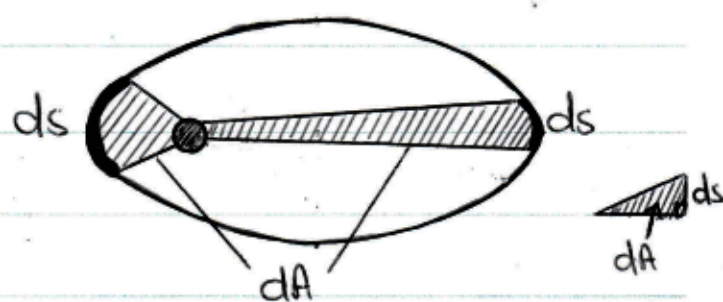
Remarque:

la force gravitationnelle est une force centrale.

Conséquence de la conservation du moment cinétique:

2^{ème} loi de Kepler: "loi des aires":

la ligne joignant le soleil et la planète balaie des aires cyclées en des temps égaux



ds: longueur de l'arc

dA: d'aire d'un triangle droit.

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot ds$$

$$ds = r \cdot d\theta \Rightarrow dA = \frac{1}{2} r \times r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

la planète est soumise à la force gravitationnelle F_g .

$$F_g = \frac{G M_s \cdot m}{r^2}; \quad \vec{F}_g \parallel \vec{r}$$

M_s : masse du soleil.

m : masse de la planète

F_g est une force centrale.

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{cte}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$$

en coordonnées polaires:

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{L} = m (r \vec{u}_r \wedge (V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta))$$

$$\vec{L} = m (r V_r (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r) + r V_\theta (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta))$$

on a: $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = 0$ et $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$.

$$\vec{u}_z \perp \vec{u}_r \text{ et } \vec{u}_z \perp \vec{u}_\theta$$

$$\vec{L} = m \cdot r \cdot V_\theta \vec{u}_z$$

Sachant que: $V_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$.

$$\vec{L} = m \cdot r \cdot r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z = cte$$

$$m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = cte.$$

2^{ème} loi de Kepler:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = cte$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{2dA}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} = cte$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{L}{2m}$$

Remarque:

* $\frac{dA}{dt}$ est appelée vitesse areolaire

$$* \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = m \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2m}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2}$$

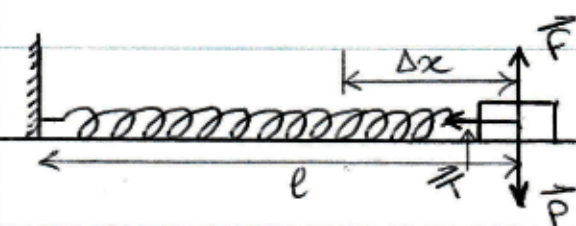
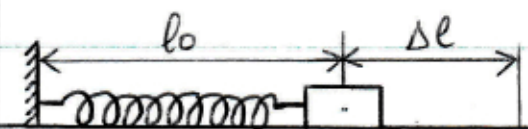
A savoir:

En coordonnées polaires l'expression de

$$\vec{L} \Rightarrow \vec{L} = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$$

Mouvements Particuliers:

Mouvement Harmonique: "Sinusoidal".



On tire le ressort et puis on le lâche.
de contact entre l'objet et le support
horizontal est lisse.

R.F.D:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m \vec{a}$$

oy: $C - P = 0 \Rightarrow C = P = mg$

ox: $-T = ma$

$$T = K |\Delta l|$$

$$\Delta l = l - l_0 > 0 \Rightarrow |\Delta l| = l - l_0$$

$$\Delta l = \Delta x = x - x(0) = x - 0 \Rightarrow \Delta l = x$$

ox: $-kx = ma \Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{"Equation différentielle du 2^{ème} ordre"}$$

d'équation est équivalente à:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

la solution est: $x = A \sin(\omega t + \phi)$.

A: amplitude

ω : Pulsation (rad/s) | ϕ : phase initiale

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Un mouvement harmonique est un mouvement périodique

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Vitesse:

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = +\omega A \cos(\omega t + \phi)$$

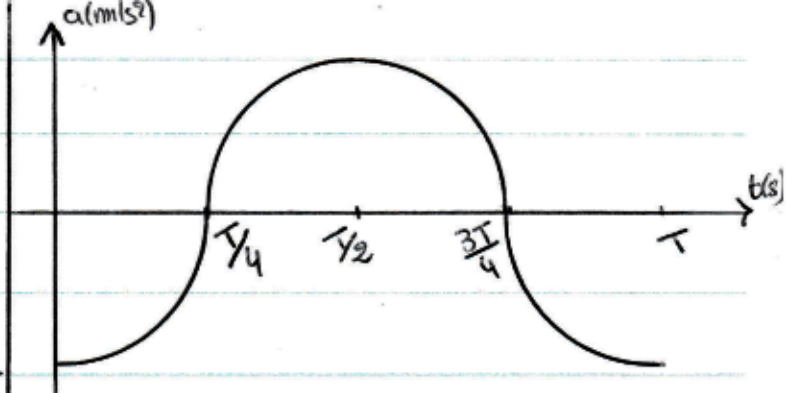
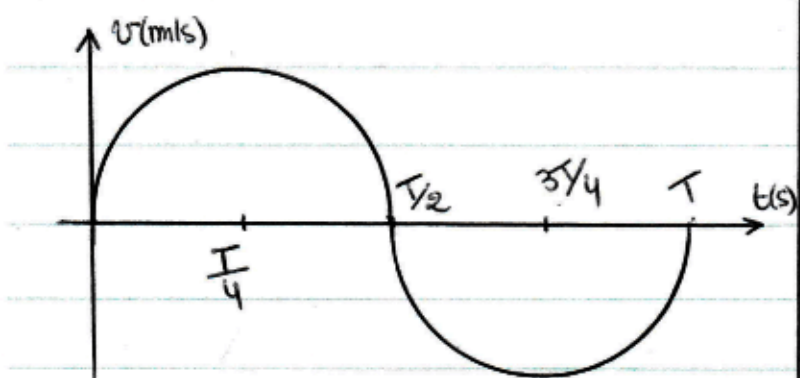
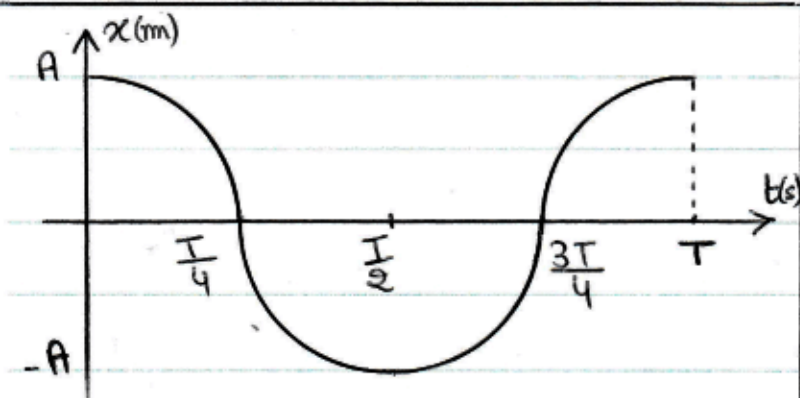
Accélération:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

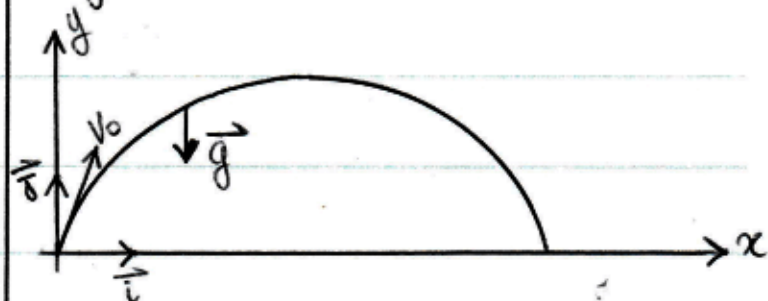
on trace $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$.

$$t=0s, l=0, x=A; v=0$$

$$x = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



Projectile:



R.F.D:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

\vec{g} : accélération de pesanteur.

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$V_x = \int a_x dt + cte = cte$$

$$at=0s \quad \vec{V}_0 \mid V_{0x} = +V_0 \cos \theta$$

$$V_{0y} = V_0 \sin \theta$$

$$V_x = V_{0x} \Rightarrow V_x = V_0 \cos \theta$$

$$V_y = \int -g \cdot dt + cte = -gt + cte$$

$$at=0s \quad V_y = V_0 \sin \theta \Rightarrow$$

$$V_y = -gt + V_0 \sin \theta$$

$$x = \int V_x dt + cte = \int V_0 \cos \theta dt + cte$$

$$x = V_0 \cos(\theta) \cdot t + cte$$

$$t=0s, x=0 \Rightarrow cte=0$$

$$x = V_0 \cos(\theta) \cdot t \quad (1)$$

$$y = \int V_y dt + cte$$

$$y = -\int g t \cdot dt + \int V_0 \sin \theta \cdot dt + cte$$

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + V_0 \sin \theta \cdot t + cte$$

$$at=0 \Rightarrow cte=0$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + V_0 \sin(\theta) (t) \quad (2)$$

L'équation de la trajectoire:

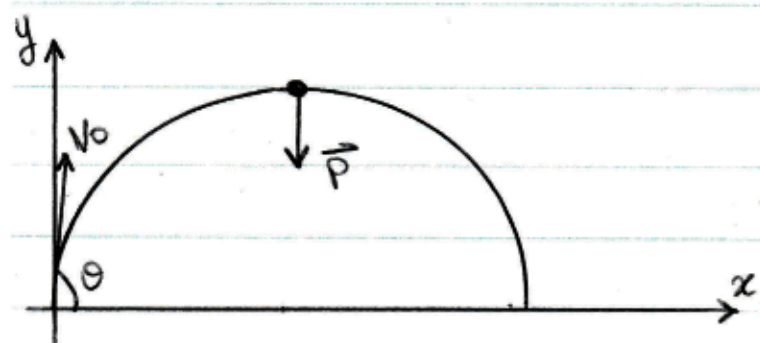
Trouver y en fonction de x:

$$x = V_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \theta} \text{ dans } (2)$$

on aura:

$$y = -g \left(\frac{x}{V_0 \cos \theta} \right)^2 + V_0 \sin(\theta) \frac{x}{V_0 \cos(\theta)}$$

$$y = -g \frac{x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} + \tan(\theta) \cdot x$$



Hauteur maximale:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow V_y = 0$$

$$V_y = -gt + V_0 \sin \theta = 0$$

$$t = \frac{V_0 \times \sin \theta}{g} \text{ dans } (2)$$

$$y_s = -g \left(\frac{V_0 \times \sin \theta}{g} \right)^2 \times \frac{1}{2} + V_0 \times \sin(\theta) \times \frac{V_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

$$y_s = -\frac{V_0^2 \times \sin^2 \theta}{2g} + \frac{V_0^2 \times \sin^2(\theta)}{g} = \frac{V_0^2 \times \sin^2(\theta)}{2g}$$

y_s : y Sommet.

Portée:

La portée est la distance maximale horizontale "sur les x" entre le point de tir et le point $y=0$.

$$y=0$$

$$y = \frac{-g}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \cdot x = 0$$

$x=0$ "au début (point de tir)"
 $x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$

avec "sin 2θ = 2 sin θ cos θ"

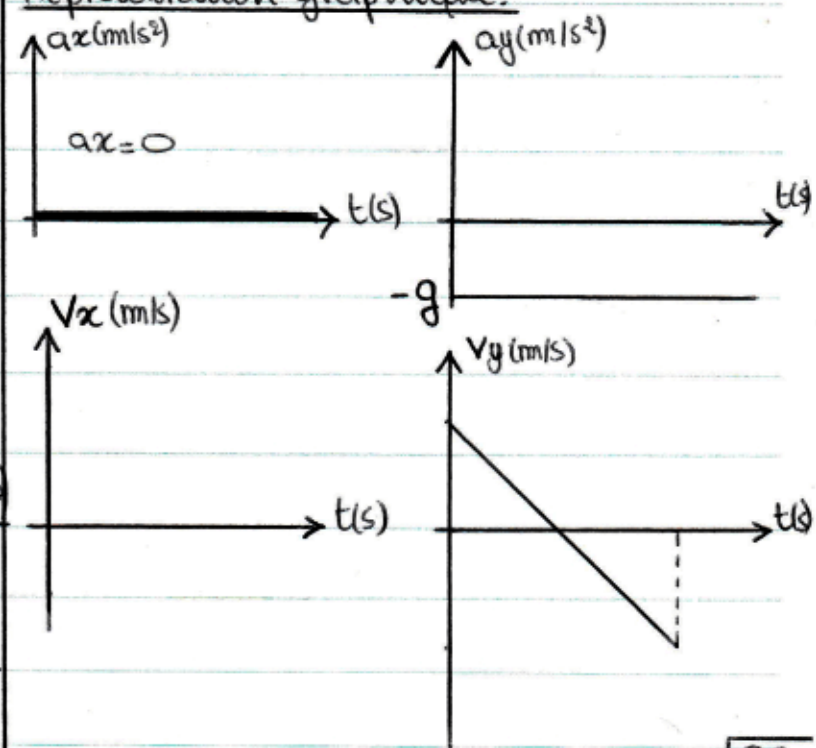
$$y = \frac{-g}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} \times \frac{V_0^4 (\sin 2\theta)^2}{g^2} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$y = \frac{-V_0^2 \times (4 \sin^2 \theta \times \cos^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta \times g} + \frac{V_0^2 \sin \theta (2 \sin \theta \cos \theta)}{\cos \theta \cdot g}$$

$$y = \frac{-2 V_0^2 \times (\sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta \times g} + \frac{2 V_0^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta \times g}$$

$$y=0 \Rightarrow x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Représentation graphique:



Chapitre: Travail et Energie:

"Partie travail indisponible"

Energie cinétique:

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$; elle est par nature > 0

Théorème de l'énergie cinétique:

$$W(\vec{F}_{ext})|_A^B = \Delta E_c|_A^B = E_c(B) - E_c(A).$$

$$\int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = E_c(B) - E_c(A).$$
$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Démonstration:

R.F.D : $\vec{F}_{ext} = m \vec{a}$

$$W(\vec{F}_{ext})|_A^B = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B m \vec{a} \cdot d\vec{\ell}$$

On a: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}$

$$W(\vec{F}_{ext})|_A^B = \int_A^B m \frac{dv}{dt} \cdot d\vec{\ell} \quad \boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v}}$$

$$W(\vec{F}_{ext}) = \int m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$$

On a: $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \vec{v} \frac{dv}{dt}$$
$$= 2v \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = v \cdot dv$$

$$W(\vec{F}_{ext})|_A^B = m \int_A^B v \cdot dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_A^B$$
$$= m \frac{v_B^2}{2} - m \frac{v_A^2}{2} = E_c(B) - E_c(A).$$

Remarque:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \quad \text{avec } p = m v.$$

Energie potentielle:

L'énergie potentielle est une énergie liée à la position du corps est dénommée

$$E_p = f(x, y, z).$$

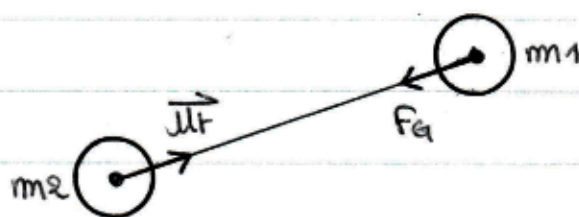
Energie potentielle gravitationnelle:

On définit:

$$E_{pg} = - \int \vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} + cte$$

$$\vec{F}_g = - \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$ "déplacement en coordonnées polaires"



$$\vec{F}_g = F_r \vec{u}_r; \quad F_r = - \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} = F_r \cdot dr (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) + 0 \cdot r d\theta (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} = F_r \cdot dr \quad \text{avec } \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$$

$$\vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \times dr.$$

$$E_{pg} = - \int - \frac{G m_1 \cdot m_2}{r^2} \times dr + cte$$

$$E_{pg} = G \cdot m_1 \cdot m_2 \int \frac{dr}{r^2} + cte$$

$$E_{pg} = G \cdot m_1 \cdot m_2 \left[- \frac{1}{r} \right] + cte$$

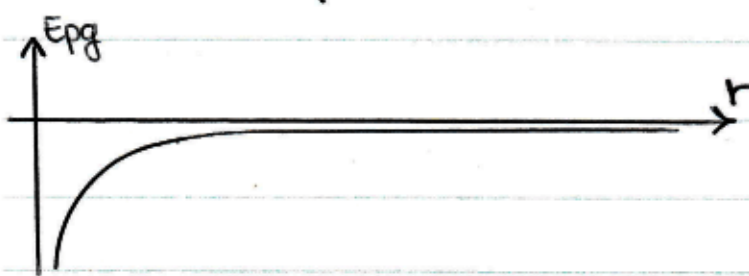
$$E_{pg} = - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} + cte.$$

Origine des énergies potentielles

Gravitationnelles:

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow E_{pg} = 0 \text{ J} \Rightarrow cte = 0$$

$$\Rightarrow E_{pg} = \frac{-G m_1 m_2}{r}$$



Energie potentielle gravitationnelle

terrestre:

$$E_{pg} = \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r} + cte \quad m_1 = M_T$$

$$m_2 = m$$

M_T : masse de la terre.

m : masse d'un corps.

$$r = R_T + h$$

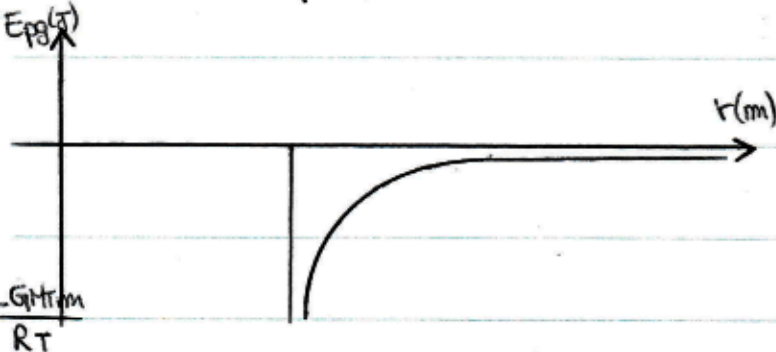
On a: $g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$ = accélération de la pesanteur.

$$G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

$$E_{pg} = \frac{-m \cdot g_0 \cdot R_T^2}{r} + cte$$

$$cte = 0 \quad (E_{pg}(0) = 0 \text{ J})$$

$$E_{pg} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r}$$



$$E_{pg}(R_T) = -m g_0 \cdot R_T$$

$$E_{pg}(R_T) = -\frac{G \cdot m \cdot M_T}{R_T} \quad \text{avec } g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

Au voisinage de la terre:

$$\vec{P} = m \vec{g_0} \quad r = R_T + h \quad R \ll R_T$$

$$E_{pg} = - \int \vec{P} \cdot d\vec{l} + cte$$

$$\vec{g_0} \downarrow \quad \downarrow \vec{P}$$

$$\vec{g_0} = -g_0 \vec{j}$$

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$$

$$\vec{P} = -m \cdot g_0 \cdot \vec{j}$$

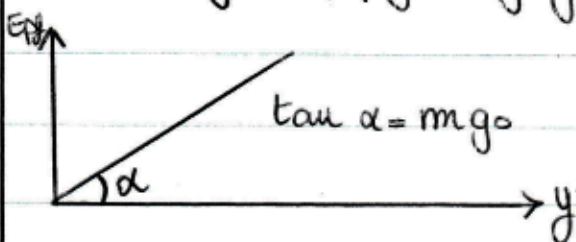
$$\vec{P} \cdot d\vec{l} = -m g_0 \cdot dy$$

$$E_{py} = - \int -m g_0 dy + cte$$

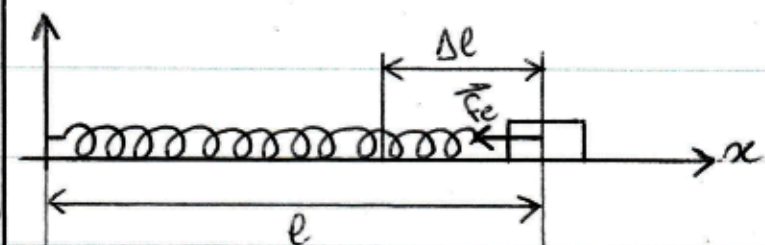
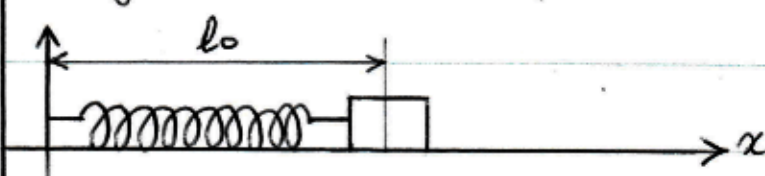
$$E_{py} = m g_0 \int dy + cte = m g_0 y + cte$$

$$y = 0 \Rightarrow E_{pg} = 0 \text{ J}$$

$$\Rightarrow cte = 0 \text{ J} \Rightarrow E_{pg} = m g_0 y \Rightarrow \text{droite}$$



Energie potentielle elastique: (Ressort):



$$\vec{F}_{fe} = -K \Delta l = -K \Delta l \vec{i}$$

$$E_{pel} = - \int \vec{F}_{fe} \cdot d\vec{l} + cte$$

$$d\vec{l} = dx \vec{i}$$

$$\Delta l = l - l_0 = x - 0$$

$$\vec{F}_{fe} = -K x \vec{i}$$

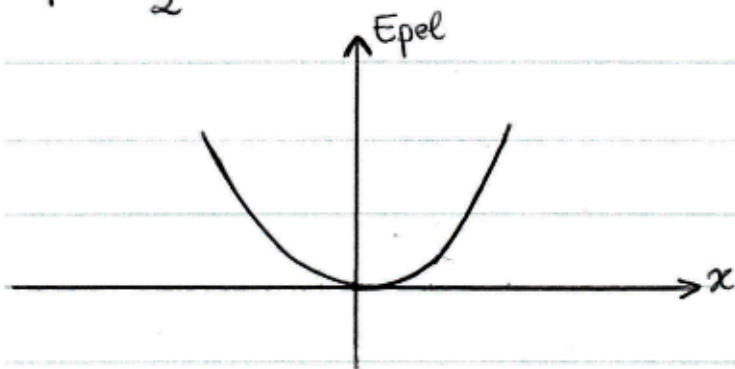
$$E_{pel} = \int -Kx dx + cte$$

$$E_{pel} = K \int x dx + cte = K \left[\frac{x^2}{2} \right] + cte$$

$$E_{pel} = \frac{1}{2} K x^2 + cte$$

$$x=0 \Rightarrow E_{pel} = 0 \Rightarrow cte = 0$$

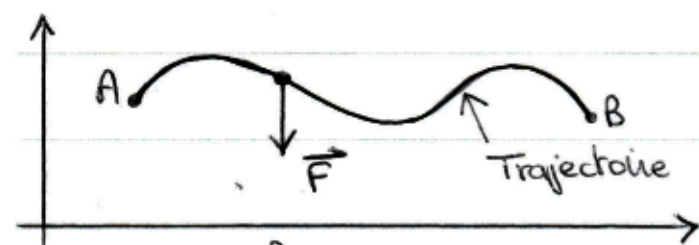
$$E_{pel} = \frac{1}{2} K x^2$$



Forces conservatives:

on dit qu'une force " \vec{F}_c " est conservative ou qu'elle dérive d'un potentiel si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi, il dépend uniquement des positions initiale et finale: "A" et "B".

Exemple: Calcul du travail d'un poids



$$W(\vec{P})|_A^B = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$\vec{P} = -mg\vec{j}$$

$$d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$\vec{P} \cdot d\vec{\ell} = -mg dy$$

$$W(\vec{P}) = -mg \int_A^B dy$$

$$W(\vec{P}) = -mg [y]_A^B = -mg [y_B - y_A]$$

Remarque

* \vec{F}_c , \vec{P} et la tension du ressort sont des forces conservatives

* le travail d'une force conservative le long d'un chemin fermé est nul.

La relation entre l'énergie potentielle et la force conservative:

Par définition, la variation de l'énergie potentielle entre deux points "A" et "B" est liée au travail de la force conservative associée à cette énergie tel que:

$$W(\vec{F}_c)|_A^B = -\Delta E_p|_A^B$$

$$W(\vec{F}_c)|_A^B = E_p(A) - E_p(B)$$

Exemple:

$$E_{pg} = mgy \quad E_p(0) = 0$$

l'énergie potentielle du poids.

$$W(\vec{P})|_A^B = -\Delta E_p|_A^B$$

$$W(\vec{P})|_A^B = E_p(A) - E_p(B)$$

$$W(\vec{P})|_A^B = mgy_A - mgy_B$$

$$W(\vec{P})|_A^B = mg(y_A - y_B)$$

Remarque:

* $E_p(B) = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{\ell} + E_p(A)$: forme intégrale

* $dW(\vec{F}_c) = -dE_p$: forme différentielle.

Théorème de l'énergie mécanique:

Forces non conservatives:

Considérons un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures " \vec{F}_{ext} ":

" \vec{F}_{ext} " est décomposée en Forces conservatives " \vec{F}_c " et Forces non conservatives " \vec{F}_{nc} "

Apartir du théorème de l'énergie cinétique, on a:

$$W(\vec{F}_{ext})|_A^B = \Delta E_c|_A^B$$

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

$$W(\vec{F}_c)|_A^B + W(\vec{F}_{nc})|_A^B = \Delta E_c|_A^B$$

$$-\Delta E_p|_A^B + W(\vec{F}_{nc})|_A^B = \Delta E_c|_A^B$$

$$W(\vec{F}_{nc})|_A^B = (\Delta E_c + \Delta E_p)|_A^B$$

$$W(\vec{F}_{nc})|_A^B = \Delta E_T|_A^B$$

Théorème de l'énergie totale.

Résultats:

Pour un système conservatif ou il existe que des forces conservatives, on a: $\vec{F}_{nc} = 0$.

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_c \text{ on aura:}$$

$$W(\vec{F}_{nc})|_A^B = 0 \Rightarrow \Delta E_T|_A^B = 0.$$

$$E_T(B) - E_T(A).$$

d'énergie totale se conserve au cours du temps.

Remarque:

des forces de frottements sont des forces non conservatives:

$$W(\vec{F}_{nc}) < 0 \Rightarrow \Delta E_T < 0$$

d'énergie totale diminue pour un système non isolé (non conservatif).

Relation entre la force conservative et la dérivée de l'énergie potentielle:

$$dw(\vec{F}_c) = -dE_p.$$

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{e} = -dE_p.$$

$$E_p = f(x, y, z).$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz.$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_c \cdot d\vec{e} &= F_{cx} dx + F_{cy} dy + F_{cz} dz \\ &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + -\frac{\partial E_p}{\partial y} dy + -\frac{\partial E_p}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Par identification:

$$\vec{F}_c \begin{cases} F_{cx} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_{cy} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_{cz} = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

ceci donne:

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla} E_p = -\text{grad } E_p.$$

$$\vec{\nabla} : \text{Nabla} : \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées planes:

$$\vec{F}_c = F_{cr} \vec{u}_r + F_{c\theta} \vec{u}_\theta$$

$$d\vec{e} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta.$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} dr + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} d\theta.$$

$$dw(\vec{F}_c) = -dE_p$$

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{e} = -\frac{\partial E_p}{\partial r} dr - \frac{\partial E_p}{\partial \theta} d\theta.$$

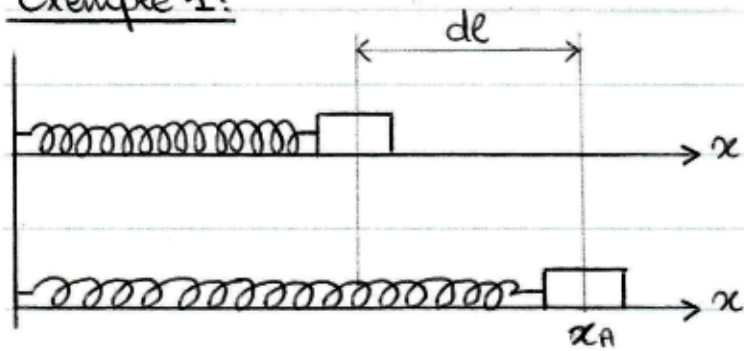
$$F_{cr} \cdot dr + F_{c\theta} r d\theta = -\frac{\partial E_p}{\partial r} dr - \frac{\partial E_p}{\partial \theta} d\theta$$

$$\Rightarrow F_{cr} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

$$F_{c\theta} = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \times \frac{1}{r}$$

Tracé d'une courbe d'énergie:

Exemple 1:



On a un contact lisse: pas de frottement

pour $x = x_A$; on a: $V = 0 \text{ m/s}$

$$E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0 \text{ J}$$

$$E_p = E_{py} + E_{pel} \text{ avec } E_{py} = 0 \text{ J}$$

$$E_p = E_{pel} = \frac{1}{2} R (\Delta l)^2$$

$$\Delta l = x - x_0 = x_A$$

$$E_p = \frac{1}{2} R (x_A)^2$$

$$E_T(A) = E_c(A) + E_p(A)$$

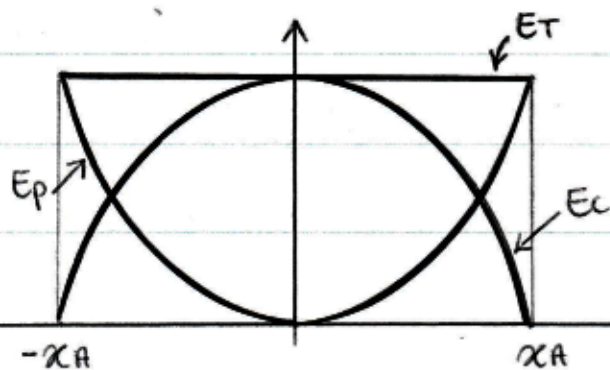
$$E_T(A) = \frac{1}{2} R (x_A)^2$$

On a que des forces conservatives.

$$E_T = \text{cte} = \frac{1}{2} R (x_A)^2$$

$$E_{pel}(x) = \frac{1}{2} R (x)^2 = E_p(x)$$

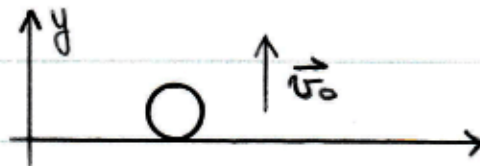
à n'importe quelle position:



Tracé d'une courbe d'énergie:

Exemple:

Si on lance un corps avec une vitesse v_0 à partir du sol vers le haut,



on néglige les frottements:

on a que des forces conservatives: \vec{P}

on a conservation de l'énergie totale.

$$E_T(y=0) = E_T(y)$$

$$E_T(y=0) = E_c(y=0) + E_p(y=0)$$

$$\left. \begin{aligned} E_c(y=0) &= \frac{1}{2} m v_0^2 \\ E_p(y=0) &= mgy \end{aligned} \right\} E_T(y=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{cte}$$

$$E_c(y) = \frac{1}{2} m v^2$$

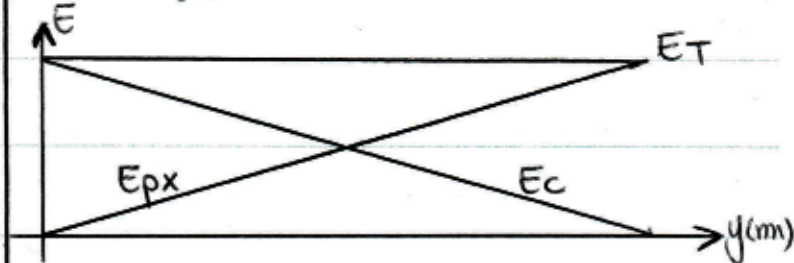
$$E_p(y) = mgy$$

$$E_T(y) = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = \frac{1}{2} m v_0^2$$

pour $y = y_{\text{max}}$, on a: $v = 0 \text{ m/s}$

$$E_T(y_{\text{max}}) = mgy_{\text{max}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0^2 = 2gy_{\text{max}}$$



Pour tracer E_c : $E_c = E_T - E_p$

Etude qualitative du mouvement:

Etude liée d'un système soumis à des forces conservatives:

d'énergie mécanique totale d'un système soumis à qu'à des forces conservatives est constante:

$$E_T = E_c + E_p = \text{constante.}$$

Par nature on a l'énergie cinétique $E_c \geq 0$

$$\text{donc: } E_c = E_T - E_p \geq 0 \Rightarrow E_T \geq E_p.$$

De ce fait pour avoir un mouvement:

$$E_T \geq E_p.$$

Exemples: Oscillateur harmonique:

$$E_{pel} = \frac{1}{2} R x^2.$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Pas de frottement $\Rightarrow E_T = \text{cte}$

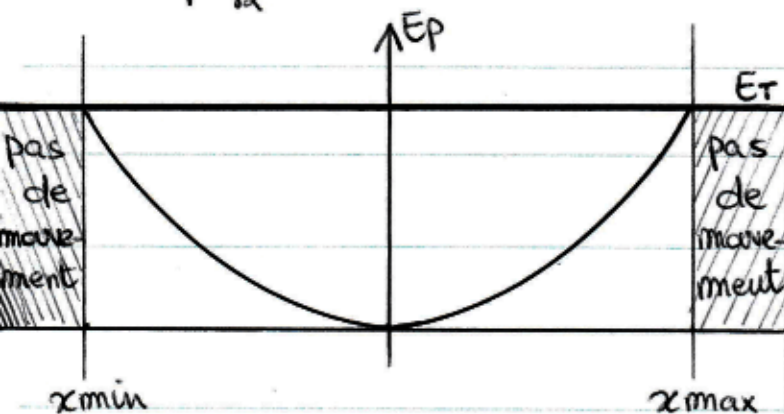
$$E_T = E_c + \frac{1}{2} R x^2$$

$$E_c = E_T - \frac{1}{2} R x^2 \geq 0 \Rightarrow E_T \geq \frac{1}{2} R x^2$$

$$x^2 \leq \frac{2E_T}{R} \Rightarrow -\sqrt{\frac{2E_T}{R}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E_T}{R}}$$

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E_T}{R}}$$

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{2E_T}{R}}$$



Equilibre: Un point matériel est en équilibre lorsque sa vitesse et son accélération sont nulles

ce qui impose: $\sum \vec{F} = 0$

Détermination des positions d'équilibre:

On cherche les positions d'équilibre pour un système conservatif. On peut utiliser un raisonnement énergétique sachant une force conservative dérive d'une énergie potentielle:

$$\vec{F} = \vec{F}_c = -\vec{\text{grad}} E_p = -\vec{\nabla} E_p$$

$$\vec{F}_c = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i} \Rightarrow F_c = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$\text{à l'équilibre: } F_c = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0.$$

d'énergie potentielle passe par un extremum "maximum ou minimum" aux points d'équilibre

Etude de stabilité des positions d'équilibre

Définition:

On dit que un équilibre est stable si quand on écarte le système de cette position; il revient spontanément à cette position.

Une position d'équilibre est instable si quand on écarte le système, il s'éloigne définitivement de cette position, ceci se traduit comme suit:

* Equilibre stable pour $x = x_0 \Rightarrow$

$$\frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0 \text{ et } \frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0 \text{ "Ep minimale"}$$

* Equilibre instable pour $x = x_0 \Rightarrow$

$$\frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0 \text{ et } \frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0 \text{ "Ep maximale"}$$

Exemple:

$$E_p = 2x^3 - 3x^2$$

$$\text{ona: } \frac{dE_p}{dx} = 6x^2 - 6x = (6x)(x-1)$$

$$\text{ona: } x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 1$$

$$E_p(0) = 0 \text{ J} \rightarrow \text{maximum d'energie}$$

$$E_p(1) = -1 \text{ J} \rightarrow \text{minimum d'energie}$$

$$x = 0 \rightarrow \text{equilibre instable (} E_{p\max} \text{)}$$

$$x = 1 \rightarrow \text{equilibre stable (} E_{p\min} \text{)}$$

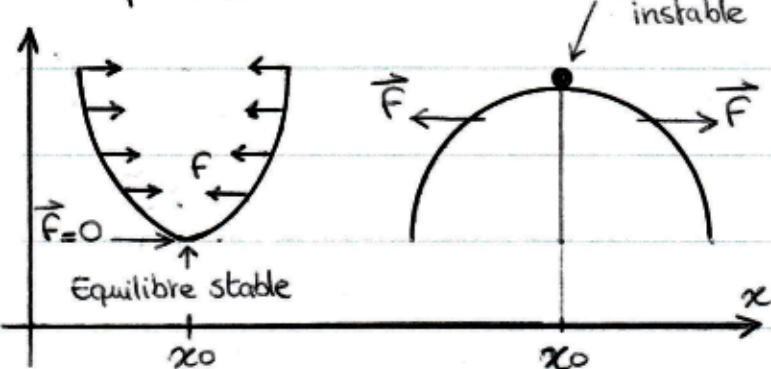
sinon:

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = 12x - 6, \text{ pour } x = 0$$

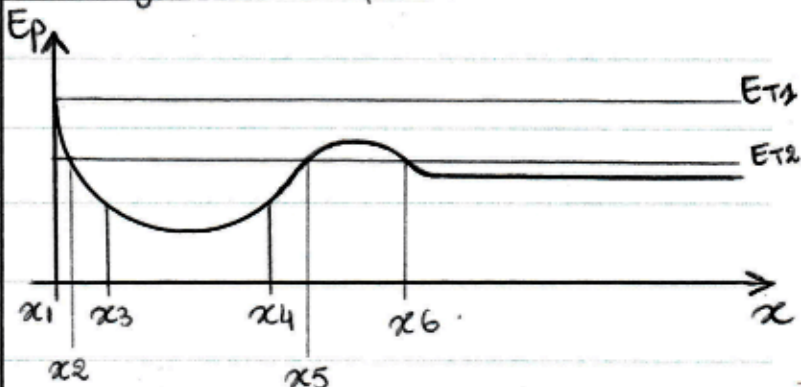
$$\Rightarrow \frac{d^2 E_p}{dx^2} = -6 < 0 \text{ "Equilibre instable"}$$

$$\text{pour } x = 1 \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{dx^2} = 6 > 0 \text{ "Equilibre stable"}$$

Exemple 2:



Nature de mouvement en fonction de l'energie mecanique:



ona un mouvement pour $E_T \gg E_p$.

* Si $E_T = E_{T1}$:

ona un mouvement sur $x_1 \rightarrow \infty$

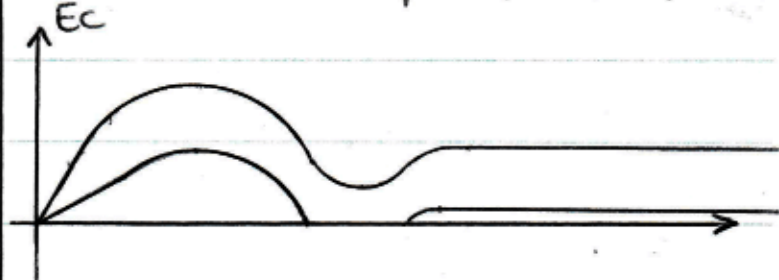
* Si $E_T = E_{T2}$:

ona un mouvement:

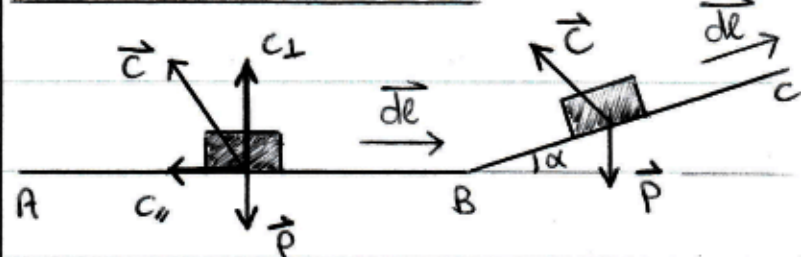
$x \in [x_2, x_5]$ oscillative

$x \in [x_6, \infty[$

Ona: $E_c = E_T - E_p$; faire point par point:



Calcul du travail de \vec{C} :



des frottements sont caractérisés par le coefficient de frottement μ_d .

$$W(\vec{C})|_A^C = W(\vec{C})|_A^B + W(\vec{C})|_B^C$$

$$v = v_0 \times l \frac{d\theta}{dt}$$

$$E_T = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta E_T|_i^f = W(\vec{F}_{nc})|_i^f$$

\vec{P} : est une force conservative

\vec{T} : est une force non conservative

$$\Delta E_T|_i^f = W(\vec{T})|_i^f = \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{T} \perp d\vec{\ell} \Rightarrow W(\vec{T}) = 0$$

$$\Delta E_T|_i^f = 0 \Rightarrow E_T = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} m l^2 \left[2 \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] + mgl \left[0 - \frac{d\theta}{dt} (-\sin\theta) \right]$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$m l^2 \times \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \times \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = 0$$

$$l \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$$\text{pour } \theta \text{ faible} \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \text{ "oscillation harmonique"}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$