Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique
Master 2 en Physique

Faculté des Sciences Exactes

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique

Module : Méthodes Numérique 2

RATTRAPAGE

Année 2018/2019

EXERCICE N°1 : (05Pts)

La loi de Newton montre que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température externe, autrement dit qu'il existe une constante $K < 0$ telle que la température du corps suit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K\left(T(t) - T_{ext}\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad \text{(I.1)}$$

1- Soit Δt le pas du temps, écrire le schéma d'Euler implicite pour approcher la solution de cette équation différentielle.

2- Soit $T_{ext} = 0°C$, en déduire une forme du type : $T_{n+1} = g(\Delta t, n, T_0)$

Avec $g(\Delta t, n, T_0)$ à préciser.

Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode ?

EXERCICE N°2 : (08 Pts)

La température T à une distance X d'une extrémité d'une tige mince, de conductivité uniforme K, après un temps t est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - K\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0 \quad \text{(II.1)}$$

Soit L la longueur de la tige et T_0 une température de référence. On pose

$$x = \frac{X}{L} \text{ et } \theta = \frac{T}{T_0}$$

2.1-Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial X}$ et $\dfrac{\partial^2 T}{\partial X^2}$ en fonction de $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Déduire une nouvelle expression de l'EDP (II.1)

2.2-On pose $\tau = \dfrac{Kt}{L^2}$, Montrer que l'EDP (II.1) se transforme sous la forme :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad \text{(II.2)}$$

2.3-On considère les schémas d'approximation spatio-temporelle suivants :

$$\theta(x_i, \tau_{n+1}) = \theta(x_i, \tau_n) + \Delta\tau\frac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial\tau} + o(\Delta\tau^2)$$

$$\begin{cases} \theta(x_{i+1}, \tau_n) = \theta(x_i, \tau_n) + \Delta x\dfrac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x} + \dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x^2} + o(\Delta x3) \\ \theta(x_{i-1}, \tau_n) = \theta(x_i, \tau_n) - \Delta x\dfrac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x} + \dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x^2} + o(\Delta x3) \end{cases}$$

Quel est le schéma d'approximation résultant pour l'EDP (II.2) et quel est son ordre de précision en temps et en espace.

2.4-Montrer que la formule de récurrence explicite obtenue peut s'écrire sous la forme :

$$\theta_i^{n+1} = r\theta_{i-1}^n + (1-2r)\theta_i^n + r\theta_{i+1}^n$$

Où $\theta_i^{n+1} = \theta(x_i, \tau_{n+1})$, $\theta_i^n = \theta(x_i, \tau_n)$, $\theta_{i+1}^n = \theta(x_{i+1}, \tau_n)$ et $\theta_{i-1}^n = \theta(x_{i-1}, \tau_n)$

Préciser la valeur de r

Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique
Master 2 en Physique

Faculté des Sciences Exactes

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique

Module : Méthodes Numérique 2

EXERCICE N°3 : (07 Pts)

On considère un problème de transport qui consiste à chercher l'inconnue $u(x,t)$: $\Re \, X \, \Re^+ \rightarrow \Re$

Vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t), \; x \in \Re \;\; t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (3.1)$$

On suppose que le paramètre c est positif.

Pour résoudre ce problème, on adopte un schéma explicité en temps et centrée en espace. On discrétise $\Re \, X \, \Re^+$. En introduisant les points $x_j = j\Delta x$ pour $j \in Z$ et les instants $t^n = n\Delta t$, on cherche alors une approximation $u_j^n \approx u(x_j, t^n)$. Le schéma centré s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = f_j^n, \; \text{pour n} \geq 1 \\ u_j^0 = u_0(x_j) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Avec $f_j^n = f(x_j, t^n)$

1-Ce schéma peut s'écrire sous la forme : $u_j^{n+1} = u_j^n + \dfrac{\lambda}{2}\left(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n\right) + \Delta t f_j^n$, Déterminer λ

2-Pour $f_j^n = 0$, on choisit la donnée initiale $u_0(x_j) = \xi_0 e^{ikj\Delta x}$ et on cherche la solution sous la forme $u_j^n(x_j) = \xi_n e^{ikj\Delta x}$. Etudier la stabilité du schéma (3.2) au sens de Von Neumann/Fourrier

Université A. Mira de Béjaia | *Faculté des Sciences Exactes*
Département de Physique
Master 2 en Physique | *Option : Dynamique Des Fluides et Energétique*

Module : Méthodes Numérique 2

CORRIGE RATTRAPAGE

CORRIGE EXERCICE N°1 : (05 Pts)

La loi de Newton montre que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température externe, autrement dit qu'il existe une constante $K<0$ telle que la température du corps suit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K\left(T(t) - T_{ext}\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

1- Soit Δt le pas du temps, écrire le schéma d'Euler implicite pour approcher la solution de cette équation différentielle.

La méthode d'Euler implicite est une méthode d'intégration numérique des EDO du premier ordre de la forme $\frac{dT}{dt} = F(t, T(t))$. En choisissant un pas de discrétisation Δt, on obtient une suite de valeurs (t_n, T_n) qui peuvent être une approximation excellente de la fonction $T(t)$

$$\begin{cases} t_n = t_0 + n\Delta t \\ T_{n+1} = T_n + \Delta t F(t_{n+1}, T_{n+1}) \end{cases}$$

01 pt

La méthode d'Euler implicite pour cette EDO s'écrit donc :

$$\begin{cases} t_n = t_0 + n\Delta t \\ T_{n+1} = T_n + K\Delta t(T_{n+1} - T_{ext}) \end{cases}$$

01 pt

2-Soit $T_{ext} = 0°C$, en déduire une forme du type : $T_{n+1} = g(\Delta t, n, T_0)$

Avec $g(\Delta t, n, T_0)$ à préciser.

$$\begin{cases} t_n = t_0 + n\Delta t \\ T_{n+1} = T_n + K\Delta t T_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_n = t_0 + n\Delta t \\ T_{n+1} = g(\Delta t, n, T_0) = \dfrac{1}{1-K\Delta t} T_n = \dfrac{1}{(1-K\Delta t)^{n+1}} T_0 \end{cases}$$

01 pt

Que peut-on en déduire sur la convergence de la méthode ?

L'itéré en t_n ne dépend que de Δt et de n mais ne dépend pas de T_n.

Comme $0 < \frac{1}{1-K\Delta t} < 1$ pour tout Δt, la suite est positive décroissante, ce qui assure que la solution numérique est stable et convergente

02 pts

CORRIGE EXERCICE N°2 : (08 Pts)

La température T à une distance X d'une extrémité d'une tige mince, de conductivité uniforme K, après un temps t est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - K\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

Soit L la longueur de la tige et T_0 une température de référence. On pose

$$x = \frac{X}{L} \text{ et } \theta = \frac{T}{T_0}$$

2.1-Calculer $\frac{\partial T}{\partial X}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$ en fonction de $\frac{\partial T}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Déduire une nouvelle expression de l'EDP (II.1)

On a $x = \frac{X}{L}$

D'où $\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}$ 0,5 pts et $\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 0,5 pts

Ce qui donne : $\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{1}{L}\frac{\partial T}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

2.2-On pose $\tau = \frac{Kt}{L^2}$, Montrer que l'EDP (II.1) se transforme sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad \text{(II.2)}$$

On a $\theta = \frac{T}{T_0} \Rightarrow T = T_0\theta$ 0,5 pts et $\tau = \frac{Kt}{L^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial}{\partial \tau}$ 0,5 pts

D'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} - K\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0 \Rightarrow \frac{K}{L^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0$$ 0,5 pts

Finalement : $\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ CQFD 0,5 pts

2.3-On considère les schémas d'approximation spatio-temporelle suivants :

$$\theta(x_i, \tau_{n+1}) = \theta(x_i, \tau_n) + \Delta\tau\frac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial\tau} + o\left(\Delta\tau^2\right)$$

$$\begin{cases} \theta(x_{i+1}, \tau_n) = \theta(x_i, \tau_n) + \Delta x\frac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x^2} + o(\Delta x3) \\ \theta(x_{i-1}, \tau_n) = \theta(x_i, \tau_n) - \Delta x\frac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2\theta(x_i, \tau_n)}{\partial x^2} + o(\Delta x3) \end{cases}$$

Quel est le schéma d'approximation résultant pour l'EDP (II.2) et quel est son ordre de précision en temps et en espace.

On a :

$$\theta(x_i, \tau_{n+1}) = \theta(x_i, \tau_n) + \Delta\tau\frac{\partial\theta(x_i, \tau_n)}{\partial\tau} + o\left(\Delta\tau^2\right)$$

D'où

$$\frac{\partial\theta(x_i,\tau_n)}{\partial\tau} \cong \frac{\theta(x_i,\tau_{n+1})-\theta(x_i,\tau_n)}{\Delta\tau}+o(\Delta\tau)$$ 0,5 pts

Et

$$\begin{cases}\theta(x_{i+1},\tau_n)=\theta(x_i,\tau_n)+\Delta x\dfrac{\partial\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x}+\dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x^2}+o(\Delta x3)\\ \theta(x_{i-1},\tau_n)=\theta(x_i,\tau_n)-\Delta x\dfrac{\partial\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x}+\dfrac{(\Delta x)^2}{2!}\dfrac{\partial^2\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x^2}+o(\Delta x3)\end{cases}$$

D'où

$$\theta(x_{i+1},\tau_n)+\theta(x_{i-1},\tau_n)=2\theta(x_i,\tau_n)+(\Delta x)^2\frac{\partial^2\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x^2}+o(\Delta x3)$$ 0,5 pts

Alors :

$$\frac{\partial^2\theta(x_i,\tau_n)}{\partial x^2}\cong\frac{\theta(x_{i+1},\tau_n)-2\theta(x_i,\tau_n)+\theta(x_{i-1},\tau_n)}{(\Delta x)^2}+o(\Delta x)$$ 0,5 pts

On obtient finalement

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\theta(x_i,\tau_{n+1})-\theta(x_i,\tau_n)}{\Delta\tau}-\frac{\theta(x_{i+1},\tau_n)-2\theta(x_i,\tau_n)+\theta(x_{i-1},\tau_n)}{(\Delta x)^2}+o(\Delta x,$$ 0,5 pts

Qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\theta_i^{n+1}-\theta_i^n}{\Delta\tau}-\frac{\theta_{i+1}^n-2\theta_i^n+\theta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+o(\Delta x,\Delta\tau)$$

Ce schéma est d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace 01 pt

2.4-Montrer que la formule de récurrence explicite obtenue peut s'écrire sous la forme :

$$\theta_i^{n+1}=r\theta_{i-1}^n+(1-2r)\theta_i^n+r\theta_{i+1}^n$$

Où $\theta_i^{n+1}=\theta(x_i,\tau_{n+1})$, $\theta_i^n=\theta(x_i,\tau_n)$, $\theta_{i+1}^n=\theta(x_{i+1},\tau_n)$ et $\theta_{i-1}^n=\theta(x_{i-1},\tau_n)$

Préciser la valeur de r

On a $$\frac{\theta_i^{n+1}-\theta_i^n}{\Delta\tau}-\frac{\theta_{i+1}^n-2\theta_i^n+\theta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}=0$$ 0,5 pts

D'où $$\theta_i^{n+1}=\theta_i^n+\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left[\theta_{i+1}^n-2\theta_i^n+\theta_{i-1}^n\right]$$ 0,5 pts

On obtient alors : $$\theta_i^{n+1}=\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\theta_{i-1}^n+\left(1-2\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right)\theta_i^n+\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\theta_{i+1}^n$$ 0,5 pts

Qui s'écrit sous la forme : $\theta_i^{n+1}=r\theta_{i-1}^n+(1-2r)\theta_i^n+r\theta_{i+1}^n$

Avec $$r=\frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$$ 0,5 pts

SOLUTION EXERCICE N°3 : (07 Pts)

On considère un problème de transport qui consiste à chercher l'inconnue $u(x,t)$: $\Re \text{ X } \Re^+ \to \Re$

Vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t), \; x \in \Re \;\; t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que le paramètre c est positif.

Pour résoudre ce problème, on adopte un schéma explicité en temps et centrée en espace. On discrétise $\Re \text{ X } \Re^+$. En introduisant les points $x_j = j\Delta x$ pour $j \in Z$ et les instants $t^n = n\Delta t$, on cherche alors une approximation $u_j^n \approx u(x_j, t^n)$. Le schéma centré s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = f_j^n, \; \text{pour n} \geq 1 \\ u_j^0 = u_0(x_j) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec $f_j^n = f(x_j, t^n)$

1-Ce schéma peut s'écrire sous la forme : $u_j^{n+1} = u_j^n + \dfrac{\lambda}{2}\left(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n\right) + \Delta t f_j^n$, Déterminer

On a $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = f_j^n \Rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n + \dfrac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n\right) + \Delta t f_j^n$ 01 pt

D'où $\lambda = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$ 01 pt

3-Pour $f_j^n = 0$, on choisi la donnée initiale $u_0(x_j) = \xi_0 e^{ikj\Delta x}$ et on cherche 1λa solution sous la forme $u_j^n(x_j) = \xi_n e^{ikj\Delta x}$.

Etude de la stabilité du schéma (3.2) au sens de Von Neumann/Fourrier

En injectant l'expression $u_j^n(x_j) = \xi_n e^{ikj\Delta x}$ dans l'expression (3.2), on obtient

$$\xi_{n+1} = \left[1 + \frac{\lambda}{2}\left(e^{-ik\Delta x} - e^{ik\Delta x}\right)\right]\xi_n \Rightarrow \xi_{n+1} = [1 - i\lambda\sin(k\Delta x)]\xi_n$$ 01 pt

D'où $\left|\dfrac{\xi_{n+1}^2}{\xi_n^2}\right| = \left[1 + \lambda^2 \sin^2(k\Delta x)\right]$ 02 pt

Pour $k\Delta x \notin \pi$, on a $\left|1 + \lambda^2 \sin^2(k\Delta x)\right| > 1$ quel que soit λ. 01 pt

Conclusion ; Le schéma centré est toujours instable au sens de Von Neumann/Fourier

01 pt