Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique

Faculté des Sciences Exactes
Master 1 en Physique

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique
Module : Méthodes Numériques et Programmation I

EXAMEN

Année 2018/2019

EXERCICE N°1 : (03 Pts)

Pour les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin(u) = e^y$$

Indiquer, pour chacune des équations, son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

EXERCICE N°2 : (09 Pts)

On considère les problèmes suivants :

$$\begin{cases} u_{0t} + 2u_{0x} = 0 \\ u_0(x, t=0) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u_{1t} + 2u_{1x} = -u_1 \\ u_1(x, t=0) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases} \quad (2)$$

1-En utilisant la méthode des caractéristiques, trouver la solution $u_0(x,t)$ du problème (1) et la solution $u_1(x,t)$ du problème (2).

2- Tracer $u_0(x, t=1)$ et $u_1(x, t=1)$ en fonction de x, conclure ?

EXERCICEN°3 :(08 points)

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad a < x < b, \\ u'(a) = \alpha \qquad\qquad (1) \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Avec $c(x) \geq \gamma > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

On introduit un maillage $(x_0, x_1, \ldots, x_{N_x+1})$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que $x_i = a + ih$, avec $h = (b-a)/(N_x+1)$.

On suppose que la solution u de (1) se prolonge sur $[a-h, b]$.

1- En écrivant que u est la solution de (1) au point a, montrer que :

$$\frac{-u(a-h) + 2u(a) - u(a+h)}{h^2} + c(a)u(a) = f(a) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(a) + o(h^2) \qquad (2)$$

2- Montrer que nous avons aussi :

$$u'(a) = \frac{u(a+h) - u(a-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(a) + o(h^3) \qquad (3)$$

On pose u_{-1} une approximation de la solution u de (1) prolongée au point $x_{-1} = a - h$ et u_i l'approximation de $u(x_i)$

3- En utilisant la relation (3), trouver l'expression de u_{-1} en fonction de $(u_i)_{0 \leq i \leq N_x}$, α et β.

4- En utilisant la relation (2), déduire la discrétisation de la condition aux limites au point $x_0 = a$

Université A. Mira de Béjaia
Département de Physique

Faculté des Sciences Exactes
Master 1 en Physique

Option : Dynamique Des Fluides et Energétique
Module : Méthodes Numériques et Programmation I

CORRIGE EXAMEN

Année 2018/2019

CORRIGE EXERCICE N°1 : (03 Pts)

Pour les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin(u) = e^y$$

Indiquer, pour chacune, son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

- Pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y$, cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2 **01,5 pts**

Pour montrer que l'EDP est linéaire, on considère l'opérateur

$$u \to L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}$$

Prenant $a, b \in \Re$ et u, v deux fonctions. Il faut montrer que $L(au+bv) = aL(u) + bL(v)$

$$L(au+bv) = \frac{\partial^2 (au+bv)}{\partial x^2} + x\frac{\partial (au+bv)}{\partial y} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + ax\frac{\partial u}{\partial y} + bx\frac{\partial v}{\partial y} = aL(u) + bL(v)$$

L'EDP est de la forme $L(u) = y$, l'EDP est non homogène

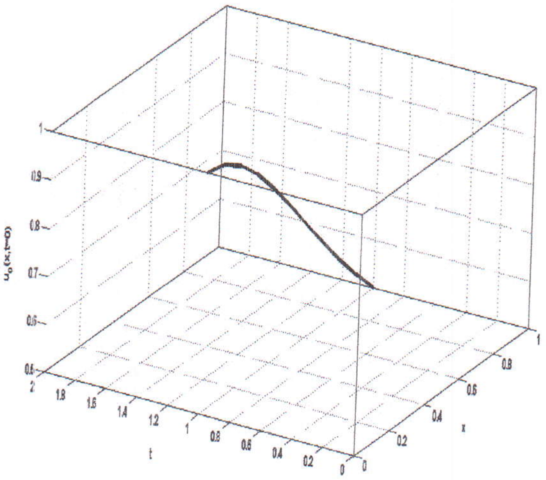
Comme la dérivée partielle d'ordre supérieure est d'ordre 2, alors l'EDP est d'ordre 2.

-Pour $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin(u) = e^y$, cette EDP est non linéaire, d'ordre deux, non homogène

01,5 pts

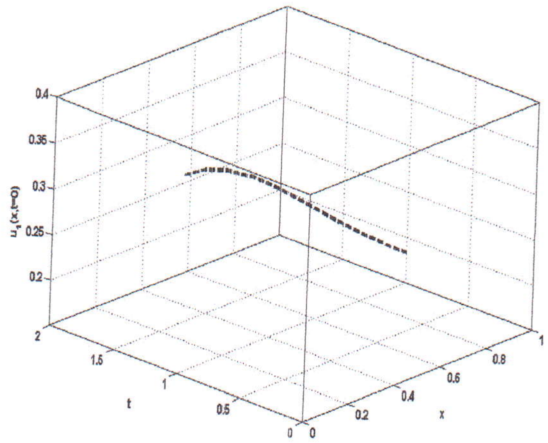
Sachant que $u(x,t=0)=\dfrac{1}{x^2+1}$ finalement : $u(x,t)=\dfrac{e^{-t}}{x^2+1}$ **01 pt**

2- Tracer $u_0(x,t=1)$ et $u_1(x,t=1)$ en fonction de x, conclure ?



Graphe de $u_0(x,t=1)$

01,5 pts



Graphe de $u_1(x,t=1)$

01,5 pts

CORRIGE EXERCICE N°3 :(08 points)

1- On a :

$$u(a-h)=u(a)-h.u^{(1)}(a)+\frac{h^2}{2}u^{(2)}(a)-\frac{h^3}{6}u^{(3)}(a)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(a)+o(h^4) \qquad (a)$$

$$u(a+h)=u(a)+h.u^{(1)}(a)+\frac{h^2}{2}u^{(2)}(a)+\frac{h^3}{6}u^{(3)}(a)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(a)+o(h^4) \qquad (b)$$

En sommant (a) et (b) membre à membre, nous obtenons :

$$u(a-h)-2u(a)+u(a+h)=h^2u^{(2)}(a)+\frac{h^4}{12}u^{(4)}(a)+o(h^4) \qquad (c)$$

D'où

$$-u^{(2)}(a)=\frac{-u(a-h)+2u(a)-u(a+h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(a)-o(h^2) \quad (d)$$

L'équation (1) s'écrit alors au point a

$$\frac{-u(a-h)+2u(a)-u(a+h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(a)-o(h^2)+c(a)u(a)=f(a)$$

D'où

02 pts

$$\frac{-u(a-h)+2u(a)-u(a+h)}{h^2}+c(a)u(a)=f(a)-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(a)+o(h^2) \quad (2) \quad \text{C.Q.F.D}$$

2- En faisant la différence (b)-(a) membre à membre, nous obtenons :

$$u(a+h)-u(a-h)=2h.u^{(1)}(a)+\frac{h^3}{3}u^{(3)}(a)+o(h^4)$$

d'où

$$u^{(1)}(a)=\frac{u(a+h)-u(a-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}u^{(3)}(a)+o(h^3)$$

$$u'(a)=\frac{u(a+h)-u(a-h)}{2h}+\frac{h^2}{6}u^{(3)}(a)+o(h^3) \qquad (3)$$

02 pts

On pose u_{-1} une approximation de la solution u de (1) prolongée au point $x_{-1}=a-h$ et u_i l'approximation de $u(x_i)$

3- Nous avons

$$u'(a)=\frac{u(a+h)-u(a-h)}{2h}\Rightarrow \alpha=\frac{u_1-u_{-1}}{2h}\Rightarrow u_{-1}=u_1-2h\alpha$$

02 pts

4- En utilisant la relation (2), déduire la discrétisation de la condition aux limites au point $x_0=a$

En écrivant le schéma au point a, nous avons :

$$-(u_1-2u_0+u_{-1})+h^2c(a)u_0=h^2f(a)$$

02 pts

Et en remplaçant u_{-1} par sa valeur, nous obtenons :

$$-2(u_1-u_0-h\alpha)+h^2c(a)u_0=h^2f(a)$$