Traitements de Lissage : Filtrage du Bruit

Cours Fait par Mme GHENNAM
Avril 2018

Pour les étudiants en
Master 1 en Systèmes des Télécommunication

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image (**Lissage** ou **dé-bruitage**)

- Ces traitements visent à éliminer le bruit de l'image, de façon à avoir une image nette la plus ressemblante à la scène prise.

Causes des bruits :

Généralement la cause provient du contexte d'acquisition

- échantillonnage : quand les objets sont de la taille d'un pixel,
  - →**bruit poivre et sel (additif)**
- quantification : comme dans tout CAN
  - → **bruit de quantification (multiplicatif)**
- perturbation à l'acquisition :
  - des capteurs (magnétiques en IRM, antenne de télévision, …)
  - Sous ou sur-illumination dans les appareils photos (la scène contient plus de couleur que l'intervalle de couleurs délimité par l'acquisition)

→**Bruit impulsionnel : bruit blanc gaussien ou exponentiel (additif)**

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Modélisation du bruit :

Bruit impulsionnel :

- Modélise la perturbation à l'acquisition.
- A pour densité de probabilité,

$$f(a) = C \times e^{-K \times a^{\alpha}}$$

Si :

- $\alpha = 1$: bruit exponentiel ;

  on posera éventuellement $C = 1$ et $K = qlcq$

- $\alpha = 2$: bruit gaussien, de moyenne $\mu = 0$ et variance σ^2,
  - donc $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ et $K = \frac{1}{2\sigma^2}$
  - Ce bruit modélise parfaitement le bruit d'acquisition (sous ou sur illumination dans les appareils photos)

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Modélisation du bruit :

Image bruitée avec un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2=16

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Modélisation du bruit :

Bruit poivre et sel

- Approxime :
  - le bruit d'échantillonnage,
  - ainsi que les poussières sur un objectif d'un appareil photo ou un scanner ;

- Il est modélisé par l'ajout de points blancs ou noirs sur des zones sombres ou clairs de l'image.

Image bruitée avec un bruit de poivre et sel de 10%

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image
Procédure

Procédure d'élimination ou de lissage du bruit

On peut considérer que :

le bruit = hautes fréquences non présentes dans la scène

- Il suffirait donc pour les éliminer d'effectuer un **filtrage passe-bas**.
  - Dans le domaine spatiale : méthodes sur un voisinage (convolution et autres)
  - Dans le domaine fréquentiel : méthode sur la FFT

Notions Nécessaires dans le **filtrage** du bruit sur l'image

Voisinage d'un pixel

- Le voisinage $[n \times n]$ d'un pixel $I(i,j)$ est l'ensemble des pixels à son alentour :

$$V_n[I(i,j)] = \left\{ I(p,k)\ , \quad \begin{pmatrix} i - \dfrac{n-1}{2} \leq p < i + \dfrac{n-1}{2} \\ j - \dfrac{n-1}{2} \leq k < j + \dfrac{n-1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

  - n est un **entier impair**.

  $[n \times n] = [3 \times 3]$, ou $[5 \times 5]$, ou $[7 \times 7]$, … ou $[11 \times 11]$,

  …..

  - Le pixel $I(i,j)$ est au centre de ce voisinage

Notions Nécessaires dans le **filtrage** du bruit sur l'image

Connexité

Dans le voisinage $V_n[I(i,j)]$ on ne considérera que les pixels avec une certaine connexité avec le pixel central $I(i,j)$.

- Connexité en croix
- Connexité en diamant
- Connexité en carré (la plus usité)

- On illustre dans la suite, des masques **unité** de dimension $[3 \times 3]$ et $[7 \times 7]$. (on verra plus tard l'utilité de ces masques)

Notions Nécessaires dans le **filtrage** du bruit sur l'image

Connexité

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Carré (connexité 8)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

croix (connexité 4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

croix

Connexité 11

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diamant

Connexité 25

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

carré

Connexité 49

- Une valeur 0 : le pixel n'est pas considéré
- Une valeur 1 : le pixel est considéré

Notions Nécessaires dans le **filtrage** du bruit sur l'image

Convolution

La convolution d'ne image I de taille $[M, N]$ avec un filtre h de taille $[m, n]$, s'exprime par :

$$(I * h)_{(i,j)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} I(k,l).h(i-k,j-l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} I(i-k,j-l)h(k,l)$$

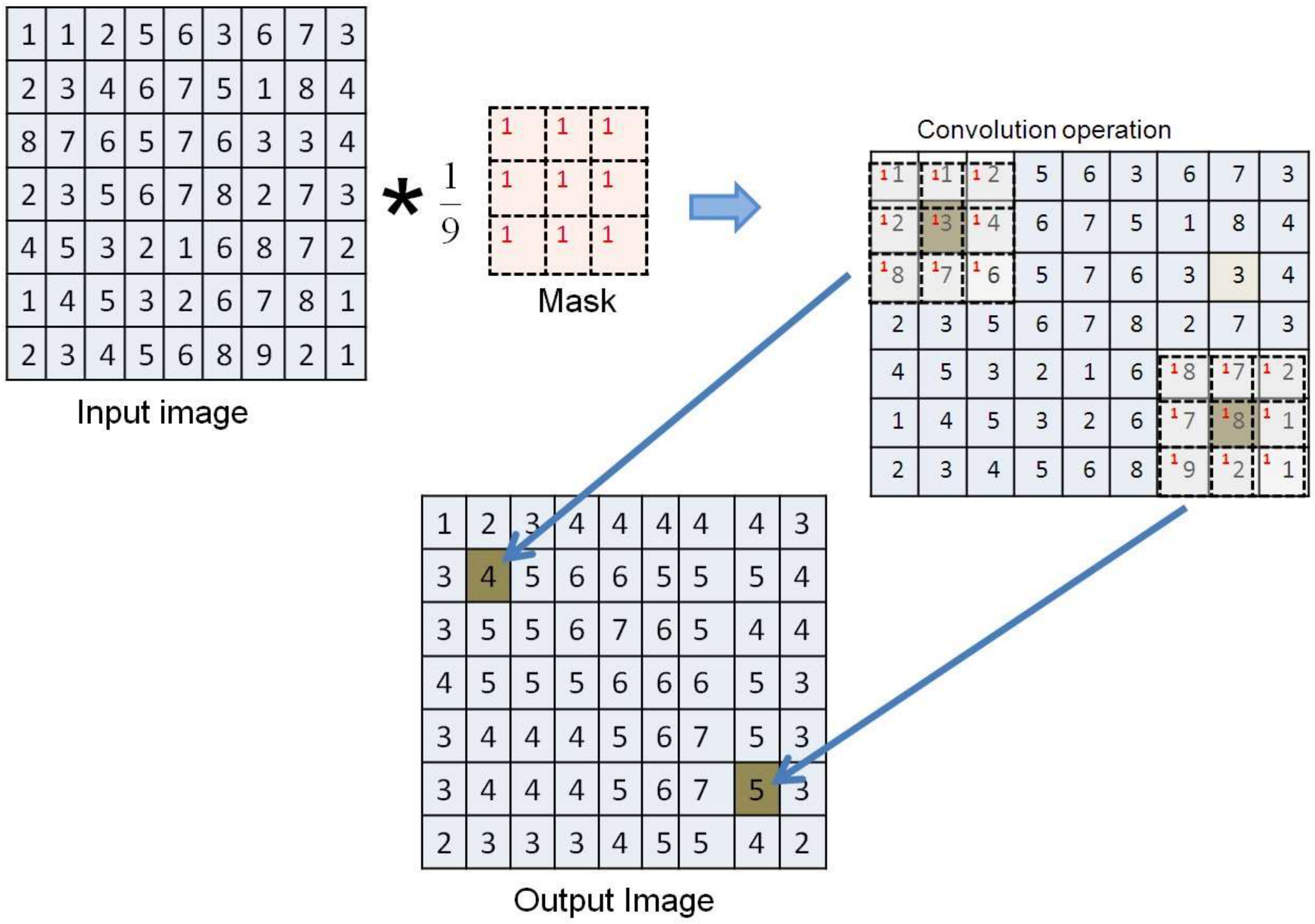
$$= \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} h(k,l).I(i-k,j-l)$$

- Le filtre h est appelé noyau ou masque
- La taille de $(I * h)$ est $[N+n-1, \quad M+m-1]$

Notions Nécessaires dans le **filtrage** du bruit sur l'image

Convolution

- *Exemple* :



Problèmes de bord :

- Remplir de zéros, sur $\frac{m-1}{2}$ pixels, de part et d'autre de l'image.

Ou dupliquer les pixels du bord, sur $\frac{m-1}{2}$ pixels, de part et d'autre de l'image

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image
Méthodes sur Voisinage

- On abordera en 1er lieu les méthodes de filtrage qui s'opèrent sur **le voisinage**.

- On en dénombre, les filtres :
  - Linéaires : s'expriment sous formes de convolution (filtre Moyenneur, gaussien…)

$$I_{filtrée} = I_{bruitée} * h$$

  - Non-linéaire (filtre conservatif, filtre Median, …)

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Moyenneur

- Appelé principalement : ***averaging filtering / mean filtering***

- La valeur du pixel $I(i,j)$ est remplacé par la moyenne de son voisinage $V_n[I(i,j)]$ de dimension $[n \times n]$, et selon une certaine connexité.

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Moyenneur

image originale

image bruitée par un bruit blanc ($\sigma = 16$)

image lissée par un noyau 3x3

image lissée par un noyau 5x5

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Moyenneur

<u>Discussion</u>

Tout pixel est remplacé par la moyenne des pixels avoisinants qu'il soit bruit ou non

- S'il correspond à un bruit ≅ haute fréquence, (valeur élevée sur fond sombre, ou valeur basse sur fond clair) elle sera abaissée (ou élevée) à la valeur de la moyenne de son voisinage, elle est donc lissée.

- S'il ne correspond pas au bruit (zone homogène), sa valeur serait proche de celles de ses voisins, donc de la moyenne aussi. Sa valeur ne variera pas, ou peu

- Par contre, s'il correspond à un contour (ou détail), considéré aussi comme haute fréquence, (élévation brusque ou abaissement brusque du niveau de gris), il sera lissé aussi bien que le bruit.

- L'inconvénient donc de ce filtre est qu'il élimine aussi les HF correspondant aux détails et contours, produisant ainsi une image moins bruitée mais floue.

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

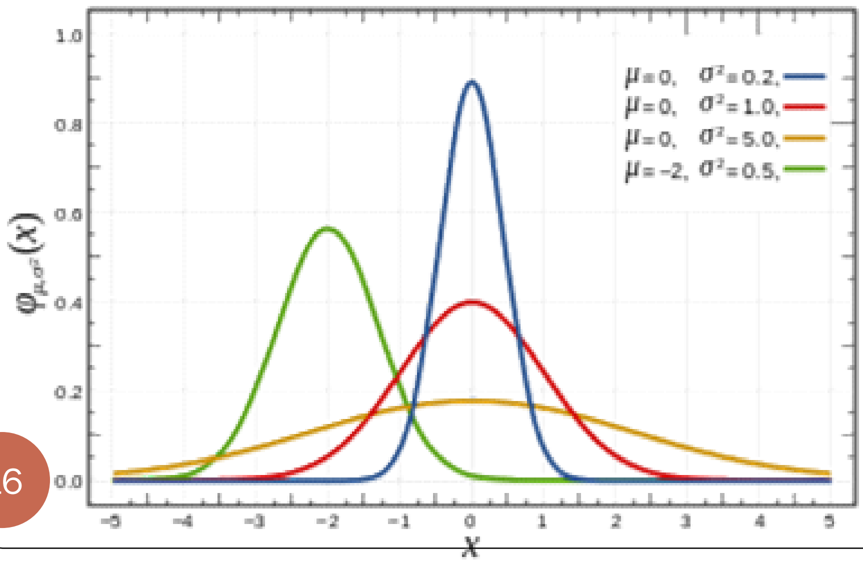
Filtre Gaussien

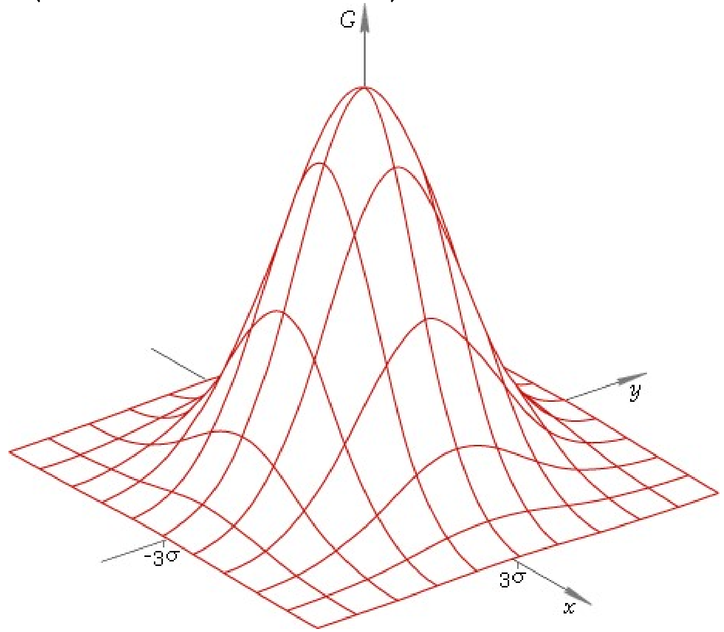
- Une gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 s'écrit :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Une gaussienne 2D, s'écrit :

$$G_{\sigma_x\sigma_y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \times e^{-\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right)}$$





Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Gaussien

- **Un filtre (ou un masque) gaussien 2D de taille $[n \times n]$, est construit pour $\mu_x = \mu_y = 0$ (car centré), et $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (car symétrique)**

$$G_\sigma(x,y)\Big|_{n\times n} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \times e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

avec $-\frac{n-1}{2} \leq x,y < \frac{n-1}{2}$

$$G_2(x,y)\Big|_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0.1019 & 0.1154 & 0.1019 \\ 0.1154 & \mathbf{0.1308} & 0.1154 \\ 0.1019 & 0.1154 & 0.1019 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.1019}\begin{bmatrix} 1 & 1.1331 & 1 \\ 1.1331 & \mathbf{1.2840} & 1.1331 \\ 1 & 1.1331 & 1 \end{bmatrix}$$

-

$$G_2(x,y)\Big|_{7\times 7} = \frac{1}{0.0049}\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.8682 & 2.7183 & 3.0802 & 2.7183 & 1.8682 & 1.0000 \\ 1.8682 & 3.4903 & 5.0784 & 5.7546 & 5.0784 & 3.4903 & 1.8682 \\ 2.7183 & 5.0784 & 7.3891 & \mathbf{8.3729} & 7.3891 & 5.0784 & 2.7183 \\ 1.8682 & 3.4903 & 5.0784 & 5.7546 & 5.0784 & 3.4903 & 1.8682 \\ 1.0000 & 1.8682 & 2.7183 & 3.0802 & 2.7183 & 1.8682 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Gaussien

- en fait, on construit un masque 2D le long de x, puis un masque 2D le long de y, puis on multiplie les deux.

$$G_\sigma(x,y) = G_\sigma(x) \times G_\sigma(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x^2)}{2\sigma^2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y^2)}{2\sigma^2}}\right)$$

$$G_2(x)|_{3\times1} = \begin{bmatrix} 0.3192 \\ 0.3617 \\ 0.3192 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_2(y)|_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0.3192 & 0.3617 & 0.3192 \end{bmatrix}$$

$$G_2(x)|_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0.3192 & 0.3192 & 0.3192 \\ 0.3617 & 0.3617 & 0.3617 \\ 0.3192 & 0.3192 & 0.3192 \end{bmatrix} \text{ et } G_2(y)|_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0.3192 & 0.3617 & 0.3192 \\ 0.3192 & 0.3617 & 0.3192 \\ 0.3192 & 0.3617 & 0.3192 \end{bmatrix}$$

$$G_2(x,y)\Big|_{3\times3} = \underbrace{G_2(x)\Big|_{3\times3} \times G_2(y)\Big|_{3\times3}}_{1/\sum \text{ des éléments}} = \begin{bmatrix} 0.1019 & 0.1154 & 0.1019 \\ 0.1154 & \mathbf{0.1308} & 0.1154 \\ 0.1019 & 0.1154 & 0.1019 \end{bmatrix}$$

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Gaussien

image originale

image bruitée par un bruit blanc ($\sigma = 16$)

image lissée par un noyau 3x3

image lissée par un noyau 5x5

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Gaussien

- Ce filtre lisse bien le bruit
- Il est moins efficace sur les zones homogènes que le filtre moyenneur
- Dégrade moins les détails et les contours que le filtre moyenneur.

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre conservatif (non linéaire)

Pour un pixel donné $I(i,j)$, sa valeur doit appartenir à l'intervalle des valeurs de son voisinage $V_n[I(i,j)]$ **(étant lui-même exclut)**

- $si \quad I(i,j) < min(V_n[I(i,j)]) \quad \rightarrow I(i,j) = min(V_n[I(i,j)])$
- $si \quad I(i,j) > max(V_n[I(i,j)]) \quad \rightarrow I(i,j) = max(V_n[I(i,j)])$
- $si \quad min(V_n[I(i,j)]) \leq I(i,j) \leq max(V_n[I(i,j)])$

  $\rightarrow I(i,j) \ ne \ change \ pas$

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre conservatif (non linéaire)

- Les filtres non-linéaires sont conçus principalement pour le bruit poivre et sel, en effet :
  - Un pixel noir ou blanc isolé correspond forcément à un bruit, et sera donc à l'extérieur de l'intervalle de ses voisins.

- Par ailleurs, il peut donner des résultats insatisfaisants pour des forts bruits poivre et sel,
  - du fait que le taux des points noir et blanc sera très important, il sera fort probable qu'il y'ait un (ou des) pixels bruités dans le voisinage d'un pixel bruité.

- Ce filtre est peu compétitif pour le bruit Gaussian

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre conservatif (non linéaire)

image originale

Image bruitée par un bruit blanc ($\sigma = 16$) puis lissée par un filtre conservatif

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre conservatif (non linéaire)

Image bruitée par un bruit poivre et sel (10%)

puis lissée par un filtre conservatif

Image bruitée par un bruit poivre et sel (2%)

puis lissée par un filtre conservatif

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre median (non linéaire)

- Pour un pixel donné $I(i,j)$, sa valeur est remplacée par la valeur médiane de tout le voisinage $V_n[I(i,j)]$ **(étant lui-même inclut)**

$$I(i,j) = median(V_n[I(i,j)])$$

- C'est une amélioration du filtre conservatif. Dans une image trop bruitée en poivre et sel, même si plusieurs pixels bruités existent dans le voisinage, on pourra corriger le pixel en cous.
- Par ailleurs, tous les pixels seront modifiés, même les valeurs correctes.
- Comme le filtre conservatif, il est insatisfaisant pour le bruit Gaussian.
- Il lisse parfaitement bien les zones homogènes (comme le conservatif), mais altère les contours, en effet, les valeurs élevées **et** basses au niveau des contours seront remplacées par une valeur médiane : le contour paraîtra flou.

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Median (non linéaire)

image originale

Image bruitée par un bruit blanc ($\sigma = 16$)

puis lissée par un filtre médian 3x3

Traitements de **filtrage** du bruit sur l'image

Filtre Median (non linéaire)

Image bruitée par un bruit poivre et sel (10%)

puis lissée par un filtre médian 3x3

puis lissée 2 fois par un filtre médian 3x3

Lissage en fréquentiel : TF D2

De la TF-D1 à la TF-D2

- La transformée de Fourier d'un signal continu $x(t)$ monodimensionnel :

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

- La transformée de Fourier d'un signal discret $x(i)|_{i\in[0,N]}$ monodimensionnel :

$$X_d(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\,.\, e^{-j2\pi\frac{ki}{N}}$$

- La transformée de Fourier d'un signal discret bidimensionnel $x(i,j)|_{\substack{i\in[0,N-1]\\ j\in[0,M-1]}}$ (cas de l'image $I(i,j)$) :

$$TF\{I(i,j)\} = TF_{en\ ligne}\{I(i,j)\} \quad puis \quad TF_{en\ colonne}\{I(i,j)\}$$

Lissage en fréquentiel : TF D2

De la TF-D1 à la TF-D2

$$X_d(k,l) = TF\{I(i,j)\} = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{M-1} x(i,j)\,.\,e^{-j2\pi\frac{ki}{M}}}_{TF\ sur\ ligne}\right).\,e^{-j2\pi\frac{lj}{N}}}_{TF\ en\ colonne} = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{M-1} x(i,j)\,.\,e^{-j2\pi\frac{ki}{M}}.\,e^{-j2\pi\frac{lj}{N}}$$

$$X_d(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(i,j)\,.\,e^{-j2\pi\frac{(ki)}{M}+\frac{(lj)}{N}}$$

- i,j : coordonnées spatiales $\begin{cases} i \in [0, M-1] \\ j \in [0, N-1] \end{cases}$ et k,l : coordonnées fréquentielles

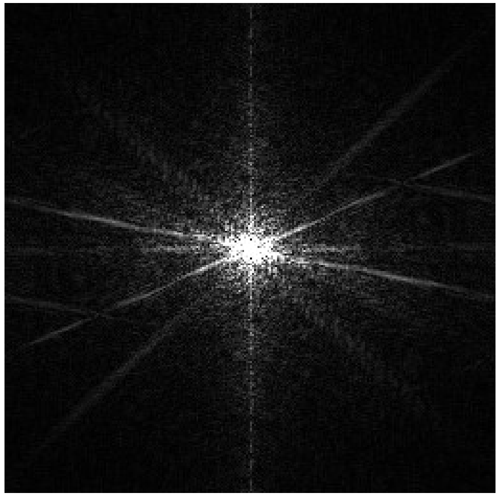
  $\begin{cases} k \in [0, M-1] \\ l \in [0, N-1] \end{cases}$

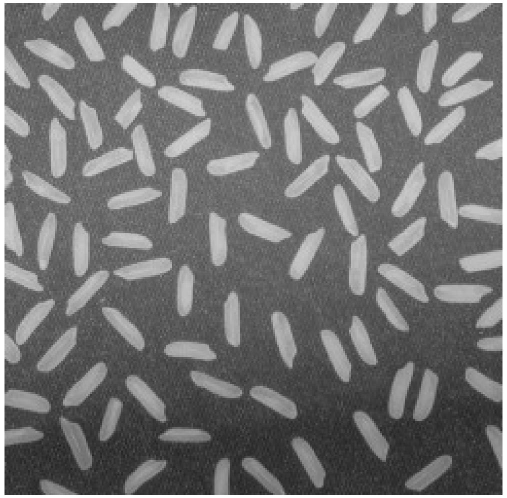
- La transformée de Fourier inverse d'un signal discret bidimensionnel

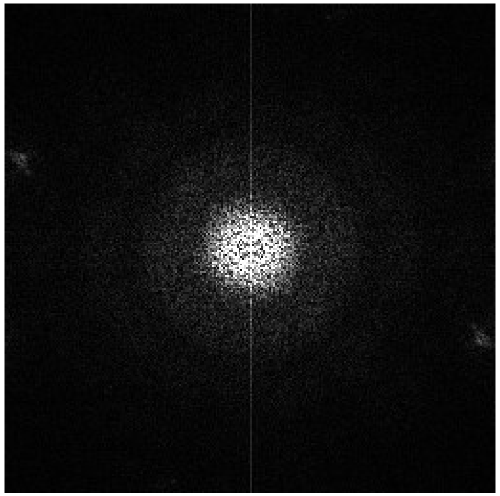
$$x(i,j) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} X_d(k,l).\,e^{+j2\pi\frac{(ki+lj)}{N.M}}$$

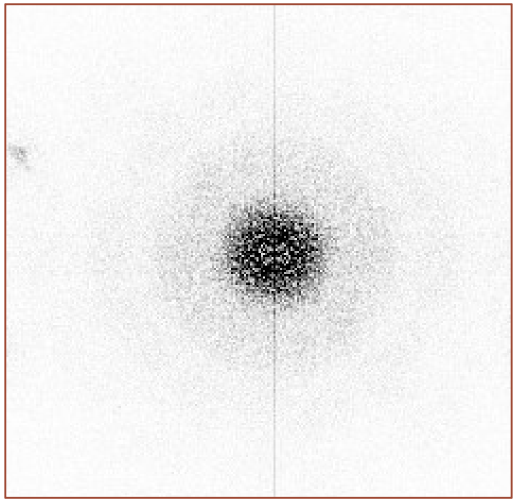
Lissage en fréquentiel

Exemple : FFT d'une image





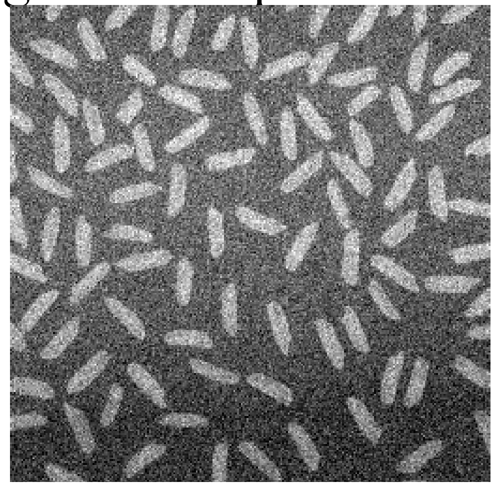
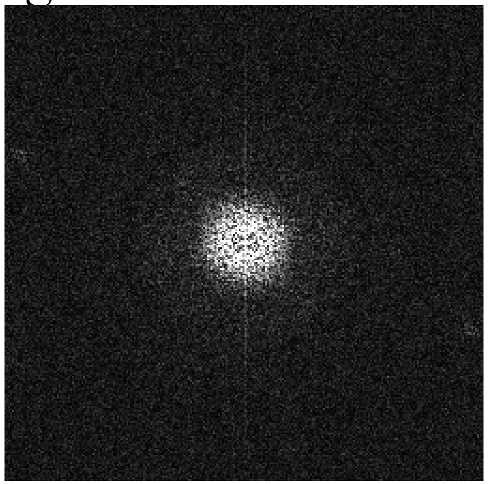
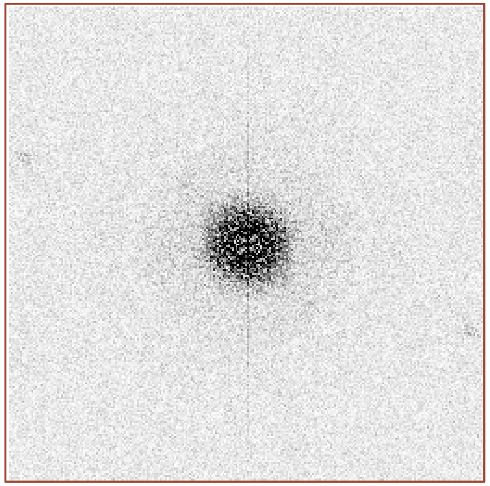




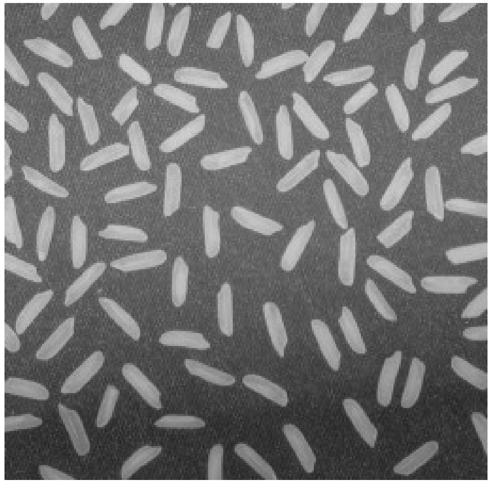
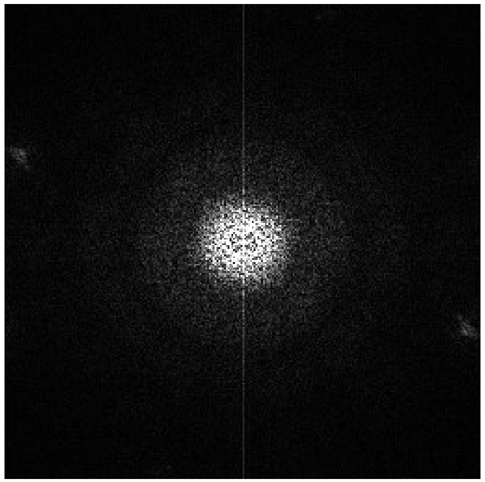
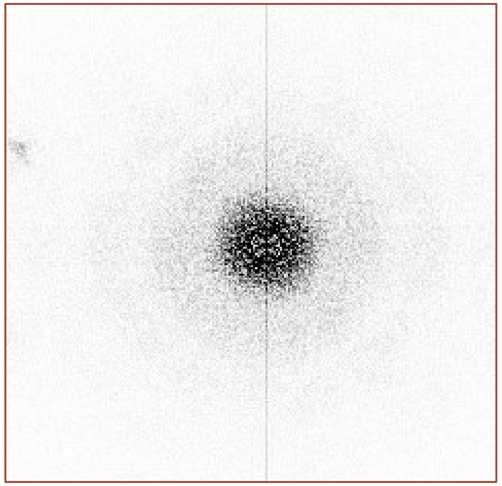
Lissage en fréquentiel

Exemple : FFT d'une image

- Image bruitée par un bruit gaussien de variance $\sigma^2 = 4$

- Image non bruitée

Lissage en fréquentiel : TF D2, **Procédure 1**

Comme le **bruit ≅ composantes fréquentielles à faible magnitude (faible énergie, ne portent pas de l'information)**

→Lisser un signal ou une image revient à éliminer les composantes fréquentielles dont les valeurs sont faibles

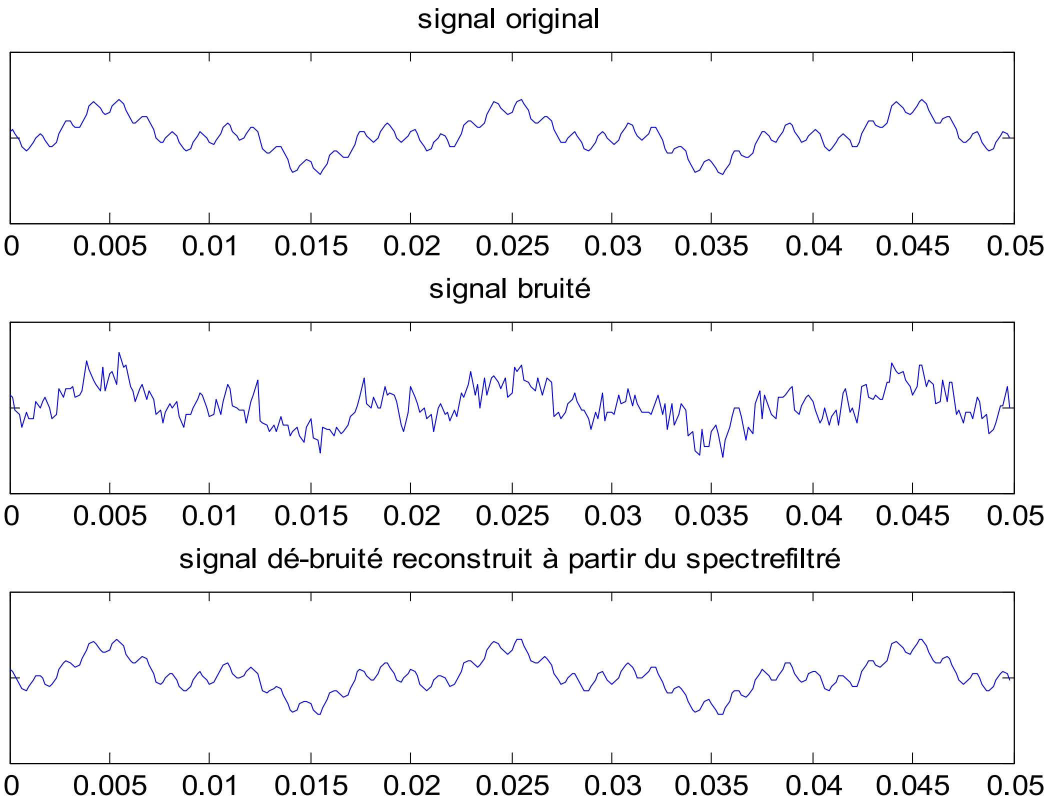
1. Après calcul de la TF-D2, $\boldsymbol{X_d}$**,** ses éléments seront analysés
2. Les éléments $X_d(k, l)$ inférieurs à une certaine valeur seront éliminés (cette valeur devrait correspondre à l'amplitude moyenne ou minimale du bruit, elle est notée : $\boldsymbol{seuil}$)

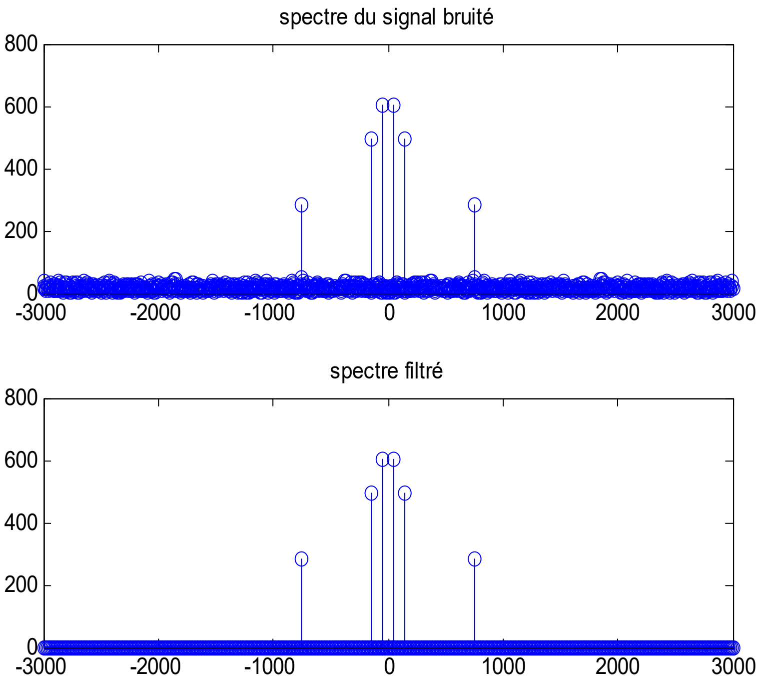
   - *Pour tout* $\begin{cases} k \in [0, M-1] \\ l \in [0, N-1] \end{cases}$ $\boldsymbol{si \quad X_d(k, l) \leq seuil \quad \rightarrow \quad X_d(k, l) = 0}$

3. Puis on restitue l'image par calcul inverse de la TF-D2

Lissage en fréquentiel

Exemple : Cas d’un signal monodimensionnel





Lissage en fréquentiel : TF D2
Procédure 2

Comme le **bruit ≅ hautes fréquences**

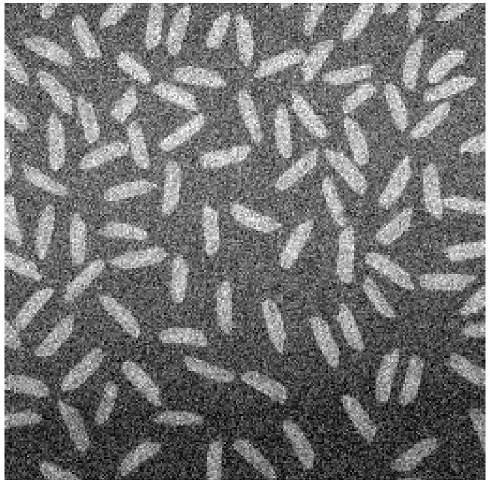
→Lisser un signal ou une image revient à éliminer les hautes fréquences

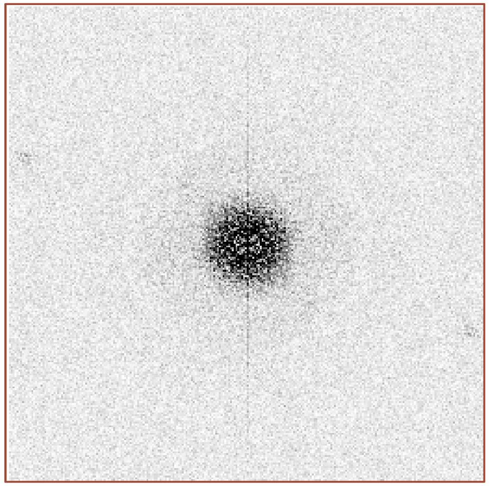
1. Après calcul de la TF-D2, $\boldsymbol{X_d}$, ses éléments seront analysés
2. Les éléments $X_d(k, l)$ dont les fréquences discrètes (k, l) sont supérieurs à une certaine limite (k_{max}, l_{max}) seront éliminés
   - *Pour tout* $\begin{cases} k \in [0, M-1] \\ l \in [0, N-1] \end{cases}$ $\boldsymbol{si}$ $\begin{cases} k \geq k_{max} \\ l \geq l_{max} \end{cases}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{X_d(k, l) = 0}$
3. Puis on restitue l'image par calcul inverse de la TF-D2

Lissage en fréquentiel

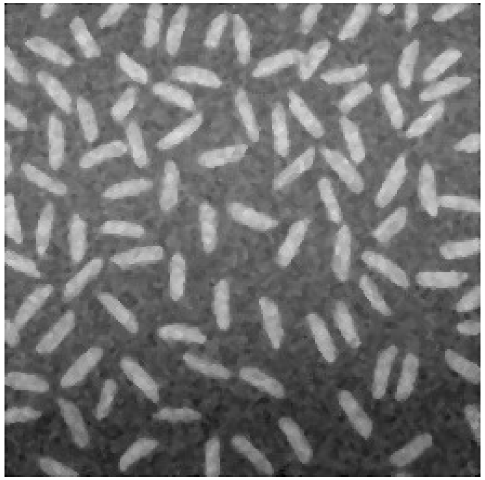
Exemple : procédure 2

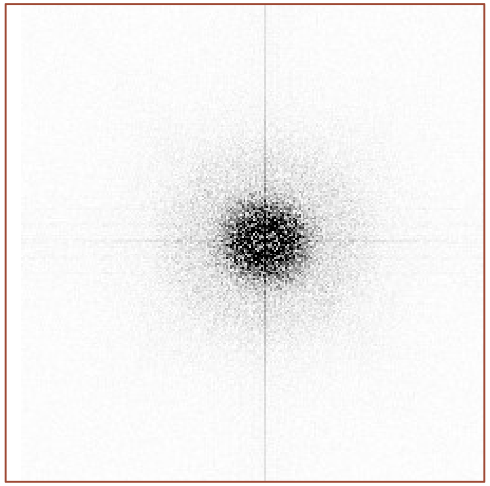
- Image bruitée par un bruit gaussien de variance $\sigma^2 = 4$





- Image lissée





- Image originale