Chapitre 2

Adaptation d'impédance dans les lignes de transmission

1. Introduction

Le but de l'adaptation est la transmission par l'intermédiaire d'une ligne de transmission (d'impédance caractéristique Z_0), le maximum de puissance du générateur (de f.e.m. :V_g, et d'impédance interne Z_g) vers le récepteur (ou la charge d'impédance Z_L) comme il est schématisé sur la figure 2.1.

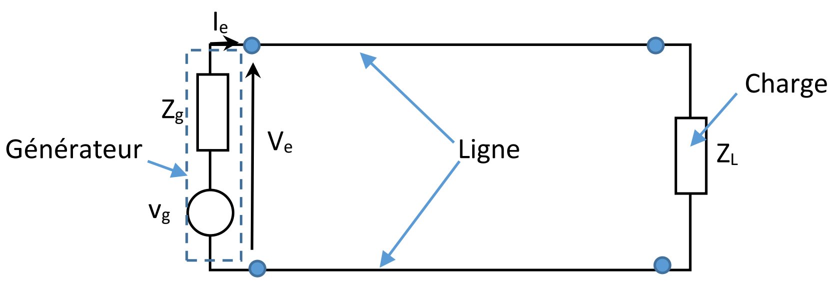

Figure 2.1 : Schéma d'un générateur alimentant une charge à travers une ligne de transmission.

Le problème se pose et se résout à deux niveaux : au niveau du générateur et au niveau du récepteur. Il faut que :

- d'une part, le générateur puisse transmettre à la ligne le maximum de puissance (puissance disponible) ;
- d'autre part, le récepteur reçoive de la ligne le plus possible de cette puissance.

2. Conditions d'adaptation

2.1. Condition d'adaptation du générateur

Soit $Z_e=R_e+jX_e$, l'impédance d'entrée de la ligne. Tout se passe comme si le générateur était fermé sur Z_e. On doit calculer la puissance fournie par ce générateur et chercher la condition pour laquelle cette puissance est maximale :

$$P = \frac{1}{2}\, Re\left[\underline{V_e}.\underline{I_e}^*\right] = \frac{1}{2}\, Re\left[\underline{Z_e}.\underline{I_e}\,.\underline{I_e}^*\right] = \frac{1}{2}\, R_e\, I_e^{\,2} \qquad (2.1)$$

Or :
$$I_e = \frac{\underline{V_g}}{Z_g + Z_e} = \frac{\underline{V_g}}{(R_g + R_e) + j(X_g + X_e)} \qquad (2.2)$$

D'où :
$$P = \frac{1}{2}\, Re\, \frac{R_e\, V_g^{\,2}}{(R_g + R_e)^2 + (X_g + X_e)^2} \qquad (2.3)$$

Pour que la puissance délivrée soit maximale, on démontre qu'il faut d'abord que :

$$X_g + X_e = 0, soit\ \boldsymbol{X_e} = -\boldsymbol{X_g} \qquad (2.4)$$

Nous aurons alors :
$$P = \frac{1}{2}\, Re\, \frac{R_e\, V_g^{\,2}}{(R_g + R_e)^2}$$

On démontre que cette puissance est maximale lorsque :

$$\boldsymbol{R_g} = \boldsymbol{R_e} \qquad (2.5)$$

D'après (2.4) et (2.5), on aura finalement comme condition d'adaptation du générateur :

$$\boldsymbol{Z_e} = \boldsymbol{Z_g}^* \qquad (2.6)$$

2.2. Condition d'adaptation du récepteur

Pour que le récepteur soit adapté à la ligne, il ne faut pas qu'il y ait d'onde réfléchie, autrement dit, le coefficient de réflexion au niveau de la charge Γ_L est nul. Nous sommes en présence d'ondes progressives et la puissance transmise par la ligne est uniquement une puissance active. La condition : $\Gamma_L=0$ est réalisée lorsque :

$$\boldsymbol{Z_L} = \boldsymbol{Z_0} \qquad (2.7)$$

2.3. Synthèse des conditions d'adaptation

Deux dispositifs sont nécessaires à l'adaptation comme schématisé sur la figure 2.2 :

- L'un D_1, à l'interface ligne-récepteur qui doit transformer l'impédance Z_L de la charge en une impédance Z_0. Notons que l'impédance d'entrée de la ligne est $\boldsymbol{Z_e = Z_0}$;

- L'autre D_2, à l'interface ligne-générateur, qui doit transformer l'impédance $\boldsymbol{Z_e = Z_0}$ ***en*** $\boldsymbol{Z_g^*}$;

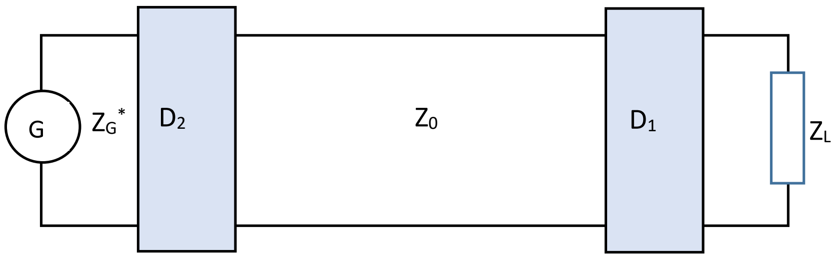

Figure 2.2 : Dispositifs d'adaptation du récepteur à la ligne(D_1) et de la ligne au générateur (D_2)

Dans ce qui suit, nous allons étudier les différents types de dispositifs d'adaptation à savoir :

- Adaptateurs par ligne quart d'onde ;
- Adaptateur à l'aide d'un ou deux stubs (qui sont des tronçons de lignes court-circuitées) ;
- Adaptateurs par réseau d'impédances et de tronçons de lignes.

3. Adaptation par ligne quart d'onde

Soit un élément de ligne $\lambda/4$, d'impédance caractéristique Z_0' fermé sur une impédance Z_s comme illustré sur la figure (2.3).

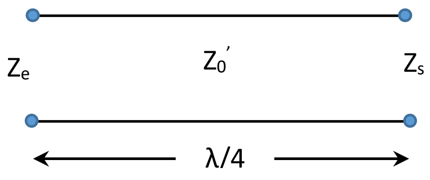

Figure 2.3 : Ligne quart d'onde

Nous avons déjà vu qu'il ramène son entrée à :

$$Z_e = \frac{Z_0'^2}{Z_s} \qquad (2.8)$$

Une telle ligne peut servir d'adaptateur puisqu'elle permet d'effectuer une transformation d'impédances. En particulier, dans le cas qui nous intéresse, nous avons : Z_e=Z_0 et Z_s= Z_L.

D'où : $$\boldsymbol{Z'_0} = \sqrt{\boldsymbol{Z_0.Z_L}} \qquad (2.9)$$

3.1. Cas d'impédance de charge réelle

Dans ce cas, l'adaptation sera réalisée en utilisant une ligne $\lambda/4$ d'impédance caractéristique réelle : $\boldsymbol{Z'_0} = \sqrt{\boldsymbol{Z_0.Z_L}}$. Seul le tronçon $\lambda/4$ travaille en régime d'ondes semi-stationnaires : le reste de la ligne est parcouru par des ondes progressives.

3.2. Cas d'impédance de charge complexe

Dans ce cas, si la ligne est fermée sur Z_L, son impédance caractéristique devra être complexe. Pour avoir Z_0' réelle, il faudrait que la sortie de la ligne $\lambda/4$ se trouve en un endroit de la ligne où l'impédance est réelle, c'est-à-dire :

- Soit en un maximum de tension, situé à une distance l_M de la charge, où l'impédance est maximale Z_M=ρZ_0.
  Dans ce cas : $$\boldsymbol{Z'_0} = \boldsymbol{Z_0}\sqrt{\boldsymbol{\rho}} \qquad (2.10)$$
- Soit en un minimum de tension, situé à une distance l_m de la charge, où l'impédance est minimale Z_m=Z_0/ρ.
  Dans ce cas : $$\boldsymbol{Z'_0} = \boldsymbol{Z_0}/\sqrt{\boldsymbol{\rho}} \qquad (2.11)$$

Afin d'avoir Z_0' réelle, une autre possibilité est de placer la sortie de la ligne $\lambda/4$ directement sur la charge, et de compenser la partie imaginaire de l'impédance de charge en mettant en parallèle avec celle-ci un tronçon de ligne court-circuité dont l'impédance est imaginaire pure.

3.3. Adaptation à large bande passante

Les dispositifs d'adaptation que nous venons d'étudier ne sont valables qu'à la fréquence pour laquelle la longueur de la ligne est égale à $\lambda/4$: ce sont donc des dispositifs d'adaptation à bande étroite. Pour obtenir une adaptation à large bande, on peut fractionner l'adaptation en un certain nombre de tronçons $\lambda/4$ (Figure 2. 4) tels que les impédances d'entrées successives de ces différents tronçons soient : $Z_0 > Z_2 > Z_1 > Z_L$ et pour n tronçons : $Z_0 > Z_n > Z_{n-1} > \ldots > Z_1 > Z_L$.

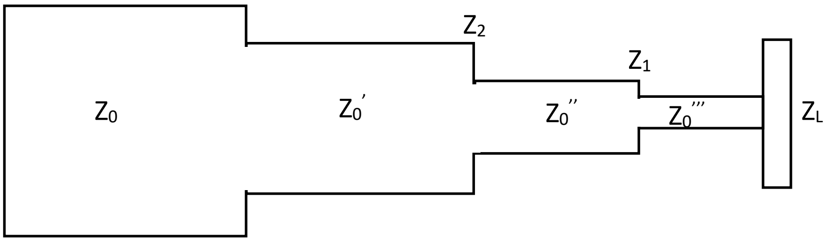

Figure 2.4 : Adaptation à large bande.

A la limite, on pourrait montrer qu'il existe une possibilité d'adaptation en utilisant des tronçons de ligne dont l'impédance caractéristique varierait de façon continue : le profil idéal serait exponentiel et la largeur de bande importante. C'est les cas des lignes non-uniformes.

4. Adaptation à l'aide d'un stub

Un stub est un tronçon de ligne court-circuité de longueur d que l'on branche en dérivation sur une ligne principale à une distance s de la charge (Figure 2.5). Son impédance d'entrée étant :

$$Z_{stub} = Z(d) = jZ_0 tg \frac{2\pi}{\lambda} d \tag{2.12}$$

Il s'agit d'une réactance dont on peut faire varier le signe et la grandeur en faisant varier sa longueur. On pourrait également utiliser un élément localisé, capacitif ou inductif, placé en dérivation sur la ligne.

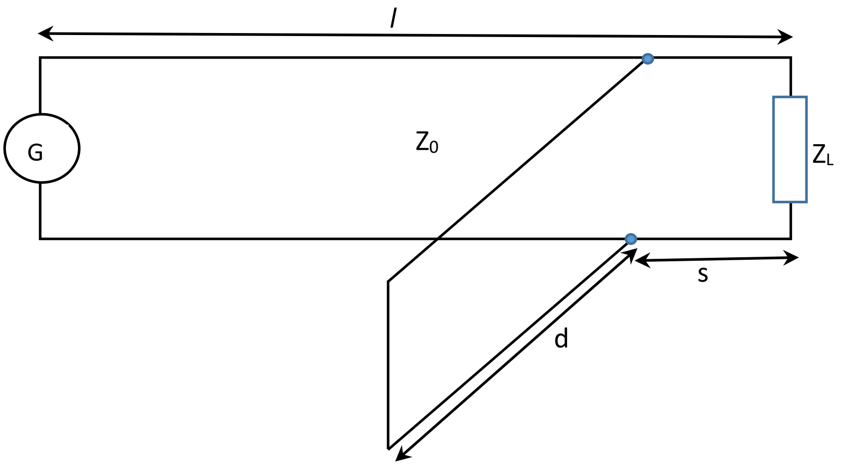

Figure 2.5 : Adaptation à un stub.

Les quantités connues sont Z_L, Z_0 et λ, les inconnues sont d et s. Nous allons raisonner :

- En admittances car nous avons des éléments disposés en parallèle,
- En valeurs réduites pour pouvoir les placer sur l'abaque de Smith.

Pour la charge, on aura :

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} \; et \; y_L = \frac{Z_0}{Z_L} = g_L + jb_L \qquad (2.13)$$

Pour le stub, on aura :

$$z_{stub} = \frac{Z(d)}{Z_0} = jtg\frac{2\pi}{\lambda}\; d = jtg\beta d \qquad (2.14)$$

Calculons les admittances aux différents endroits de la ligne :

- Dans le plan de la charge : $y_L = g_L + jb_L$
- Dans un plan situé à la distance *s-ε*, c'est-à-dire juste avant le stub :

$$y(s-\varepsilon) = \frac{y_L + jtg\beta(s-\varepsilon)}{1 + jy_L jtg\beta(s-\varepsilon)} \qquad (2.15)$$

La valeur de ε étant prise toute petite, on peut écrire :

$$y(s-\varepsilon) = \frac{y_L + jtg\beta s}{1 + jy_L tg\beta s} = \frac{g_L + jb_L + jtg\beta s}{1 - b_L tg\beta s + jg_L tg\beta s} \qquad (2.16)$$

$$y(s-\varepsilon) = \frac{[g_L + jb_L + jtg\beta s].[1 - b_L tg\beta s - jg_L tg\beta s]}{(1 - b_L tg\beta s)^2 + {g_L}^2 tg^2(\beta s)} \qquad (2.17)$$

L'expression (2.17) peut s'écrire sous la forme :

$$y(s-\varepsilon) = g(s-\varepsilon) + jb(s-\varepsilon) \qquad (2.18)$$

Dans un plan situé à la distance $s+\varepsilon$, c.à.d. juste après le stub :

$$y(s+\varepsilon) = y(s-\varepsilon) + y(d) \qquad (2.19)$$

En utilisant les expressions (2.14) et (2.19), on obtient :

$$y(s+\varepsilon) = g(s-\varepsilon) + j[b(s-\varepsilon) - cotg\; \beta d] \qquad (2.20)$$

Pour que l'adaptation soit réalisée à partir de la distance (s+ε), il faut que :

$$y(s+\varepsilon) = 1 + j0 \qquad (2.21)$$

On déduit de cette équation les deux équations qui vont fournir les deux inconnues s et d :

De (2.20) et (2.21) $\quad g(s-\varepsilon) = 1$

Dans (2.17) :

$$\frac{g_L(1 + jtg^2\beta s}{(1 - b_L tg\beta s)^2 + {g_L}^2 tg^2(\beta s)} = 1 \qquad (2.22)$$

C'est une équation de second ordre en *tg (βs)* qui fournit deux solutions (*s* et *s'*) à λ/2 près.

De (2.20) et (2.21) $\quad [b(s-\varepsilon) - cotg\ \beta d] = 0 \quad$ (2.23)

Dans (2.17) $\quad \frac{b_L + (1-g_L^2 - b_L^2)tg\beta s - b_L tg^2(\beta s).}{(1-b_L tg\beta s)^2 + g_L{}^2 tg^2(\beta s)} = cotg\ \beta d \quad$ (2.24)

D'après cette relation, nous voyons qu'aux deux valeurs (*s* et *s'*) correspondent deux valeurs (*d* et *d'*).

Deux couples de solutions existent (*s*, *d*) et (*s'*, *d'*). **On choisit celui qui correspond à la plus faible valeur de *s*** afin que le tronçon de ligne qui ne fonctionne pas en ondes progressives soit le plus réduit possible.

5. Adaptation à l'aide de deux stubs

Comme précédemment, nous raisonnerons en admittances et en valeurs réduites.

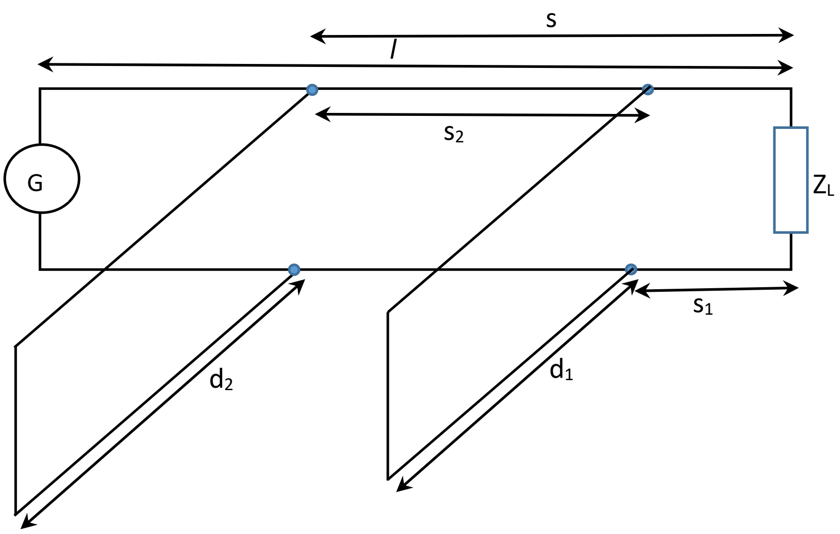

Figure 2.6 : Adaptation à l'aide de deux stubs.

Données : Z_L, Z_0, β, s_1 et s_2.

Inconnues : d_1 et d_2.

Calculons successivement les diverses admittances de la ligne (Figure 2.6) aux distances : 0, (s_1-ε), (s_1+ε), (s-ε) et (s-ε).

Si un stub n'est pas suffisant à obtenir l'adaptation, on rajoute un deuxième. A partir de là, nous devons retenir que l'adaptation n'est obtenue qu'après (à gauche) du stub 2, d'où : $y(s+\varepsilon)=1$.

- A la distance 0 (dans le plan de la charge) : $y_L = g_L + jb_L$ (2.25)
- A la distance (s_1-ε) : $y(s_1 - \varepsilon) = \frac{y_L + jtg\beta(s_1-\varepsilon)}{1 + jy_L jtg\beta(s_1-\varepsilon)}$ (2.26)

La valeur de ε étant prise toute petite, on peut écrire :

$$y(s_1-\varepsilon)=\frac{y_L+jtg\beta s_1}{1+jy_L tg\beta s_1} \quad (2.27)$$

Nous poserons par la suite :

$$y(s_1-\varepsilon)=g(s_1-\varepsilon)+jb(s_1-\varepsilon) \quad (2.28)$$

- A la distance (s_1+ε) : $y(s_1+\varepsilon)=y(s_1-\varepsilon)+y(d_1)$ (2.29)

En remplaçant $y(d_1)$ par sa valeur, on obtient :

$$y(s_1+\varepsilon)=g(s_1-\varepsilon)+j[b(s_1-\varepsilon)-cotg\ \beta d_1] \quad (2.30)$$

- A la distance (s-ε) : $y(s-\varepsilon)=\frac{y(s_1+\varepsilon)+jtg\beta s_2}{1+jy(s_1+\varepsilon)\ tg\beta s_2}$ (2.31)

Dans cette expression l'inconnue est d_1 ; nous écrirons :

$$y(s-\varepsilon)=g(s-\varepsilon)+jb(s-\varepsilon) \quad (2.32)$$

- A la distance (s+ε) : $y(s+\varepsilon)=y(s-\varepsilon)+y(d_2)$ (2.33)

$$y(s+\varepsilon)=g(s-\varepsilon)+j[b(s-\varepsilon)-cotg\ \beta d_2] \quad (2.34)$$

Dans cette expression les inconnues sont : d_1 et d_2.

Pour que l'adaptation soit réalisée à partir de la distance (s+ε), il faut que :

$$y(s+\varepsilon)=1+j0 \quad (2.35)$$

D'où les conditions :

$$\begin{cases} g(s-\varepsilon)=1 \\ b(s-\varepsilon)=cotg\ \beta d_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

- La première condition de (2.36), fournit une équation du second degré en $cotg(\beta d_1)$, à partir de laquelle on calcule, si son déterminant est positif, deux solutions : d_1' *et* d_1''.
- La deuxième condition est une équation du premier degré en $cotg\ (\beta d_2)$, donc aux deux valeurs d_1' *et* d_1'' de d_1, correspondent les deux valeurs d_2' *et* d_2'' de d_2.

Il y a donc, dans ce cas également, deux couples de solutions : (d_1', d_2') et (d_1'', d_2'').

6. Utilisation du diagramme de Smith

6.1. Adaptation à un stub

L'abaque de Smith est un outil très efficace qui simplifie la recherche des inconnues dans les adaptations à un stub et à deux stubs.

Comme les stubs utilisés sont en parallèle, il est plus commode de travailler avec les admittances au lieu des impédances. On commence par placer l'impédance réduite de la charge sur l'abaque (point 1) et de déduire son admittance (point 2) comme illustré sur la figure 2.7 :

Le cercle à R.O.S. =cte passant par ces points est le lieu des points représentatifs de toutes les impédances et admittances aux divers points de la ligne compris entre la charge et le stub **exclu**. C'est en particulier, un lieu de y(*s-ε)*.

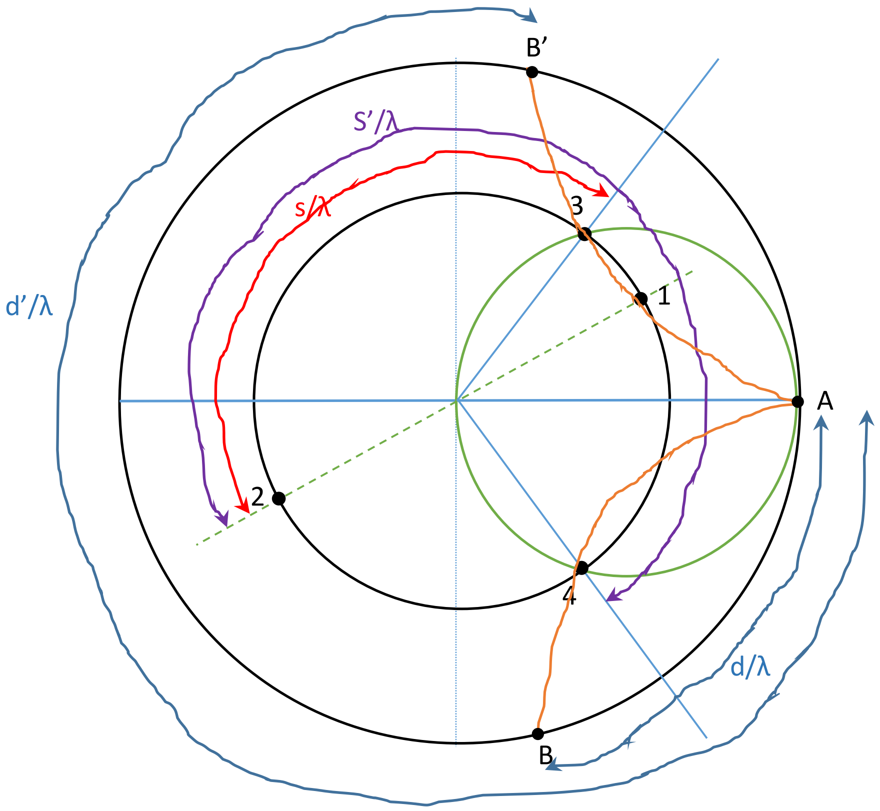

Figure 2.7 : Adaptation à un stub.

Comme d'autre part : $y(s-\varepsilon) = y(s+\varepsilon) - y(d)$ est de la forme 1-jb (d'après les équations (2.19) et (2.21)), le cercle *g=1* (tracé en vert) est un deuxième lieu de y(*s-ε)*.

Les solutions du problème sont donc données par les deux points d'intersection 3 et 4 de ces deux cercles.

- **Point 3**

Le stub doit être placé à une distance s/λ de la charge qui est sur le bord du diagramme de Smith. Soit $1+jb_3$ l'admittance à y(*s-ε)*, le stub doit avoir une longueur d telle que $y(d)=-jb_3$. Comme le stub est un tronçon de ligne court-circuité, d doit être déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passer du point A (court-circuit : $y=\infty$) au point B $y=-jb_3$

- **Point 4**

Le stub doit être placé à une distance s'/λ de la charge qui est sur le bord du diagramme de Smith. Soit $1\text{-}jb_3$ l'admittance à y(s-ε), le stub doit avoir une longueur d' telle que $y(d')=+jb_3$. Comme le stub est un tronçon de ligne court-circuité, d' doit être déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passer du point A (court-circuit : $y=\infty$) au point B' $y=-jb_3$

Application numérique

Un ligne est terminée par une charge d'impédance réduite donnée par : :z_L=2+j 1.5 (point 1). En utilisant l'abaque de Smith, déduisez la valeur de l'admittance ensuite calculez les emplacements et les longueurs possibles du stub à mettre pour adapter cette ligne. Pami les deux solutions trouvées, choisir le couple *(s, d)* adéquat. Justifiez votre choix.

A partir de l'abaque, on déduit : y_L= 0.32-j 0.24 (point 2)

y_3= 1+j 1.3 (point 3) d'où : s/λ = (0.042+0.170) = 0.212

$y(d)$ = -j 1.3 (point B) d'où d/λ = (0.354-0.250) = 0.104

y_4= 1-j 1.3 (point 4) d'où : s'/λ = (0.042+0.033) = 0.372

$y(d')$ = -j 1.3 (point B') d'où d'/λ = (0.251+0.146) = 0.396

Comme $s < s'$, la solution choisie pour le stub est *(s,d)*, il suffit de connaitre la valeur de λ pour déduire les valeurs de ce couple.

6.2. Adaptation à deux stubs

Dans ce qui suit, il faut toujours mettre la figure 2.6 à côté de l'abaque de Smith pour bien comprendre l'aspect physique et le traduire techniquement sur l'abaque.

Le but est de déterminer les longueurs des deux stubs d_1 et d_2 à placer sur la ligne pour obtenir une adaptation, les distances s_1 et s_2 sont données. Nous allons expliquer la procédure à suivre en donnant un exemple concret.

Soit une ligne terminée par une charge d'impédance réduite : z_1 = 0.28 + j0.3 (**point 1**). On donne : s_1/λ = 0.122 (point 3) et s_2/λ = 0.180 (point A')

Commençons par déduire la valeur de l'admittance sur l'abaque : $y_2 = 1.65 - j1.9$ (**point 2)**. Par une rotation vers le générateur sur le cercle de R.O.S. =Cte d'une valeur de s_1/λ, on obtient le **point 3** qui représente $y(s_1-\varepsilon)$ (toujours revenir à la figure 2.6 pour comprendre et traduire l'aspect physique).

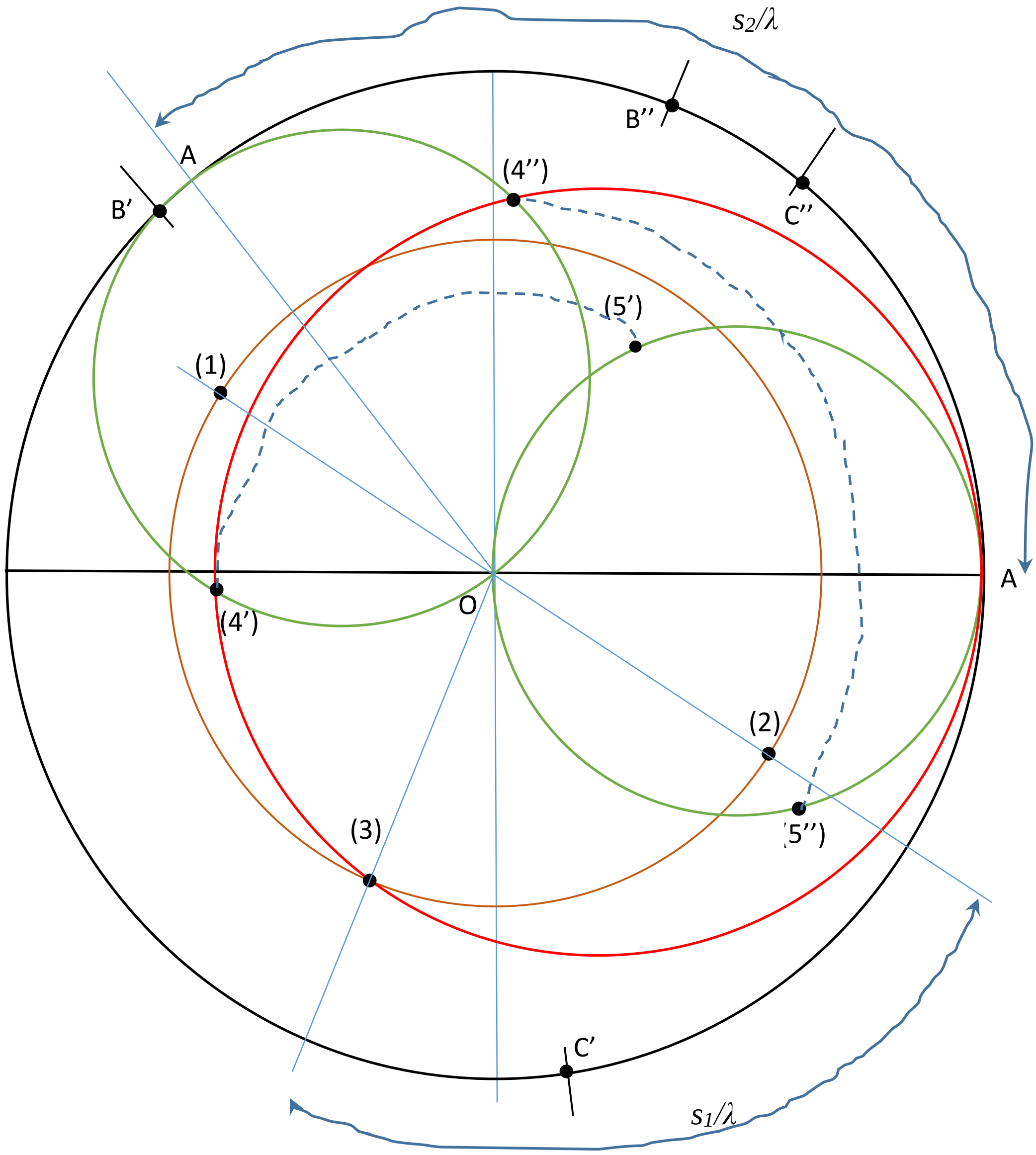

Figure 2.8 : Adaptation à un stub.

Nous avons vu que les parties réelles de $y(s_1+\varepsilon)$ et de $y(s_1-\varepsilon)$ étaient les mêmes (le stub est purement réactif). Un lieu de $y(s_1+\varepsilon)$ est donc le cercle à partie réelle constante (ici $g_1(s_1-\varepsilon) = 0.3$ tracé en vert) passant par le **point 3**.

De même, les parties réelles de y($s+\varepsilon$) et de y($s-\varepsilon$) étant identiques et égales à 1, le cercle à g = 1 est un lieu de $y(s-\varepsilon)$. Il est facile d'en déduire un lieu de $y(s_1+\varepsilon)$ car dans un déplacement le long de la ligne, le point 0 reste invariant ; il suffit donc de trouver le point A' qui se déduit de A par une rotation de s_2/λ vers la charge et l'on peut alors tracer le cercle de diamètre OA' qui est un deuxième lieu de $y(s_1+\varepsilon)$.

Les points 4' et 4'' qui se trouvent à l'intersection des deux lieux de $y(s_1+\varepsilon)$ vont nous permettre de calculer les longueurs s_1' et s_1'' du premier stub. Nous avons en effet, puisque :

$$y(s_1+\varepsilon) = y(s_1-\varepsilon) + y(d_1)$$

D'où : $$y(d_1') = y_{4\prime} - y_3 \; et \; y(d_1'') = y_{4\prime\prime} - y_3$$

Il suffit de lire sur le bord du diagramme, en tournant vers le générateur, quelles sont les distances d_1'/λ et d_1''/λ qu'il y a entre les point A et les point B' et B'' représentatifs de $y(d_1')$ et de $y(d_1'')$.

Dans cet exemple : $y(d_1')$ = j 0.44, d'où : d_1'/λ = 0.250+0.066 = 0.316 et : $y(d_1'')$ = j 1.5, d'où : d_1'/λ = 0.250+0.156=0.406.

Les points 5' et 5'' qui de déduisent de 4' et 4'' par la rotation de s_2/λ vers le générateur représentent les deux valeurs possibles de $y(s-\varepsilon)$ et appartiennent au cercle g = 1.

$$y_{5\prime} = 1 + jb_{5\prime} \, et y_{5\prime\prime} = 1 + jb_{5\prime\prime}$$

Les longueurs du second stub qui peuvent conduire à l'adaptation finale sont donc d_2' et d_2'' telles que $y(d_2')$ = -j $b_{5'}$ et $y(d_2'')$ = -j $b_{5''}$ (ici $y(d_2')$ = -j 1.28 et $y(d_2'')$ = j 2.22.

A ces valeurs correspondent les points C et C' sur les bords du diagramme, on en déduit d_2' et d_2''.

Dans cet exemple $y(d_2')$ = -j1.28 d'où : d_2'/λ = 0.355-0.250 = 0.105 et $y(d_2'')$ = j2.2 d'où : d_2''/λ = 0.250+ 0.182 = 0.432.

7. Adaptation par réseau d'impédances et tronçons de ligne

Dans les cas traités précédemment, il s'agissait d'adapter une charge d'impédance Z_L complexe à un générateur d'impédance interne Z_g réelle et égale à l'impédance caractéristique de la ligne qui le relie à la charge.

Le cas le plus général est celui où l'on veut adapter une charge d'impédance Z_L complexe à un générateur d'impédance interne Z_g complexe (figure 2.9).

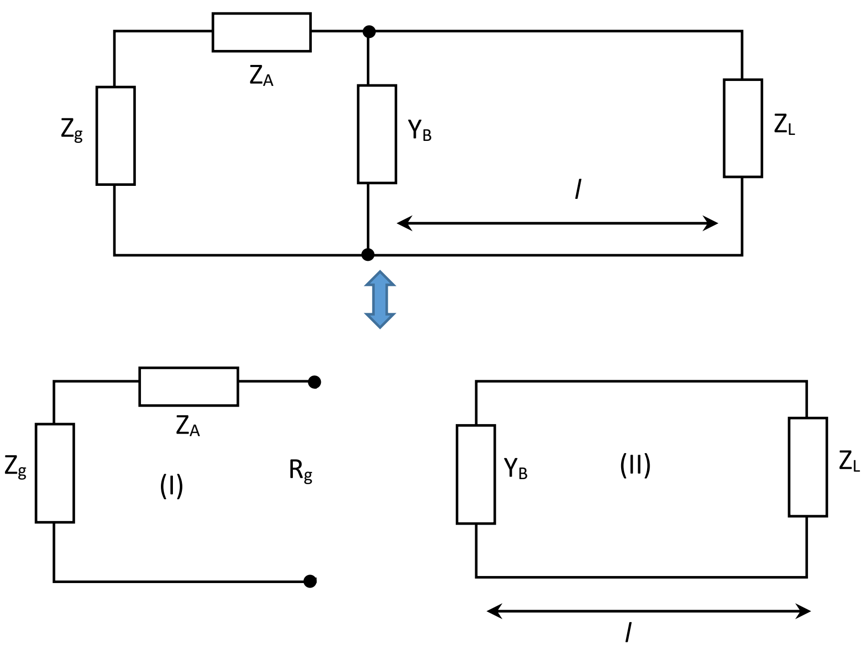

Figure 2.9 : Adaptation par réseau d'impédances et tronçons de ligne.

Pour effectuer cette adaptation, on peut placer en série avec le générateur une impédance imaginaire pure afin de compenser la partie imaginaire de l'impédance interne du générateur. Cette réactance peut être obtenue en plaçant en série avec le générateur soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Ainsi l'impédance ramenée au bord du réseau *I* est R_g.

D'autre part, on place en parallèle à une distance l de la charge une admittance imaginaire pure $y_b = jB$ qui peut être obtenue en mettant en parallèle sur la ligne soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Le réseau *II* constitue l'équivalent d'un dispositif d'adaptation à un stub qui doit ramener à ses bornes une impédance égale à R_g, ce qui réalise l'adaptation désirée.

Notons enfin que lorsque la distance l entre Z_g et Z_L est imposée, il est toujours possible d'utiliser, conformément au schéma de la figure 2.2, deux dispositifs d'adaptation, l'un placé entre la charge er la ligne, l'autre placé entre le générateur et la ligne.