

**Département Mesures Physiques**  
 TDs et Corrections de TD en Traitement du Signal

Roger REYNAUD

Sommaire

<b>TD1 - Signaux et séries de Fourier</b> .....	<b>3</b>
1 - Valeurs moyennes, valeurs efficaces, puissances .....	3
2 - Taux de distorsion de signaux périodiques.....	3
3 - Séries de Fourier.....	4
4 - Transformation et bilan d'énergie .....	4
<b>Correction du TD n°1</b> .....	<b>5</b>
1 - Valeurs moyennes, valeurs efficaces, puissances .....	5
2 - Taux de distorsion pour un signal sinusoïdal redressé double alternance.....	6
2 - Taux de distorsion pour un signal sinusoïdal redressé mono alternance .....	7
Corrigé de "Transformation et bilan d'énergie".....	7
<b>TD2 - Transformation de Fourier</b> .....	<b>9</b>
1 - Calcul du spectre d'un signal tronqué.....	9
2 - Tracé de spectre.....	9
3 - Transformées de Fourier.....	9
4 - Calcul par transformée de Fourier inverse.....	9
5 - Spectre de raies (à faire chez soi).....	9
<b>Correction du TD2 - Transformation de Fourier</b> .....	<b>10</b>
1 - Calcul du spectre d'un signal tronqué.....	10
2 - Tracé de spectre.....	11
3 - Transformées de Fourier.....	12
4 - Calcul par transformée de Fourier inverse.....	13
5 - Spectre de raies (à faire chez soi).....	13
<b>TD3 - Convolution</b> .....	<b>14</b>
1 - Combinaison de filtre en cascade.....	14
2 - Quelques réponses classiques à faire chez soi .....	14
<b>Correction du TD Convolution</b> .....	<b>15</b>
1 - Combinaison de filtre en cascade.....	15
Exo 2 - Quelques réponses classiques.....	17
<b>TD4 - Filtrage</b> .....	<b>19</b>
1 - Filtrage fréquentiel linéaire .....	19
2 - Filtrage temporel et fenêtrage.....	20
<b>Correction deTD4 - Filtrage</b> .....	<b>20</b>
1 - Filtrage fréquentiel linéaire .....	21
2 - Filtrage temporel et fenêtrage.....	23
<b>TD5 - Echantillonnage</b> .....	<b>23</b>
1 - Repliement du spectre .....	23
2 - Echantillonnage réel (Cours-TD) .....	23
3 - Échantillonnage.....	23
<b>Correction du TD n°5</b> .....	<b>23</b>
Repliement de spectre.....	23
Fréquences apparentes.....	23
Tracé de spectre.....	23
Echantillonneur moyennneur.....	23

---

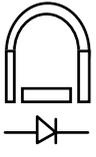
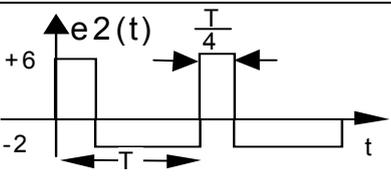
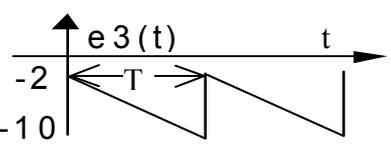
TD6 - Corrélation.....	23
1 - Fonctions d'autocorrélation .....	23
2 - Intercorrélations entre 2 signaux .....	23
TD 7 Modulation Détection .....	23
1 - Modulation d'amplitude .....	23
Correction du TD Modulation d'amplitude .....	23
Déterminer $e_{AM}(t)$ et tracer le spectre en fréquence .....	23
Déterminer $v(t)$ et tracer le spectre en fréquence .....	23
Comment choisir $v_L$ ? .....	23
Déterminer le signal $s(t)$ .....	23
Plage de réglage "longues ondes" $v^\circ \in [150\text{kHz}, 300\text{kHz}]$ .....	23
Sujet d'examen de février 2000 .....	9
Corrigé de l'examen .....	15

---

## TD1 - Signaux et séries de Fourier

### 1 - Valeurs moyennes, valeurs efficaces, puissances

Pour chacune des trois tensions ci-dessous, donner les valeurs indiquées par un voltmètre magnéto-électrique à cadre mobile d'une part en position DC et d'autre part en position AC. On rappelle la présence d'un condensateur en série, d'un pont redresseur et d'un facteur de forme  $K = \pi/(2\sqrt{2})$  dans le montage en position AC.

	 DC	 AC	Quelle est la puissance des 3 signaux ?	Quelle est la valeur efficace des 3 signaux ?
$e_1(t) = 5 + 2,5 \sin(2\pi vt + \phi)$				
				
				

### 2 - Taux de distorsion de signaux périodiques

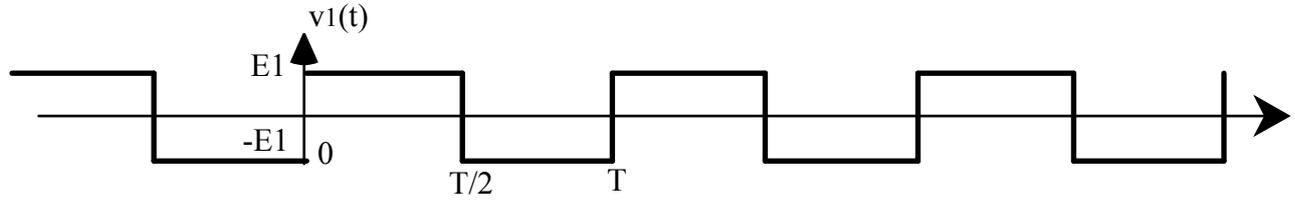
Calculer le taux d'harmoniques défini par  $Td = \sqrt{\frac{\text{Puissance des harmoniques}}{\text{puissance du fondamental}}}$  pour

- Un signal sinusoïdal redressé double alternance
- Un signal sinusoïdal redressé mono alternance (à faire chez soi).

Résultat :  $v(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{2E}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \times 7} \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$

### 3 - Séries de Fourier

#### Décomposition en série de Fourier d'un signal carré



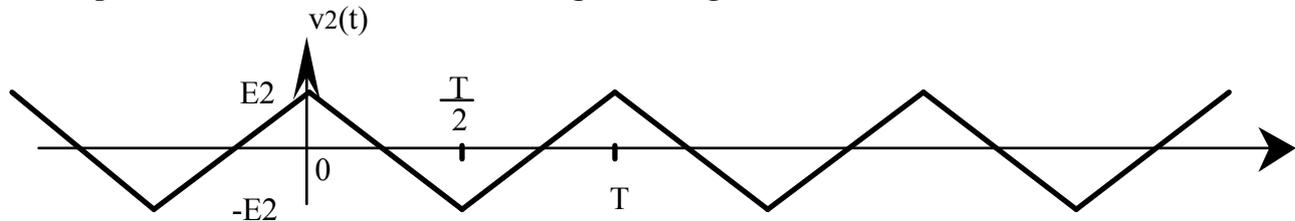
A Montrer que la décomposition n'admet que des termes en sinus.

B Cocher une case parmi 3.

- Cette décomposition n'a pas d'harmoniques pairs.
- Cette décomposition n'a pas d'harmoniques impairs.
- Je ne sais pas..

C Calculer la décomposition en série de Fourier du signal  $v_1(t)$ .

#### Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire



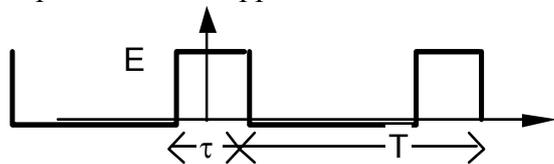
d Trouver une relation entre  $v_1(t)$  et  $\frac{dv_2}{dt}$ . Calculer alors la décomposition en série de Fourier de  $v_2(t)$ .

e Montrer que la valeur efficace du signal  $v_2(t)$  vaut  $v_{2\text{eff}} = \frac{E_2}{\sqrt{3}}$

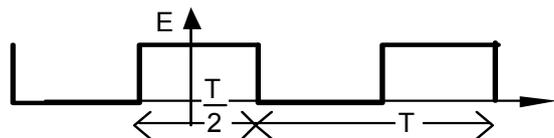
f On appelle taux de distorsion le rapport  $T_d = \sqrt{\frac{\text{Puissance des harmoniques}}{\text{puissance du fondamental}}}$   
Calculer le taux de distorsion du signal  $v_2(t)$ .

### 4 - Transformation et bilan d'énergie

A partir du développement en série de Fourier du premier signal, retrouver les autres décompositions.



$$v(t) = \frac{\tau E}{T} + \frac{2E}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi t}{T} \cos(\omega t) + \frac{\sin \frac{2\pi t}{T}}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\sin \frac{3\pi t}{T}}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]$$



$$v(t) = ?$$



$$v(t) = ?$$

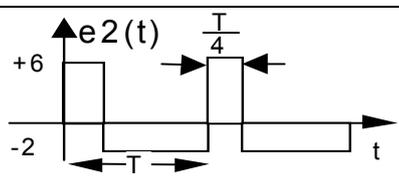
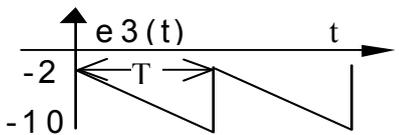


$$v(t) =$$

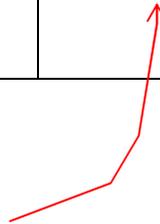
## Correction du TD n°1

### 1 - Valeurs moyennes, valeurs efficaces, puissances

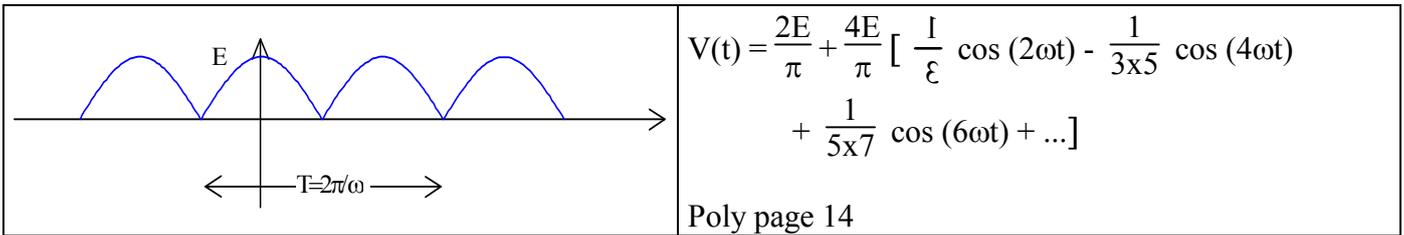
Pour chacune des trois tensions ci-dessous, donner les valeurs indiquées par un voltmètre magnéto-électrique à cadre mobile d'une part en position DC et d'autre part en position AC. On rappelle la présence d'un condensateur en série, d'un pont redresseur et d'un facteur de forme  $K = \pi/(2\sqrt{2})$  dans le montage en position AC.

	 DC	 AC	P	$\sqrt{P}$
$e_1(t)=5+2,5 \sin(2\pi vt+\phi)$	5	$\frac{2,5}{\sqrt{2}}=1,77$	$5^2+1,77^2=28,125$	5,30
	0	$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}=3,33$	12	3,46
	-6	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}=2,22$	41,3	6,43

$$\frac{1}{T} \int_0^T (2 + \frac{8t}{T})^2 dt = \frac{1}{T} \left( \frac{T}{3 \times 8} (2 + \frac{8t}{T})^3 \right)_0^T = \frac{1}{24} (10^3 - 2^3) = 41,3$$



## 2 - Taux de distorsion pour un signal sinusoïdal redressé double alternance



Retrouvons les premiers termes

- Valeur moyenne  $a_0 = \frac{2E}{\pi}$
- En supposant le signal  $v(t)$  périodique de période  $T$ , alors on calcule  $a_1$ .

$$a_1 = \frac{1}{T} \left( \int_{-T/4}^{T/4} v(t) \cos(\omega t) dt \right) + \frac{1}{T} \left( \int_{T/4}^{3T/4} v(t) \cos(\omega t) dt \right) = 0 \text{ pour raison de symétrie.}$$

En fait,  $v(t)$  est périodique de période  $T/2$ . La fréquence du fondamental est donc  $2/T$  et les harmoniques sont des fréquences multiple entières du fondamental.

$$a_2 = \frac{2}{T/2} \left( \int_{-T/4}^{T/4} E \cos(\omega t) \cos(2\omega t) dt \right) = \frac{8}{T} \left( \int_0^{T/4} E \cos(\omega t) \cos(2\omega t) dt \right) = \frac{4E}{T} \left( \int_0^{T/4} (\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)) dt \right)$$

$$a_2 = \frac{4E}{T} \left( \left[ \frac{1}{3\omega} \sin(3\omega t) \right]_0^{T/4} + \left[ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]_0^{T/4} \right) = \frac{4E}{3 \times 2\pi} (\sin(3\omega T/4) + 3 \sin(\omega T/4)) = \frac{2E}{3\pi} (-1 + 3) = \frac{4E}{3\pi}$$

- Nous pouvons alors effectuer un bilan de puissance pour évaluer le taux d'harmoniques.

Même valeur efficace qu'une sinusoïde  $V_{eff} = \frac{E}{\sqrt{2}}$

Pourcentage de puissance dans le continu :  $\frac{a_0^2}{V_{eff}^2} = \frac{8}{\pi^2} = 81\%$

Pourcentage de puissance dans le fondamental :  $\frac{a_2^2/2}{V_{eff}^2} = \frac{16}{9\pi^2} = 18\%$

Pourcentage de puissance dans le reste :  $\frac{V_{eff}^2 - a_0^2 - a_2^2/2}{V_{eff}^2} = \frac{9\pi^2 - 88}{9\pi^2} = 1\%$

Taux d'harmoniques  $T_d = \sqrt{\frac{\text{Puissance des harmoniques}}{\text{puissance du fondamental}}} = \sqrt{\frac{1\%}{18\%}} = 0,21$

2 - Taux de distorsion pour un signal sinusoïdal redressé mono alternance

On remarque que sinus + sinus\_double\_alternance= 2 sinus\_mono\_alternance

Résultat :  $v(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{2E}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \times 7} \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$

- Nous pouvons alors effectuer un bilan de puissance pour évaluer le taux d’harmoniques.

Valeur efficace réduite par rapport à une sinusoïde →  $V_{eff} = E / 2$

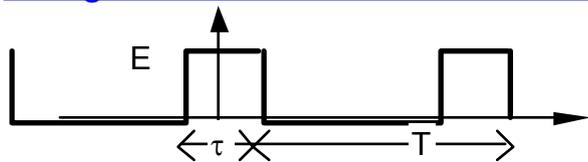
Pourcentage de puissance dans le continu :  $\frac{a_0^2}{V_{eff}^2} = \frac{4}{\pi^2} = 40\%$

Pourcentage de puissance dans le fondamental :  $\frac{a_1^2/2}{V_{eff}^2} = \frac{1}{2} = 50\%$

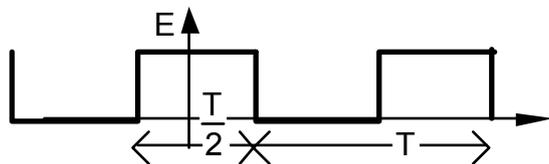
Pourcentage de puissance dans le reste :  $\frac{V_{eff}^2 - a_0^2 - a_1^2/2}{V_{eff}^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} = 9,7\%$

Taux d’harmoniques  $Td = \sqrt{\frac{\text{Puissance des harmoniques}}{\text{puissance du fondamental}}} = \sqrt{\frac{9,7\%}{50\%}} = 0,44$

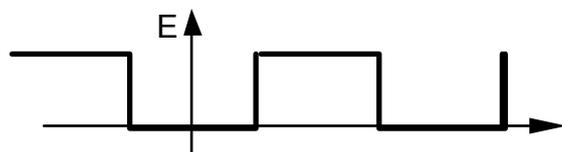
Corrigé de "Transformation et bilan d’énergie"



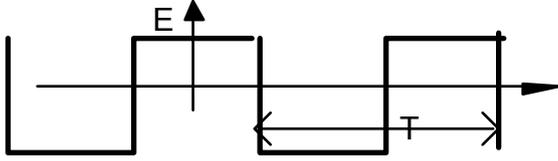
$v(t) = \frac{\tau E}{T} + \frac{2E}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi t}{T} \cos(\omega t) + \frac{\sin \frac{2\pi t}{T}}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\sin \frac{3\pi t}{T}}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]$



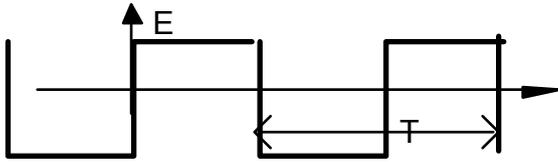
$v_1(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi}{2} \cos(\omega t) + \frac{\sin \pi}{2} \cos(2\omega t) + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]$   
 $= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[ \cos(\omega t) + 0 + \frac{-1}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]$



$$\begin{aligned}
 v_2(t) = v_1\left(t - \frac{T}{2}\right) &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[ \cos\left(\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \frac{-1}{3} \cos\left(3\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \dots \right] \\
 &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[ \cos(\omega t - \pi) + \frac{-1}{3} \cos(3\omega t - 3\pi) + \dots \right] \\
 &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[ -\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]
 \end{aligned}$$



$$v_3(t) = v_1(t) - v_2(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \cos(\omega t) + \frac{-1}{3} \cos(3\omega t) + \dots \right]$$



$$v_4(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

## TD2 - Transformation de Fourier

### 1 - Calcul du spectre d'un signal tronqué

a- Calculer le spectre en fréquence du signal  $s(t)$  défini ci dessous.

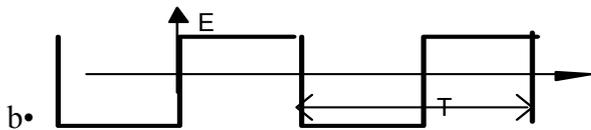
$$s(t) = 0 \quad \text{pour } |t| > T/2$$

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \quad \text{pour } |t| \leq T/2$$

b- Que devient ce spectre quand  $T \rightarrow \infty$  ?

### 2 - Tracé de spectre

a•  $s(t) = 5 \cos(2\pi\nu_0 t) + 3 \sin(2\pi\nu_1 t) - \cos(2\pi\nu_2 t)$



$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

### 3 - Transformées de Fourier

- a Transformée de Fourier d'une porte  $\text{rect}(t)$  de largeur 1 et de hauteur 1 centrée en 0
- b Trouver une relation permettant de passer de la fonction  $\text{rect}(t)$  à la fonction triangle  $\text{tri}(t)$  de largeur 2 à la base et de hauteur 1 centrée en 0. Transformée de Fourier d'un triangle  $\text{tri}(t)$ .
- c Transformée de Fourier d'une porte  $\text{rect}_T(t)$  de largeur T et de hauteur 1 centrée en 0.
- d Dessiner  $\text{rect}_T(t) \otimes \text{rect}_T(t)$ . Exprimer la transformée de Fourier en fonction de  $\text{tri}(t)$ .
- e Transformée de Fourier du signal  $\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$ . Le résultat final est-il cohérent avec le résultat précédent?

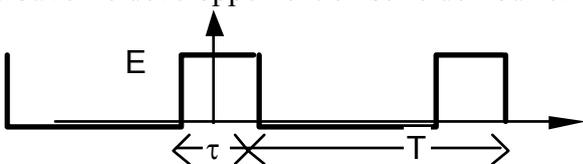
### 4 - Calcul par transformée de Fourier inverse

Déterminer le signal  $s(t)$  qui a pour transformée de Fourier. Tracer ce signal

$$s(\nu) = \delta(\nu) + \frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0)$$

### 5 - Spectre de raies (à faire chez soi)

Retrouver le développement en série de Fourier du signal à partir de la TF d'une porte.

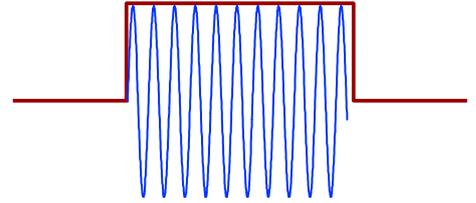


## Correction du TD2 - Transformation de Fourier

### 1 - Calcul du spectre d'un signal tronqué

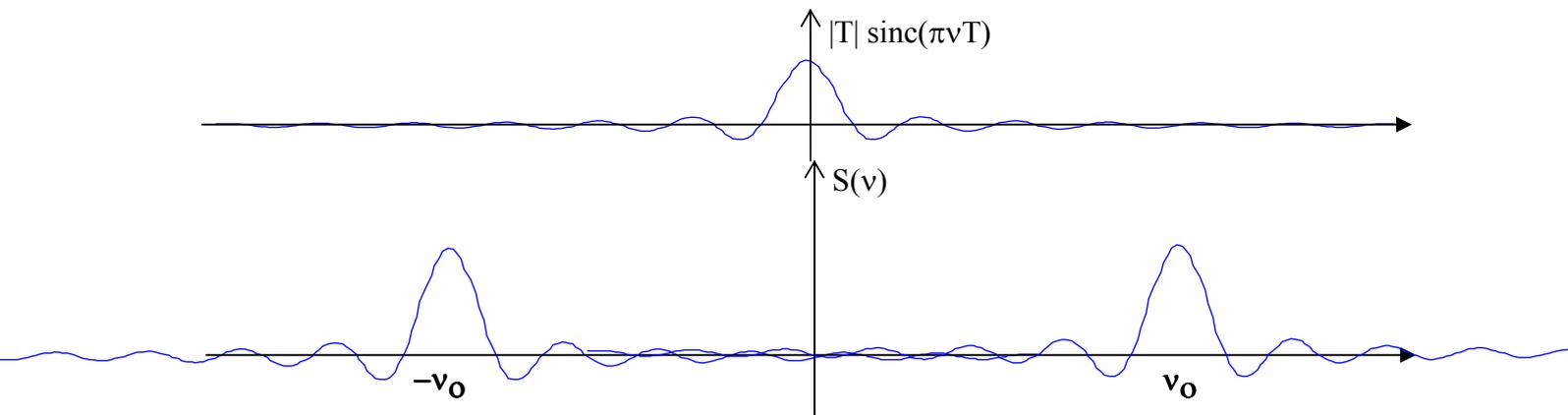
a- Calculer le spectre en fréquence du signal  $s(t)$  défini ci dessous.

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{pour } |t| > T/2 \\ s(t) = S_0 \cos(2\pi t) & \text{pour } |t| \leq T/2 \end{cases}$$

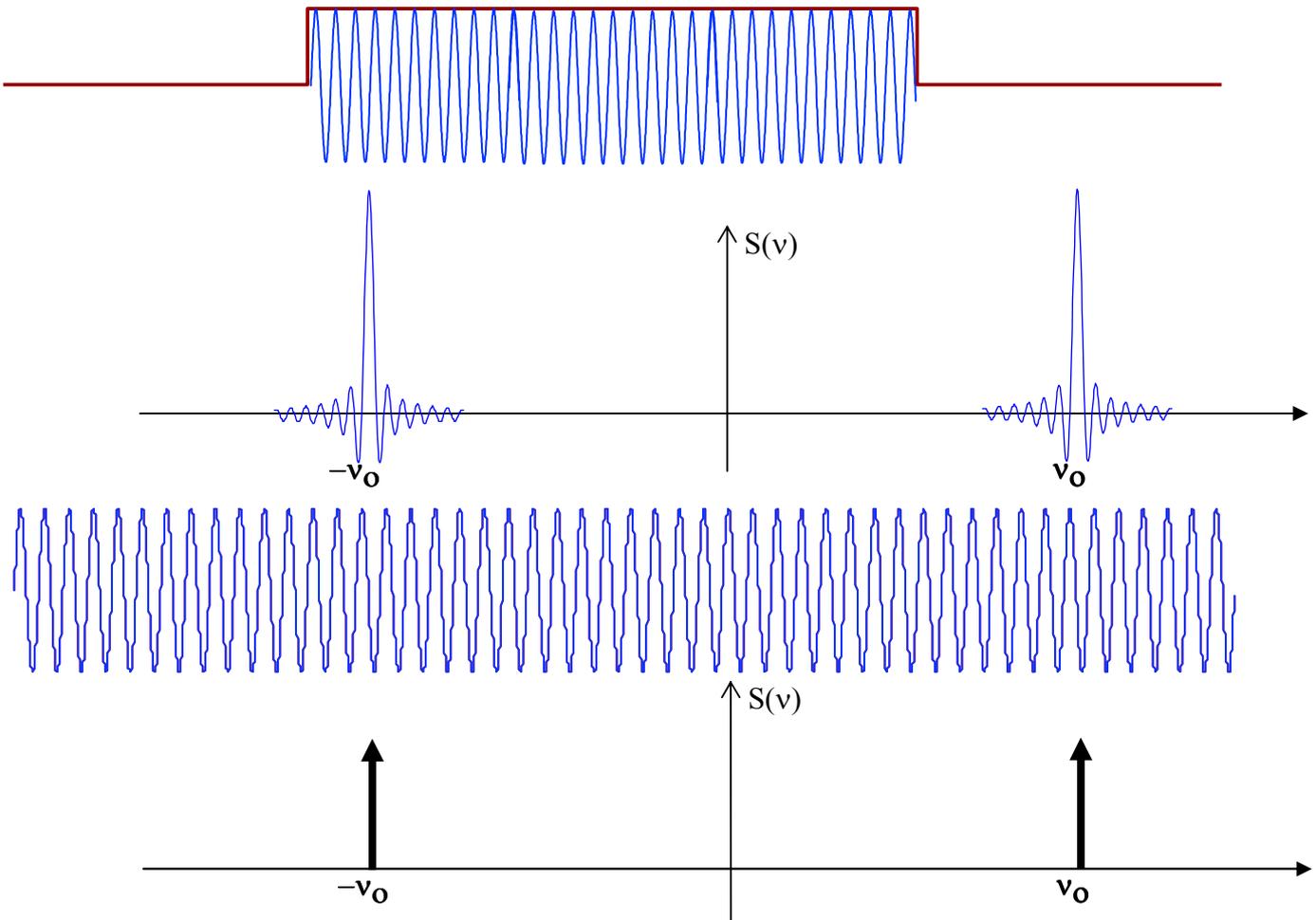


$$S(t) = S_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \cdot \text{rect}_{T/2}(t) \Leftrightarrow S(\nu) = S_0 \cdot \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

Tracé à l'échelle  $10/\nu_0 = T \Leftrightarrow 10/T = \nu_0$



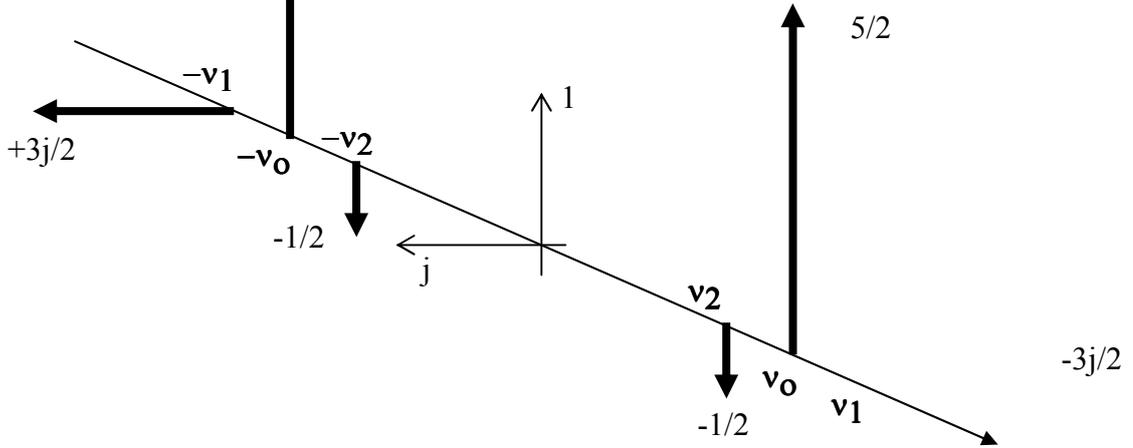
b- Que devient ce spectre quand  $T \rightarrow \infty$  ?



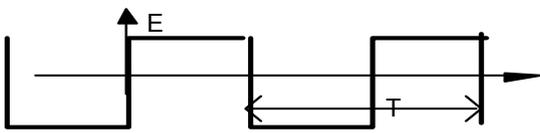
2 - Tracé de spectre

a•

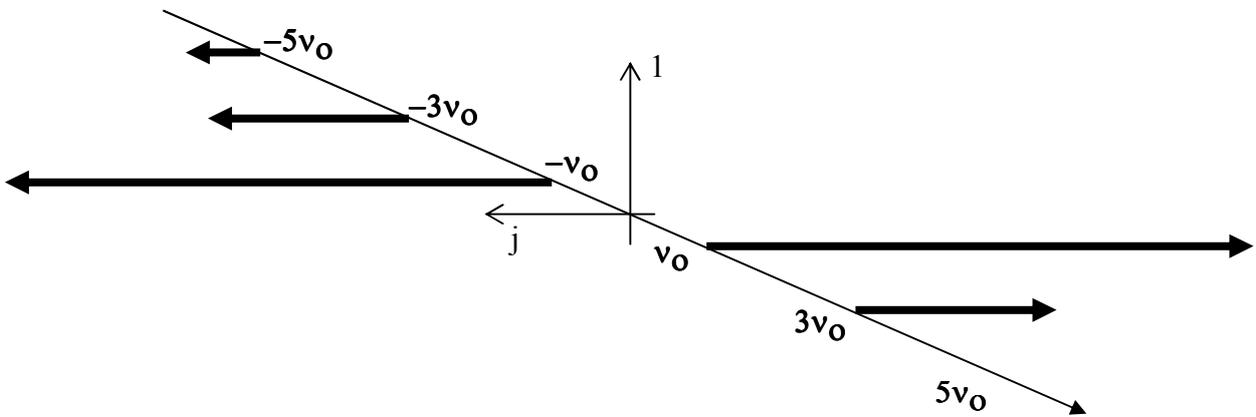
$$s(t) = 5 \cos(2\pi\nu_0 t) + 3 \sin(2\pi\nu_1 t) - \cos(2\pi\nu_2 t)$$



b•

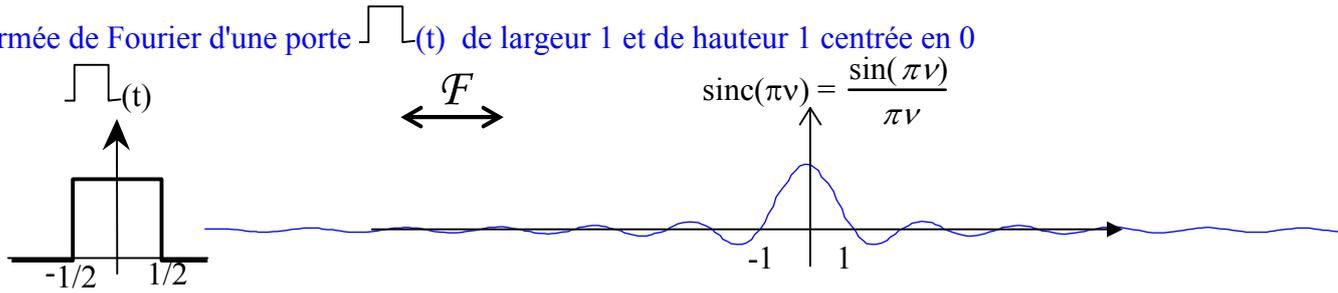


$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

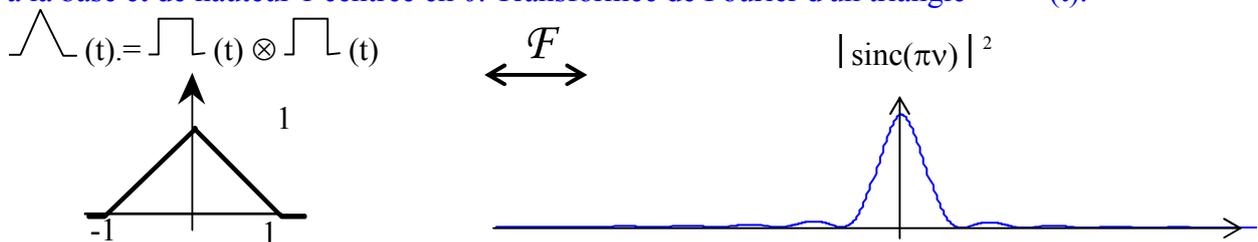


### 3 - Transformées de Fourier

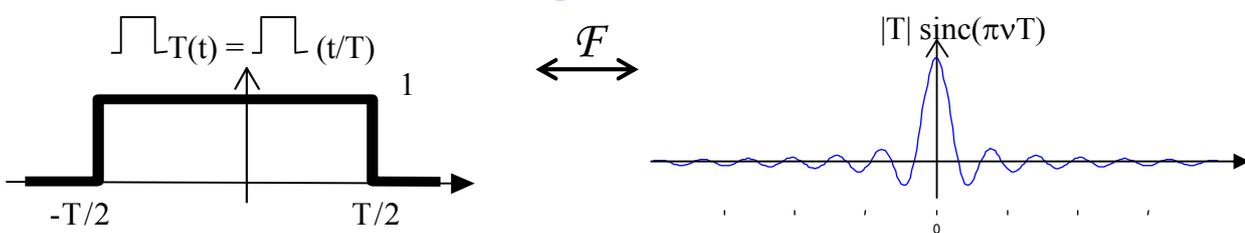
a Transformée de Fourier d'une porte  $\text{rect}(t)$  de largeur 1 et de hauteur 1 centrée en 0



b Trouver une relation permettant de passer de la fonction  $\text{rect}(t)$  à la fonction triangle  $\text{tri}(t)$  de largeur 2 à la base et de hauteur 1 centrée en 0. Transformée de Fourier d'un triangle  $\text{tri}(t)$ .

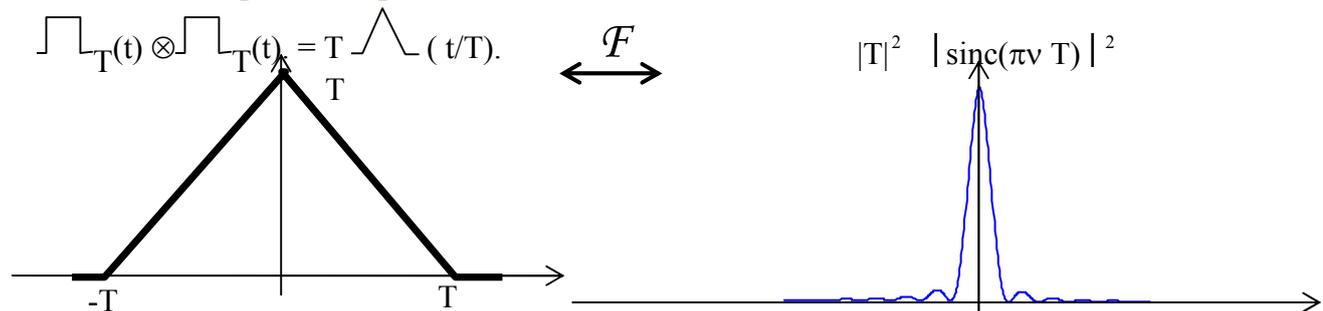


c Transformée de Fourier d'une porte  $\text{rect}_T(t)$  de largeur T et de hauteur 1 centrée en 0.

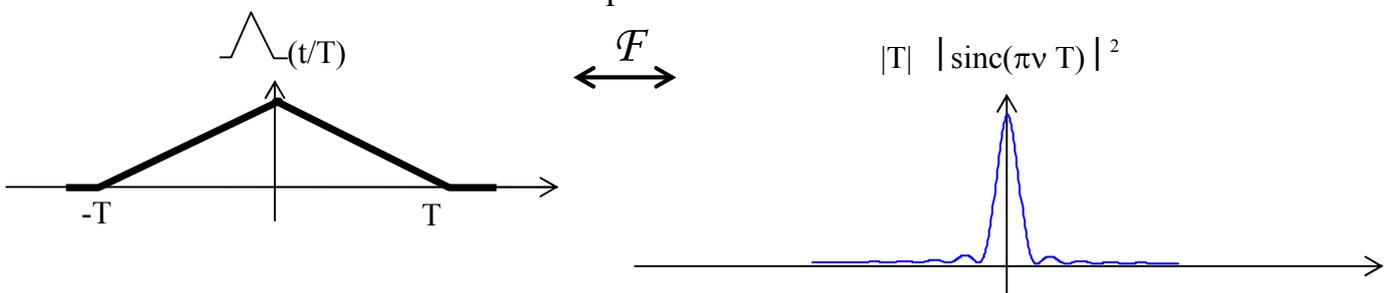


*Bien insister sur les mécanismes de contraction dans un espace / extension dans l'autre*

d Dessiner  $\text{rect}_T(t) * \text{rect}_T(t)$ . Exprimer la transformée de Fourier en fonction de  $\text{tri}(t)$ .



e Transformée de Fourier du signal  $\text{tri}(t/T)$ . Le résultat final est-il cohérent avec le résultat précédent?



4 - Calcul par transformée de Fourier inverse

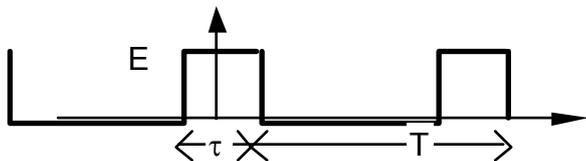
Déterminer le signal  $s(t)$  qui a pour transformée de Fourier. Tracer ce signal

$$s(\nu) = \delta(\nu) + \frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0)$$

$$s(\nu) = \delta(\nu) + \frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0) \rightarrow s(t) = 1 + \cos(2\pi\nu_0 t)$$

5 - Spectre de raies (à faire chez soi)

Retrouver le développement en série de Fourier du signal à partir de la TF d'une porte.

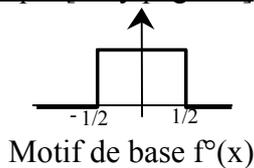


Calcul classique

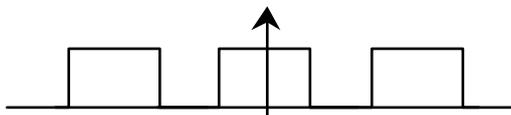
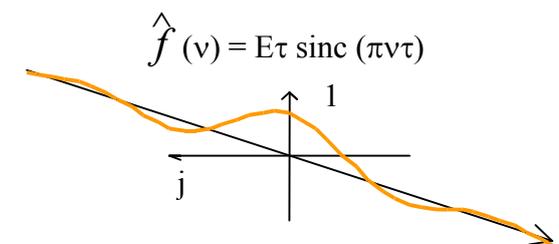
$$C_n \triangleq \frac{1}{T} \int_a^{a+T} g(t) e^{-2\pi j n t/T} dt = \frac{E}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2\pi j n t/T} dt = \frac{E}{T} \frac{-T}{2\pi j n} [e^{-2\pi j n t/T}]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$C_n = \frac{E}{\pi n} \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \frac{E}{\pi n} \sin(\phi) = \frac{E}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) \text{ avec } \phi = \frac{\pi n \tau}{T}$$

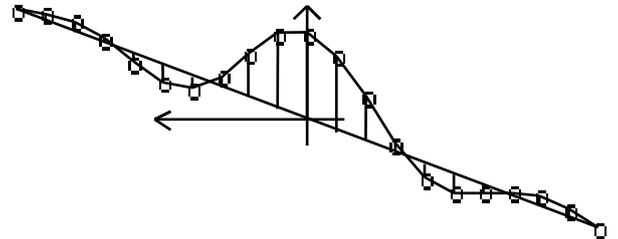
Calcul générique [Poly page 19]



$\mathcal{F}$



$\mathcal{F}$



$$f(t) = f^o(t) \otimes \llbracket \square \rrbracket_T(t)$$

Spectre de raies  $\hat{f}(v) = E\tau \text{sinc}(\pi v \tau) \cdot \llbracket \square \rrbracket(v \cdot T)$

$$f(t) = \frac{E}{\pi n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) \cdot e^{2\pi j n t/T}$$

$$\hat{f}(v) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\tau \text{sinc}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) \cdot \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

$$\rightarrow C_n = \frac{E}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)$$

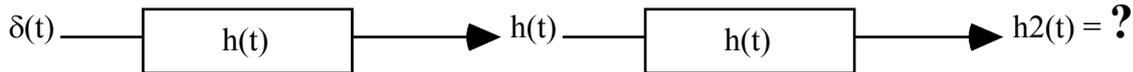
## TD3 - Convolution

### 1 - Combinaison de filtre en cascade

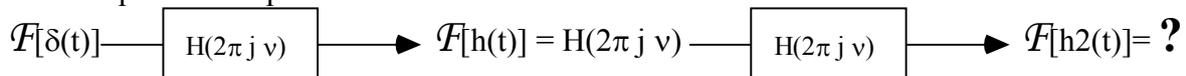
Soient deux filtres identiques placés en cascade, de transmittance  $H(2\pi j \nu)$

et de réponse impulsionnelle  $h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \text{Heaviside}(t)$

a- Déterminer la réponse impulsionnelle correspondante  $h_2(t)$  par convolution.



b- Rappeler la règle générale sur la combinaison de filtre en cascade et expliquer pourquoi la transmittance résultante est le produit simple des transmittances.



c- Déterminer la sortie par le calcul de la transformée de Fourier de  $H(2\pi j \nu)$ , puis élévation au carré, puis transformée de Fourier du résultat..

d- Déterminer la sortie  $s(t)$  de ce système quand :  $e(t) = E^{\circ} + E \cdot \sin(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3})$  pour  $t \in ]-\infty, +\infty [$

### 2 – Quelques réponses classiques à faire chez soi

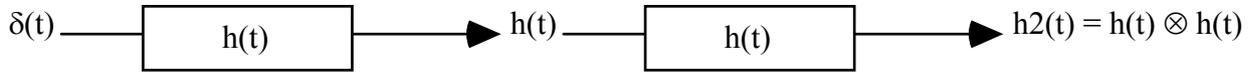
Soit  $h(t)$  la réponse impulsionnelle du système linéaire.  $e(t)$  — Système linéaire —  $s(t) = h(t) \otimes e(t)$

Réponse impulsionnelle	Réponse à un échelon	Réponse spectrale
Premier ordre passe bas		
Deuxième ordre passe bas		
Deuxième ordre passe bande		
Deuxième ordre passe haut		

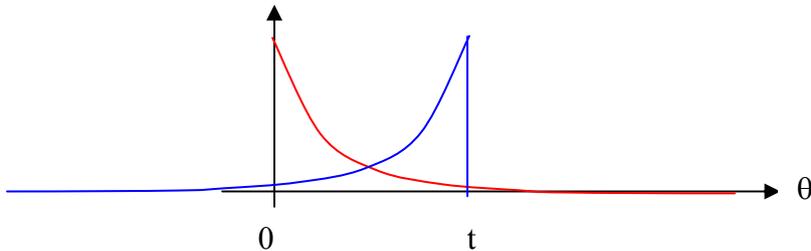
# Correction du TD Convolution

## 1 - Combinaison de filtre en cascade

a- Déterminer la réponse impulsionnelle correspondante  $h_2(t)$  par convolution.

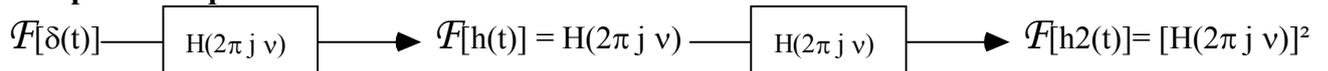


Définition du produit de convolution page 23  $f \otimes g(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)g(x-\theta) d\theta$

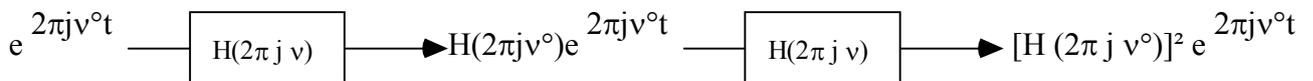


$$\begin{aligned}
 h_2(t) &= h(t) \otimes h(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)h(t-\theta) d\theta \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot \text{Heaviside}(\theta) \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \cdot \text{Heaviside}(t-\theta) d\theta = \int_0^t \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} d\theta \\
 &= \int_0^t \frac{1}{\tau^2} \cdot e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} d\theta = \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t d\theta = \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot t = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}
 \end{aligned}$$

b- Règle générale sur la combinaison de filtre en cascade : produit de convolution en temps et donc produit simple en fréquence.



Physiquement une autre façon de voir est d'exciter le filtre, non plus par un dirac, mais par une sinusoïde pure (Bode). En passant deux fois dans le filtre, l'effet d'atténuation et de déphasage du filtre a lieu deux fois.



c- Transformée de Fourier de  $H(2\pi j v) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi j v t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-2\pi j v t} dt$

$$H(2\pi j v) = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{-1}{2\pi j v + \frac{1}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau} - 2\pi j v t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2\pi j v + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{2\pi j v \tau + 1} \text{ Premier ordre passe bas}$$

$$H_2(2\pi j v) = [H(2\pi j v)]^2 = \left[ \frac{1}{2\pi j v \tau + 1} \right]^2$$

On peut retrouver le résultat par transformée de Fourier directe de la fonction  $\frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

$$\begin{aligned}
 H_2(2\pi j \nu) &\stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{Heaviside}(\tau) e^{-2\pi j \nu t} dt = \frac{1}{\tau^2} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{\tau} - 2\pi j \nu t} dt \\
 &= \frac{1}{\tau^2} \left[ \frac{-t}{2\pi j \nu + \frac{1}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau} - 2\pi j \nu t} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{2\pi j \nu + \frac{1}{\tau}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t}{\tau} - 2\pi j \nu t} dt \quad \leftarrow \begin{array}{|l|} \hline \text{Intégration} \\ \text{Par partie} \\ \hline \end{array} \\
 &= 0 + \frac{1}{\tau^2} \frac{1}{2\pi j \nu + \frac{1}{\tau}} \frac{1}{2\pi j \nu + \frac{1}{\tau}} = \left[ \frac{1}{2\pi j \nu \tau + 1} \right]^2
 \end{aligned}$$

On retrouve le résultat attendu.

d- Déterminer la sortie  $s(t)$  de ce système quand :  $e(t) = E^\circ + E \cdot \sin\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3}\right)$  pour  $t \in ]-\infty, +\infty [$

Filtre passe bas

$E^\circ \rightarrow E^\circ$  - Le continu passe.

$E \cdot \sin\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3}\right)$  est à la fréquence  $\nu^\circ = \frac{1}{2\pi\tau}$

A cette fréquence,  $H(2\pi j \nu^\circ) = \frac{1}{2\pi j \nu^\circ \tau + 1} = \frac{1}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$

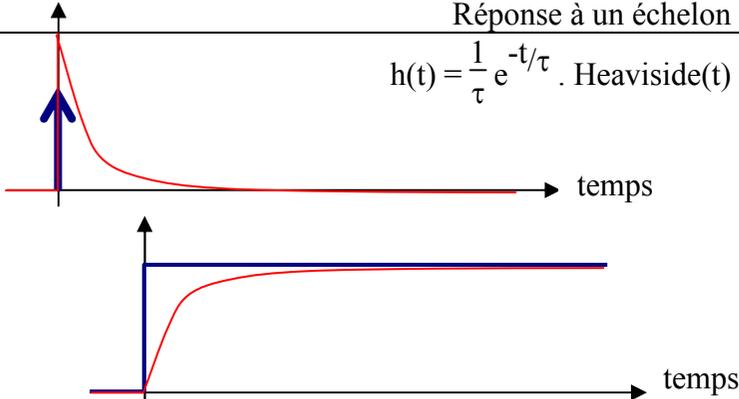
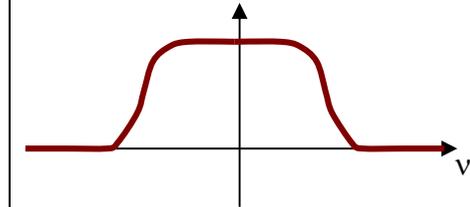
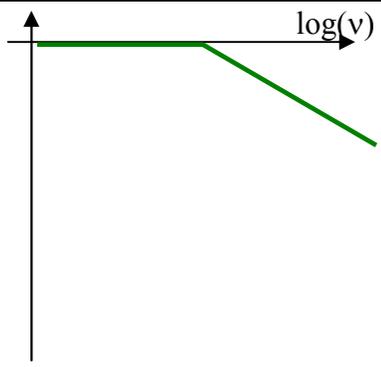
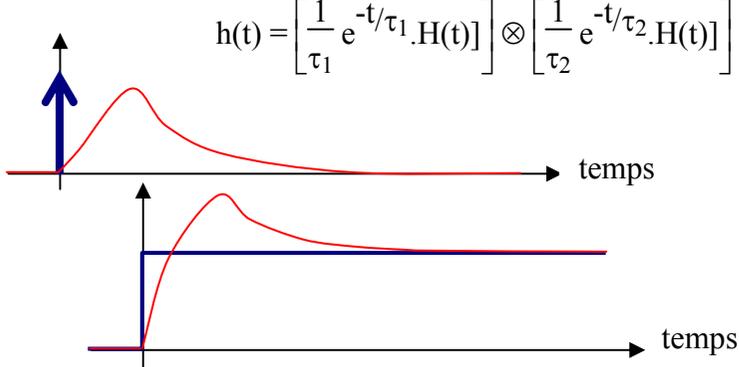
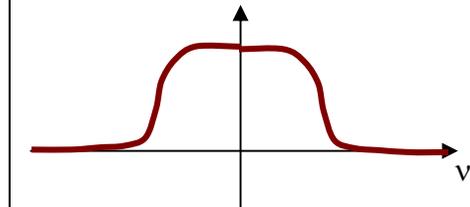
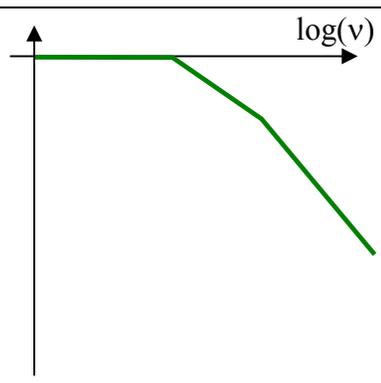
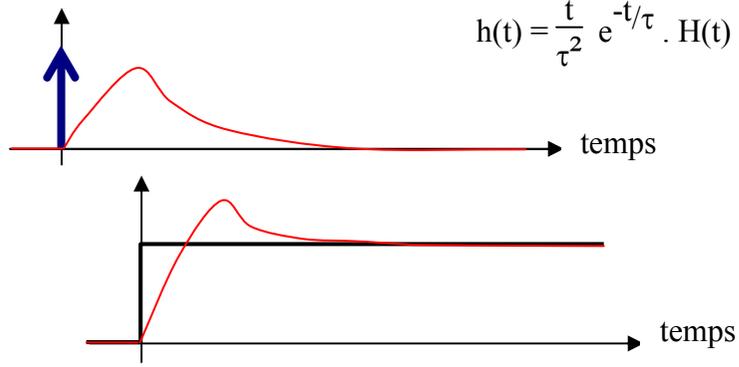
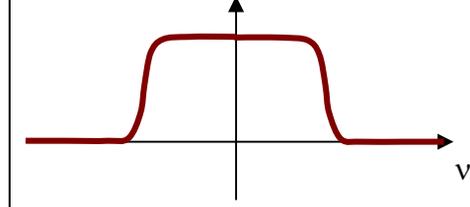
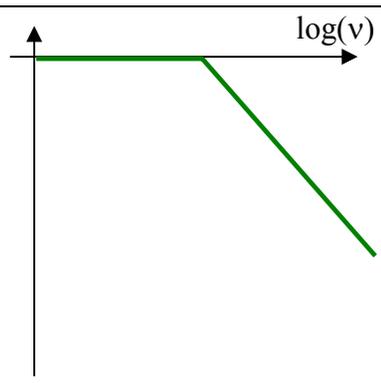
$H_2(2\pi j \nu^\circ) = \left[ H(2\pi j \nu^\circ) \right]^2 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

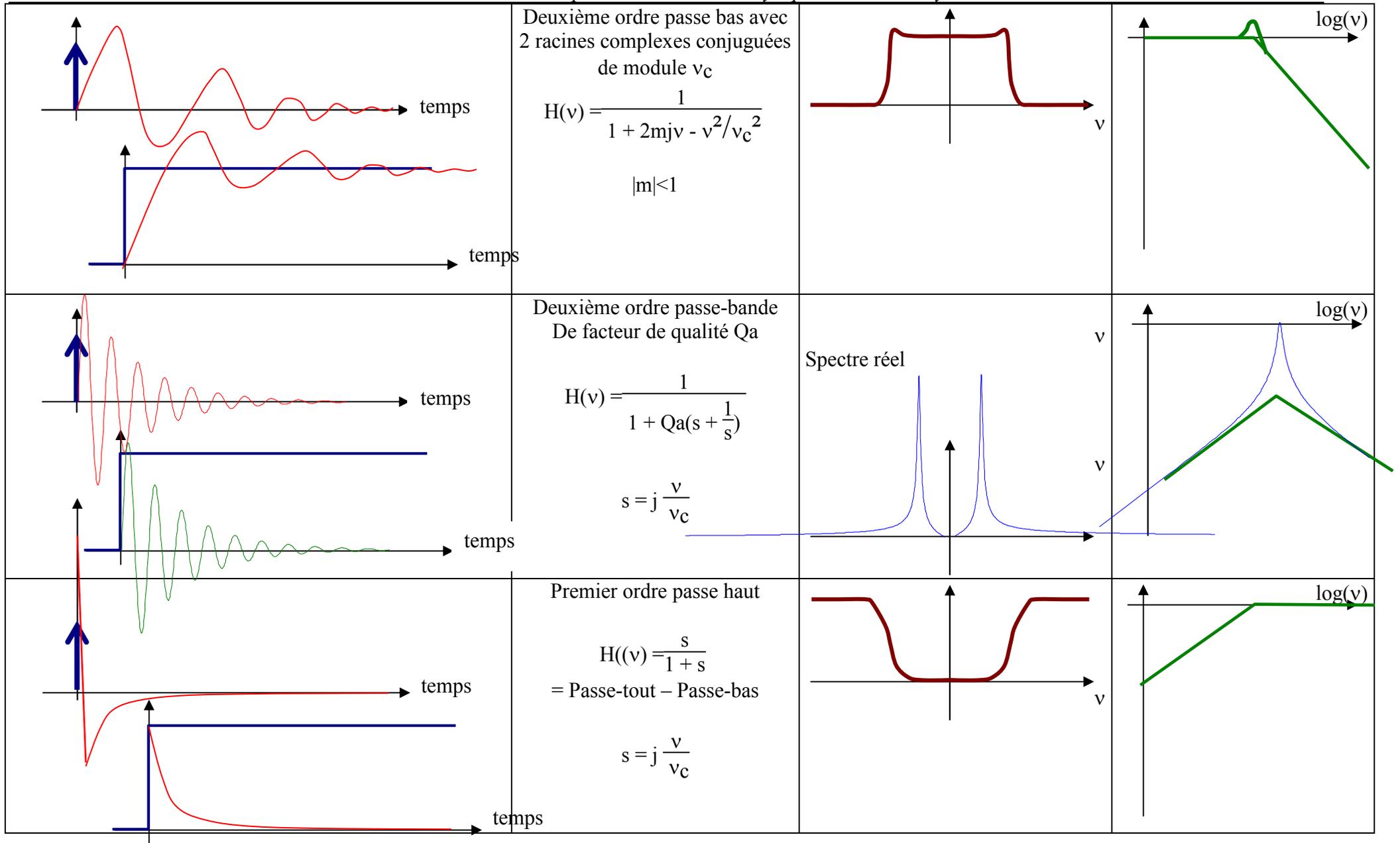
Donc

$E \cdot \sin\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow s(t) = \frac{E}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E}{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{3}\right)$

## Exo 2 – Quelques réponses classiques

Tracer les différentes réponses temporelles et réponses fréquentielles correspondantes.

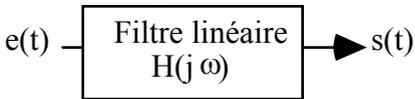
Réponse impulsionnelle	Transmittance	Réponse spectrale	Diagramme de Bode
<p>Réponse à un échelon</p> $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \text{Heaviside}(t)$ 	<p>Premier ordre passe bas</p> $H(\nu) = \frac{1}{1 + j \frac{\nu}{\nu_c}}$		
$h(t) = \left[ \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \cdot H(t) \right] \otimes \left[ \frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \cdot H(t) \right]$ 	<p>Deuxième ordre passe bas avec 2 racines simples <math>\nu_1</math> et <math>\nu_2</math></p> $H(\nu) = \left( \frac{1}{1 + j\nu/\nu_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 + j\nu/\nu_2} \right)$ $= \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 \nu_2 + j(\nu_1 + \nu_2)\nu - \nu^2}$		
$h(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \cdot H(t)$ 	<p>Deuxième ordre passe bas avec une racine double <math>\nu_c</math></p> $H(\nu) = \left( \frac{1}{1 + j \frac{\nu}{\nu_c}} \right)^2$		



# TD4 - Filtrage

## 1 - Filtrage fréquentiel linéaire

Le signal  $e(t)$  traverse un filtre linéaire de transmittance  $H(j\omega)$ .



$$\text{avec } H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Le signal  $e(t)$  est un signal triangulaire périodique dont le fondamental est à la fréquence 50 Hz. Sa décomposition en série de Fourier est :

$$e(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{7^2} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

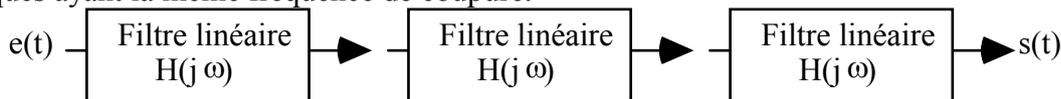
a- A partir de  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ , tracer le diagramme de Bode de ce filtre et indiquer le type du filtre.

b- On ne se préoccupe pas du déphasage introduit par le filtre. On cherche à obtenir une atténuation de moitié sur la puissance de l'harmonique numéro 5. Quelle fréquence de coupure  $\omega_c$  du filtre doit-on choisir ?

Quelle est alors l'atténuation sur la puissance du fondamental ?  
de l'harmonique numéro 3 ?  
de l'harmonique numéro 7 ?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ?

c- L'atténuation de cet harmonique n'est pas suffisante. On se propose alors de cascader 3 filtres identiques ayant la même fréquence de coupure.



Indiquer comment se transforme formellement la transmittance du filtre résultant.

Quelle est alors l'atténuation sur la puissance du fondamental ?  
de l'harmonique numéro 3 ?  
de l'harmonique numéro 5 ?  
de l'harmonique numéro 7 ?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ?  
Quelle est l'atténuation en dB par décade de ce filtre ?

- d- Indiquer comment se transforme formellement la sortie en fonction de la transmittance et de l'entrée.
- e- Donner la décomposition en série de Fourier de la sortie  $s(t)$  après passage dans la cascade des 3 filtres (On omettra les termes d'amplitude relative vis-à-vis du fondamental inférieure à 1%).
- f- Tracer alors l'entrée triangulaire et la sortie correspondante. En particulier préciser les niveaux de l'entrée et de la sortie pour  $t=0$ .

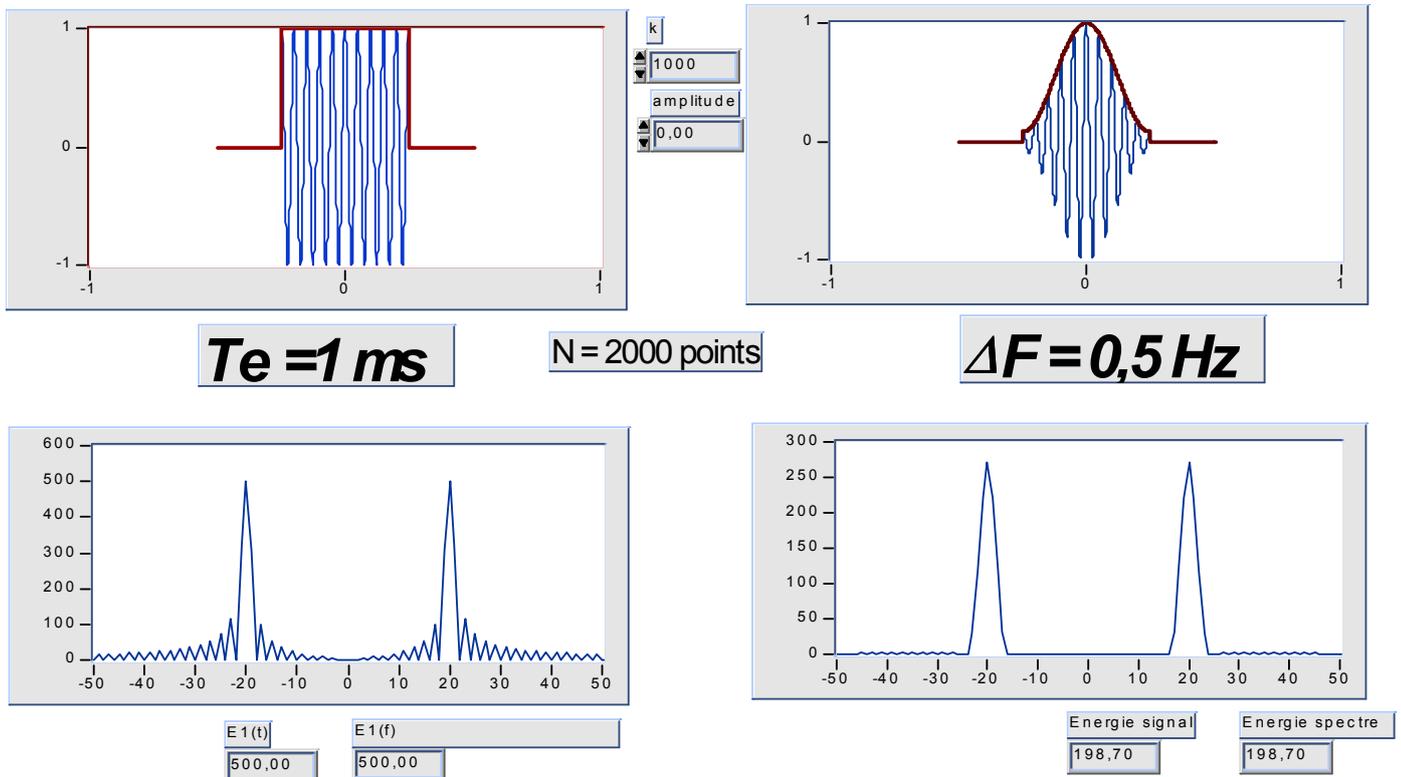
## 2 - Filtrage temporel et fenêtrage

On cherche à comprendre le pourquoi de la forme de la fenêtre de Hamming. Cette fenêtre est définie pour un horizon centré de longueur T par la formule  $\text{Hamming}(t) = \text{rect}_{T/2}(t) \cdot [0,54 + 0,46 \cos(2\pi \frac{t}{T})]$

a- Expliquer la transformation du spectre après que le signal soit tronqué sur un horizon centré.

b- Idem après avoir utilisé une fenêtre de Hamming.

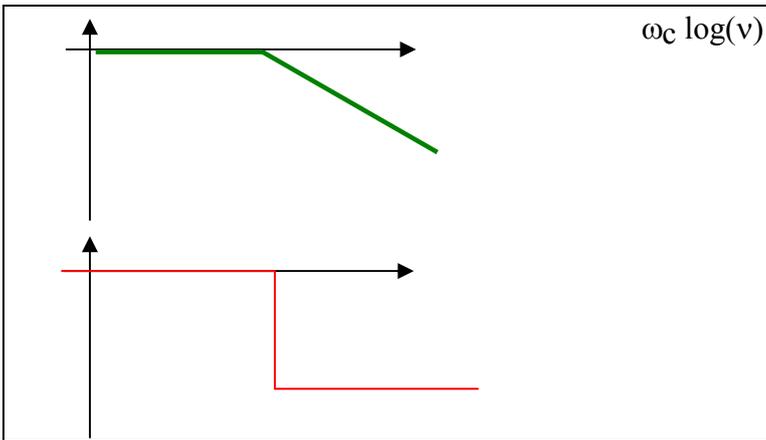
c- Tracer à la calculatrice pour les valeurs multiples de  $\frac{1}{3 \cdot T}$  la résolution en fréquence de ce filtrage temporel pour les 12 premières valeurs. Conclure sur les cas où il est intéressant d'utiliser ce filtrage temporel.



# Correction de TD4 - Filtrage

## 1 - Filtrage fréquentiel linéaire

a- A partir de  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ , tracer le diagramme de Bode de ce filtre et indiquer le type du filtre.



b- Quelle fréquence de coupure  $\omega_c$  du filtre doit-on choisir ?  $5\omega_0 = \omega_c \rightarrow H(j5\omega_0) = \frac{1}{1 + j}$

Atténuation en puissance :  $\left\| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right\|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$

Harmonique	Atténuation en puissance	Avant filtrage	Après filtrage
1	$\frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{25\omega_0^2}} = \frac{25}{25 + 1} = 0,961$	1	$\sqrt{0,961}$
3	$\frac{1}{1 + \frac{(3\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} = \frac{25}{25 + 9} = 0,735$	$\frac{1}{3^2}$	
5	$\frac{1}{1 + \frac{(5\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} = \frac{25}{25 + 25} = 0,500$	$\frac{1}{5^2}$	
7	$\frac{1}{1 + \frac{(7\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} = \frac{25}{25 + 49} = 0,331$	$\frac{1}{7^2}$	$\frac{1}{7^2} \sqrt{0,331}$

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ?

$$\|a_7\| = \frac{1}{7^2} \sqrt{0,331} / \sqrt{0,961} \|a_1\| = 0,0114 \|a_1\| \text{ donc supérieur à 1\%}$$

c- Indiquer comment se transforme formellement la transmittance du filtre résultant de la cascade de 3 filtres identiques ayant la même fréquence de coupure.

$$H_3(j\omega) = \left( \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right)^3$$

Atténuation en puissance :  $\left[ \left\| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \right\|^2 \right]^3 = \left[ \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right]^3$

Harmonique	Atténuation en puissance	Avant filtrage	Après filtrage
1	$\left[ \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{25\omega_0^2}} \right]^3 = \left[ \frac{25}{25 + 1} \right]^3 = 0,887$	1	$\sqrt{0,887}$
3	$\left[ \frac{1}{1 + \frac{(3\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} \right]^3 = \left[ \frac{25}{25 + 9} \right]^3 = 0,397$	$\frac{1}{3^2}$	
5	$\left[ \frac{1}{1 + \frac{(5\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} \right]^3 = \left[ \frac{25}{25 + 25} \right]^3 = 0,125$	$\frac{1}{5^2}$	
7	$\left[ \frac{1}{1 + \frac{(7\omega_0)^2}{25\omega_0^2}} \right]^3 = \left[ \frac{25}{25 + 49} \right]^3 = 0,036$	$\frac{1}{7^2}$	$\frac{1}{7^2} \sqrt{0,036}$

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ?

$$\|a_7\| = \frac{1}{7^2} \sqrt{0,036} / \sqrt{0,887} \|a_1\| = 0,004 \|a_1\| \text{ donc } < 1\%$$

Quelle est l'atténuation en dB par décade de ce filtre ? 60 dB par décade

d- Indiquer comment se transforme formellement la sortie en fonction de la transmittance et de l'entrée.

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ H_3(j\omega_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} H_3(j3\omega_0)\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} H_3(j5\omega_0)\cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{7^2} H_3(j7\omega_0)\cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{1+j\frac{1}{5}} \right)^3 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \left( \frac{1}{1+j\frac{3}{5}} \right)^3 \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \left( \frac{1}{1+j\frac{5}{5}} \right)^3 \cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{7^2} \left( \frac{1}{1+j\frac{7}{5}} \right)^3 \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

e- Donner la décomposition en série de Fourier de la sortie s(t) après passage dans la cascade des 3 filtres (On omettra les termes d'amplitude relative vis-à-vis du fondamental inférieure à 1%).

$$s(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \left( \frac{5}{5+j} \right)^3 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \left( \frac{5}{5+3j} \right)^3 \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \left( \frac{1}{1+j} \right)^3 \cos(5\omega_0 t) \right]$$

L'harmonique 7 et les suivants disparaissent.

f- Tracer alors l'entrée triangulaire et la sortie correspondante. En particulier préciser les niveaux de l'entrée et de la sortie pour  $t=0$ .

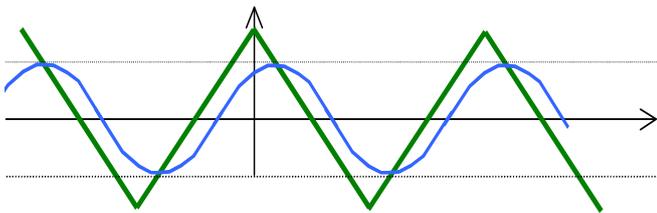
Effectuer un filtrage a trois effets principaux :

- une atténuation en amplitude ;
- un déphasage en temps
- une transformation du signal , car toutes les fréquences ne sont pas transmises de la même façon.

On a affaire dans cet exercice à un filtre passe-bas. L'effet sur le tracé de supprimer des hautes fréquences se traduit par un lissage au niveau de transitions brutales ou au niveau de points anguleux qui nécessitent la présence de hautes fréquences pour arriver à les représenter correctement. L'effet du filtrage se traduira par la présence de bords arrondis à la place des pics des triangles. Par contre le fondamental passe parfaitement, car la fréquence de coupure est supérieure au fondamental.

Il va exister une faible atténuation en amplitude, que l'on ne cherche pas à évaluer.

Par contre, pour effectuer le tracé, nous voulons avoir une idée précise du déphasage. Vu les différentes amplitudes, nous pouvons dans un premier temps supposer que ce déphasage est essentiellement produit par le déphasage du fondamental, les autres déphasage assurant une reconstruction symétrique du triangle. Alors, le déphasage vaut  $3 \arctg\left(\frac{5}{5+j}\right) = -3 \arctg(1+0,2j) = -3 \arctg(0,20) = -33,93 \text{ DEGRE}$ . La sortie a un léger retard vis-à-vis de l'entrée.



Pour  $t=0$ , l'entrée vaut  $E$ , et la sortie vaut  $s(t=0) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \operatorname{Re}\left(\frac{5}{5+j}\right)^3 + \frac{1}{3^2} \operatorname{Re}\left(\frac{5}{5+3j}\right)^3 + \frac{1}{5^2} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+j}\right)^3 \right]$

$$s(t=0) = \frac{8E}{\pi^2} 5^3 \left[ \operatorname{Re}\left(\frac{10-54j}{10^2+54^2}\right) + \frac{1}{3^2} \operatorname{Re}\left(\frac{-10+198j}{10^2+198^2}\right) + \frac{1}{5^5} \operatorname{Re}\left(\frac{-2+2j}{2^2+2^2}\right) \right] = \frac{8E}{\pi^2} 5^3 \left[ \frac{10}{3016} + \frac{1}{3^2} \frac{-10}{39304} + \frac{1}{5^5} \frac{-2}{8} \right]$$

$$s(t=0) = 0,335 E$$

## 2 - Filtrage temporel et fenêtrage

a- Transformation du spectre après que le signal soit tronqué sur un horizon centré.

$$\cos(2\pi f t)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \text{Dirac}(v-f) + \frac{1}{2} \text{Dirac}(v+f)$$

$$\cos(2\pi f t) \cdot \text{rect}_{\frac{T}{2}}(t)$$

$$\rightarrow [\frac{1}{2} \text{Dirac}(v-f) + \frac{1}{2} \text{Dirac}(v+f)] \otimes T \text{sinc}(\pi v T)$$

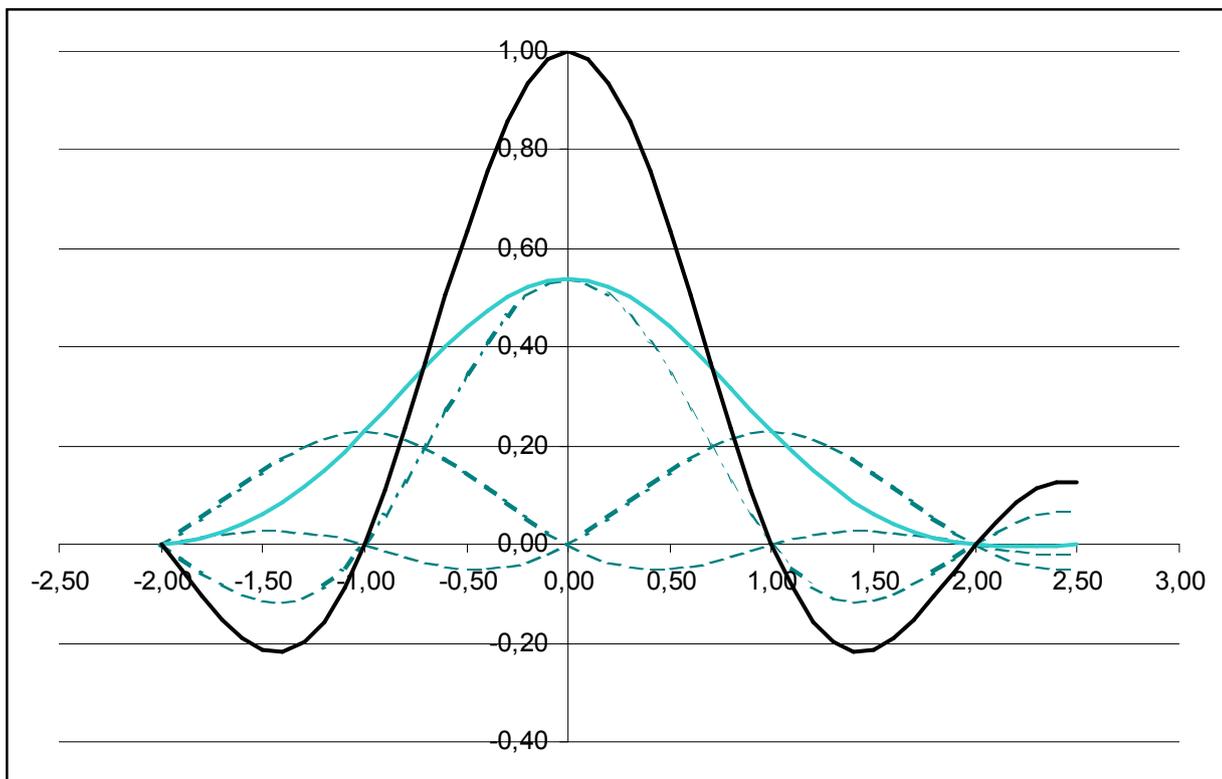
b- Transformation du spectre après avoir utilisé une fenêtre de Hamming.

$$\cos(2\pi f t) \cdot \text{rect}_{\frac{T}{2}}(t) \cdot \left[ 0,54 + 0,46 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right]$$

$$\rightarrow [\frac{1}{2} \text{Dirac}(v-f) + \frac{1}{2} \text{Dirac}(v+f)] \otimes T \text{sinc}(\pi v T)$$

$$\otimes \left[ 0,54 \text{Dirac}(v) + 0,26 \text{Dirac}\left(v - \frac{1}{T}\right) + 0,26 \text{Dirac}\left(v + \frac{1}{T}\right) \right]$$

c- Tracer la résolution en fréquence de ce filtrage temporel.



En noir  $\text{sinc}(\pi v)$ , en bleu mince les 3 parties dont la somme donne la résolution fréquentielle en bleu épais. L'énergie est concentrée à 99% dans le lobe principal.

C- Conclure sur les cas où il est intéressant d'utiliser ce filtrage temporel.

Il faut faire un compromis entre la présence d'artefacts due aux lobes secondaires dans le cas où la fonction d'appareil est un sinus cardinal associée avec une résolution à mi hauteur qui vaut 1,2, et une résolution moindre à mi-hauteur (1,8) mais avec une énergie résiduelle faible (<1%) dans des lobes secondaires persistants.

Cette fenêtre est donc nécessaire pour découvrir des fréquences de faible amplitude dont le lobe principal pourrait être masqué par des lobes secondaires de fréquences présentes dans le signal et d'amplitude plus élevée.



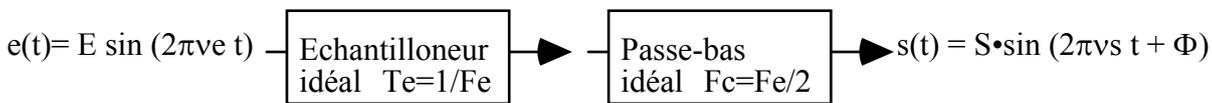
## TD5 - Echantillonnage

### 1 - Repliement du spectre

Nous désirons échantillonner les trois tension ci-dessous avec une période  $T=1\text{ms}$ .

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E \sin(2\pi F_1 t); & F_1 &= 0,2 \text{ kHz} \\ e_2(t) &= E \sin(2\pi F_2 t); & F_2 &= 1,2 \text{ kHz} & E &= 1 \text{ Volt} \\ e_3(t) &= E \sin(2\pi F_3 t); & F_3 &= 0,8 \text{ kHz} \end{aligned}$$

- Déterminer numériquement les valeurs des 6 premiers échantillons de chaque signal.
- Trouver les relations liant les fréquences d'entrée et de sortie
- Nous réalisons le dispositif ci-dessous. Tracer  $v_s=f(v_e)$ . Retrouver le théorème de Shannon



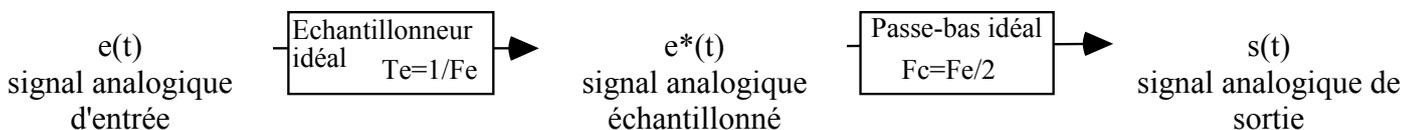
### 2 - Echantillonnage réel (Cours-TD)

On suppose échantillonner un signal avec un système qui prend la moyenne du signal sur une durée  $\tau$ .

- Ecrire les formules donnant les variations d'amplitude et de phase de la représentation en fréquence du signal échantillonné par rapport à la représentation en fréquence du signal initial.
- On appelle  $\alpha$  le facteur de sur échantillonnage et  $\lambda$  le rapport entre la durée  $\tau$  de l'impulsion et la durée  $T_e$  de la période d'échantillonnage. On veut que la variation d'amplitude soit inférieure à 1%.  
Quelle relation doit vérifier le rapport  $\frac{\lambda}{\alpha}$  ?

- Quel est le déphasage correspondant en degré ?

### 3 - Échantillonnage



La période d'échantillonnage  $T_e$  vaut 1 ms

- Déterminer la réponse à une entrée  $e(t) = 5 + 2 \cos(600\pi t) + \sin(1600\pi t)$
- On place avant l'échantillonneur un autre filtre passe-bas identique à celui de la sortie, déterminer alors la nouvelle expression de  $s(t)$

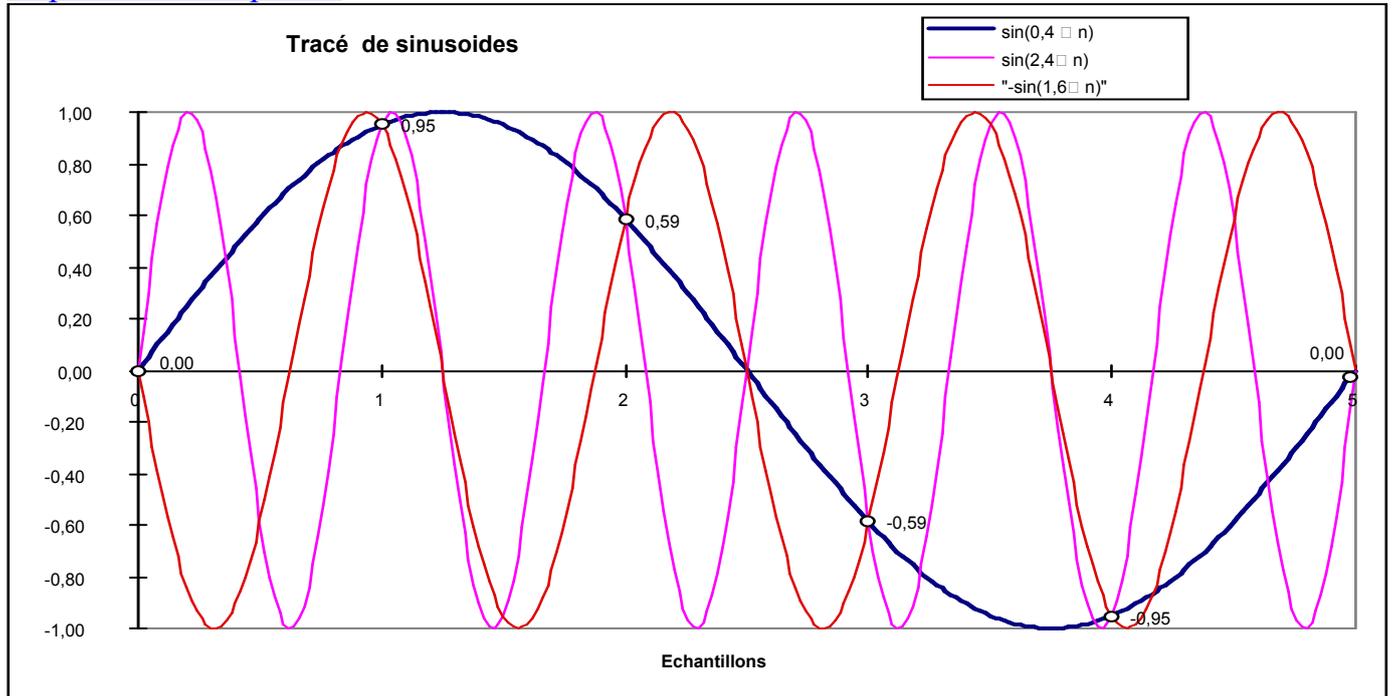
Réponse :

- $s(t) = 5 + 2 \cos(600\pi t) - \sin(400\pi t)$
- $s(t) = 5 + 2 \cos(600\pi t)$

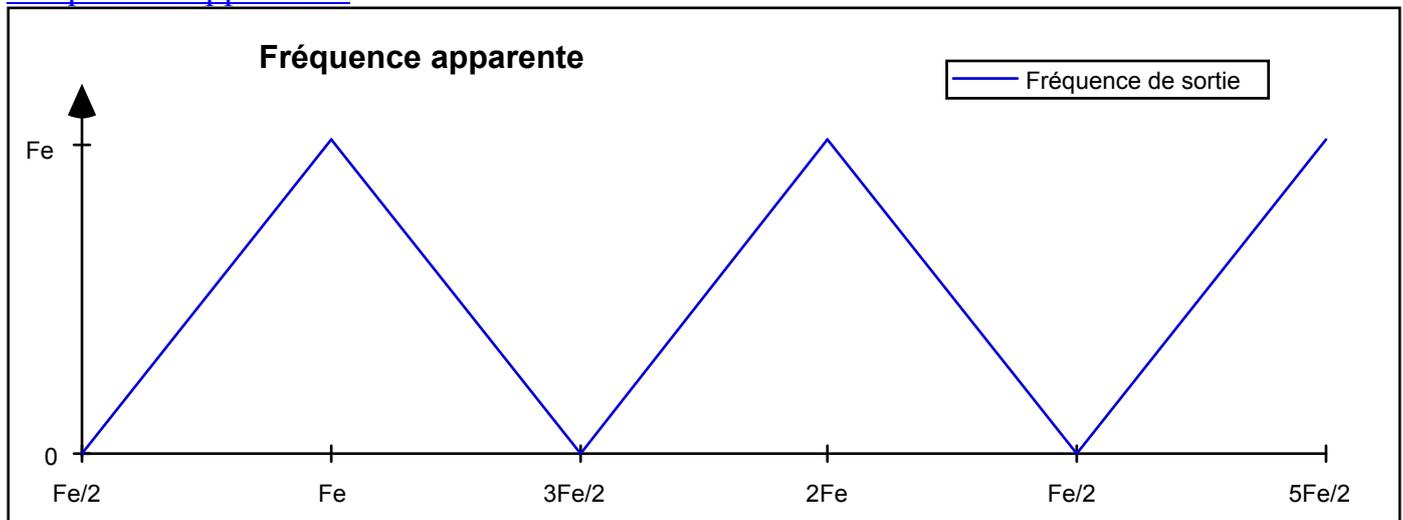
Démonstration en s'appuyant sur la périodisation du spectre après échantillonnage et tracé de la représentation spectrale.

# Correction du TD n°5

## Repliement de spectre

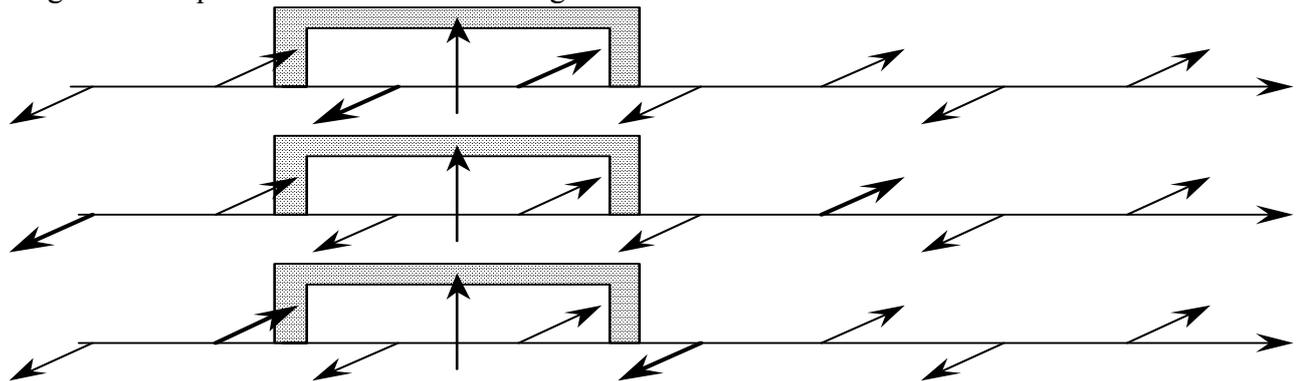


## Fréquences apparentes



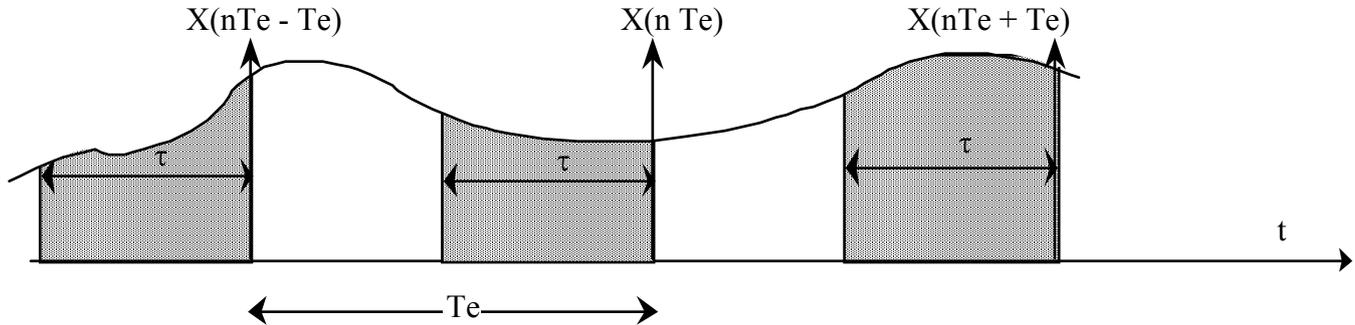
## Tracé de spectre

En gras les fréquences avant échantillonnage



### Echantillonneur moyennneur

Un système réel d'échantillonnage ne se comporte pas comme un échantillonneur idéal. Chaque prise d'échantillon est réalisée par une impulsion  $h(t)$  de durée finie  $\tau$  et de forme qui dépend de la fonction d'appareil de l'échantillonneur. La seule hypothèse est que la durée  $\tau$  de cette impulsion est inférieure à la période d'échantillonnage  $T_e$ .



On considère alors que  $X(k \cdot T_e) = \int_{kT_e - \tau}^{kT_e} x(t) h(k \cdot T_e - t) dt = x \otimes h(kT_e)$  est la mesure au temps  $k \cdot T_e$ .

Cet échantillon est alors considéré comme étant la valeur  $k$  de la série  $\{x_n\}$  représentant la valeur du signal à l'instant  $k \cdot T_e$ . On peut alors écrire :  $x(k \cdot T_e) = [x(t) \otimes h(t)] \delta(t - kT_e)$ . Tout se passe comme si le système échantillonnait de manière idéale une nouvelle fonction  $x(t) \otimes h(t)$ .

$$\{X_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(t) \otimes h(-t)] \cdot \delta(t - n \cdot T_e) = [x(t) \otimes h(-t)] \cdot \text{comb}_{T_e}(t)$$

En effectuant une transformation de Fourier des deux membres de l'égalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} F(\{x_n\}) &= F([x(t) \otimes h(-t)] \cdot \text{comb}_{T_e}(t)) = [F(x(t)) \cdot F(h(-t))] \otimes F_e \cdot \text{comb}_{F_e}(t) \\ &= [X(v) \cdot H(v)] \otimes F_e \cdot \text{comb}_{F_e}(t) \end{aligned}$$

Nous prenons comme exemple d'échantillonnage avec une fonction d'appareil non idéale, le cas où la prise d'échantillon correspond à un moyennage ou une intégration du signal pendant une durée  $\tau$  (nous pensons à la charge d'une capacité par un courant par exemple). La fonction  $h(t)$  vaut  $\text{rect}_{\tau}(t - \tau/2)$ . Donc tout se passe comme si la réponse en fréquence  $X(v)$  était remplacée par la réponse

$$X_0(v) = X(v) \cdot H(v) = X(v) \cdot \text{Sinc}(\pi v \tau) \cdot \exp(-\pi j v \tau)$$

Le rapport des modules des réponses en fréquence vaut donc  $|\text{Sinc}(\pi v \tau)|$  et le déphasage vaut  $-\pi v \tau$ . Nous appelons  $\alpha$  le facteur de suréchantillonnage  $\frac{F_e}{2 \cdot F_{\max}}$  et  $\lambda$  le rapport entre la durée  $\tau$  de l'impulsion et la durée  $T_e$  de la période d'échantillonnage. On veut que la variation d'amplitude soit inférieure à 1%.

$$|\text{Sinc}(\pi \cdot F_{\max} \cdot \tau)| = |\text{Sinc}(\pi \frac{F_e}{2 \alpha} \lambda T_e)| = |\text{Sinc}(\pi \frac{\lambda}{2 \alpha})| > 0,99 \quad \text{Or } \text{sinc}(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \quad \frac{\lambda}{2 \alpha} < 0,08$$

Si que le facteur de suréchantillonnage  $\alpha = 1$ , la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  est juste égale à  $2 \cdot F_{\max}$ , alors la durée de l'impulsion ne doit pas dépasser 16% de la durée de la période d'échantillonnage.

Pour le même signal, on peut décider de prendre un suréchantillonnage  $\alpha$  de 5, c'est-à-dire  $F_e = 10 \cdot F_{\max}$ , alors on peut prendre une largeur d'impulsion égale à 80% de la période. Dans les deux cas, la durée  $\tau$  autorisée est identique et vaut :

$$\tau = \frac{16\%}{2 \cdot F_{\max}} = \frac{80\%}{10 \cdot F_{\max}}$$

Ceci montre que l'effet de la largeur d'impulsion n'est pas négligeable. De même, le déphasage  $\phi$  vaut  $-\pi v \tau$  radians, donc  $180 v \tau$  degrés. Associé à une précision de 1% en module, il correspond un déphasage linéaire qui est maximum aussi pour  $F_{\max}$  et qui donne  $\phi_{\max} = 180 \cdot \frac{\lambda}{2 \alpha} = 14,4$  degrés.

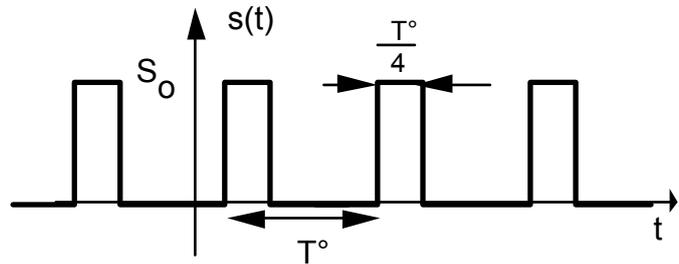


## TD6 - Corrélation

### 1 - Fonctions d'autocorrélation

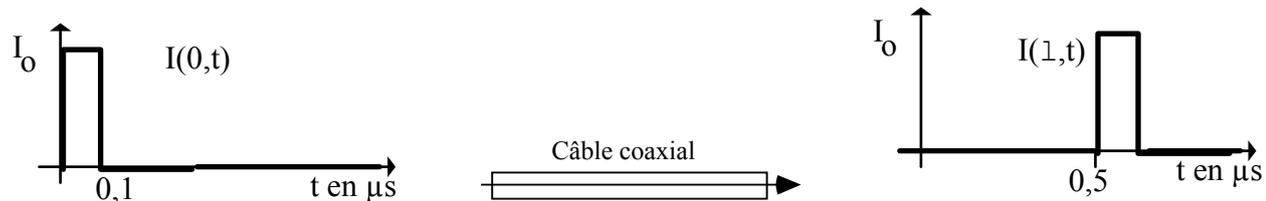
Calculer la fonction d'autocorrélation  $C_{ss}(t)$  du signal  $s(t)$  décrit ci-contre.

Que se passe-t-il si on se trompe sur  $T^\circ$  ?



### 2 - Intercorrélations entre 2 signaux

Nous désirons déterminer la vitesse de propagation d'une impulsion dans un câble coaxial sans perte. L'intensité est alors une fonction de la longueur de câble traversé  $l$  et du temps. Les mesures relevées donnent l'évolution de cette intensité pour  $l=0$  : le signal en entrée du câble et  $l=100\text{m}$  en fonction du temps.

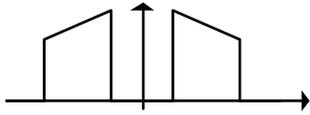


- Calculer la fonction d'intercorrélation entre  $I(0\text{m}, t)$  et  $I(100\text{m}, t)$ .
- Montrer que la détection du maximum permet de calculer la vitesse de propagation dans le câble. Calculer cette vitesse.
- On veut étudier la robustesse au bruit d'un traitement de corrélation entre deux signaux. Il existe une relation entre blancheur du bruit et autocorrélation du bruit. Rappeler cette relation et expliquer comment on se sert de cette relation en présence de bruit important sur un signal. [On verra en TP une application de ce mécanisme].

# TD 7 Modulation Détection

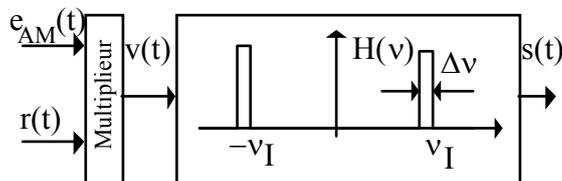
## 1 - Modulation d'amplitude

Le signal reçu en "longues ondes" sur un poste de radio est un signal modulé en amplitude donné par l'expression  $e_{AM}(t)=(\alpha.e(t)+\beta).\cos(2\pi v^{\circ}t)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  constants.



$e(t)$  est un signal "audio" dont le spectre en fréquence s'étend de  $v_B = 50\text{Hz}$  à  $v_H = 5\text{kHz}$ . La transformée de Fourier de ce signal entre dans le gabarit donné à la figure ci-contre.

$-v_H \quad -v_B \quad 0 \quad v_B \quad v_H$



$v^{\circ}$  est la fréquence de la porteuse et varie de 150 kHz à 300 kHz suivant les stations de radio.

Après réception, le signal  $e_{AM}(t)$  passe dans le changeur de fréquence suivant : il est d'abord multiplié à un signal  $r(t) = \cos(2\pi v_L t)$  dont la fréquence  $v_L$  est réglée par le bouton de recherche des stations; puis ce signal  $v(t)=r(t).e_{AM}(t)$  passe dans un filtre idéal accordé sur la fréquence intermédiaire  $v_I=455$  kHz et dont la bande passante est  $\Delta v = 20$  kHz. On appelle  $s(t)$  le signal à la sortie du changeur.

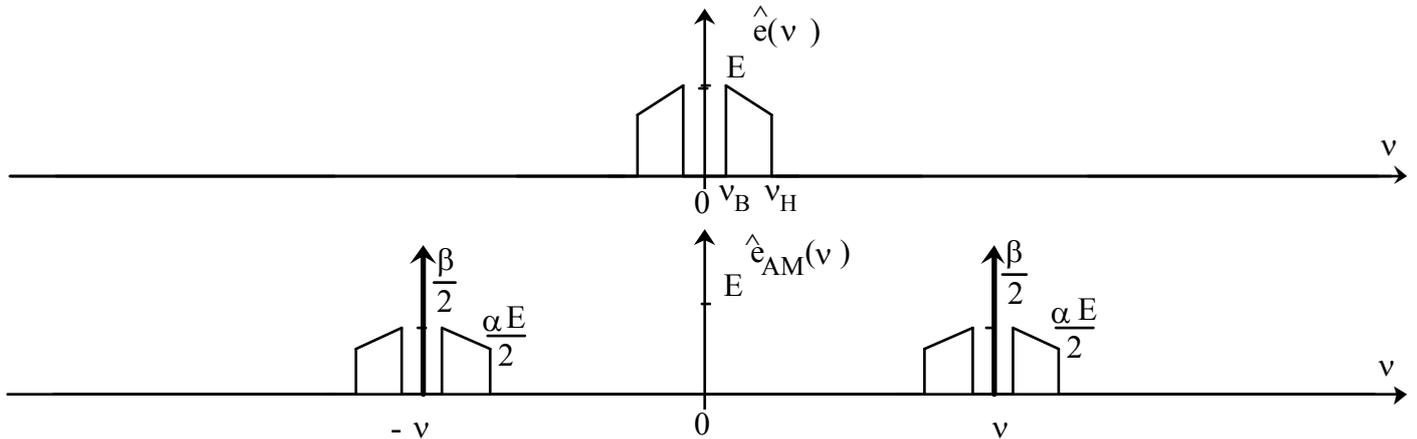
- 1• Déterminer et tracer le spectre en fréquence de  $e_{AM}(t)$  et  $v(t)$ .
- 2• Pour  $v^{\circ} = 162$  kHz (ex France Inter), quelles valeurs peut-on donner à  $v_L$  pour obtenir le maximum de signal en  $s(t)$  ?
- 3• Montrer que le signal  $s(t)$  est alors un signal modulé en amplitude par  $e(t)$  et de porteuse  $v_I = 455$  kHz.
- 4• Déterminer la plage de réglage de  $v_L$  pour obtenir toutes les stations de la plage "longues ondes"  $v^{\circ} \in [150\text{kHz}, 300\text{kHz}]$ .

## Correction du TD Modulation d'amplitude

### Déterminer $e_{AM}(t)$ et tracer le spectre en fréquence

$$e_{AM}(t) = (\alpha \cdot e(t) + \beta) \cdot \cos(2\pi\nu^\circ t)$$

$$F[e_{AM}(t)] = F[(\alpha \cdot e(t) + \beta)] \otimes F[\cos(2\pi\nu^\circ t)] = [\alpha \cdot F[e(t)] + \beta \cdot \delta(\nu)] \otimes \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu^\circ) + \delta(\nu + \nu^\circ)]$$



### Déterminer $v(t)$ et tracer le spectre en fréquence

$$v(t) = e_{AM}(t) \cdot \cos(2\pi\nu_L t) = (\alpha \cdot e(t) + \beta) \cdot \cos(2\pi\nu^\circ t) \cdot \cos(2\pi\nu_L t)$$

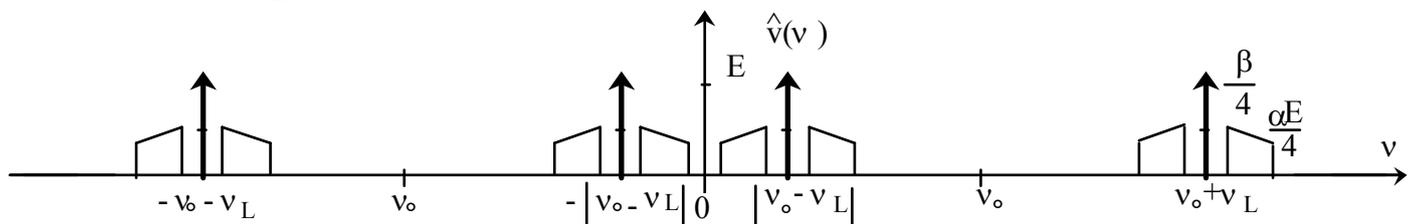
$$= (\alpha \cdot e(t) + \beta) \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\pi\nu^\circ t + 2\pi\nu_L t) + \cos(2\pi\nu^\circ t - 2\pi\nu_L t)]$$

$$F[v(t)] = [\alpha \cdot F[e(t)] + \beta \cdot \delta(\nu)] \otimes \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu^\circ) + \delta(\nu + \nu^\circ)] \square \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_L) + \delta(\nu + \nu_L)]$$

$$= [\alpha \cdot F[e(t)] + \beta \cdot \delta(\nu)] \otimes \frac{1}{4} [\delta(\nu - \nu^\circ - \nu_L) + \delta(\nu + \nu^\circ - \nu_L) + \delta(\nu - \nu^\circ + \nu_L) + \delta(\nu + \nu^\circ + \nu_L)]$$

On retrouve le même résultat en utilisant dans la représentation temporelle la formule  $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

ou en convoluant dans la représentation fréquentielle par des couples de Dirac.



### Comment choisir $\nu_L$ ?

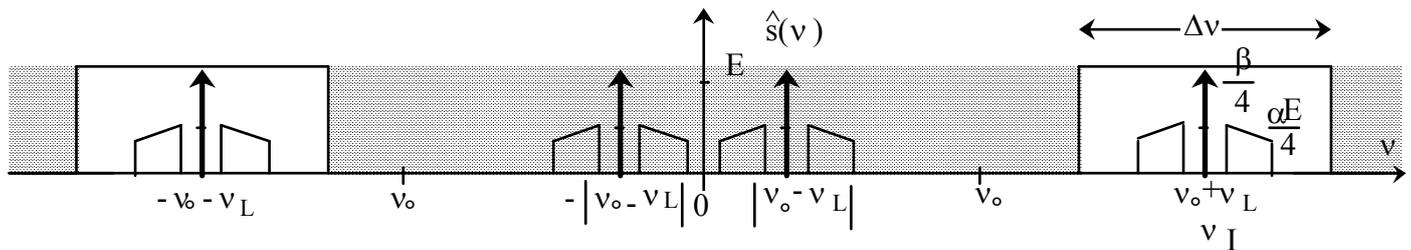
Le signal  $s(t)$  est obtenu par filtrage par un filtre idéal centré à la fréquence  $\nu_I = 455$  kHz et de largeur  $\Delta\nu = 20$  kHz à partir de l'entrée  $v(t)$ . La réponse en fréquence de ce filtre est donc :

$$H(\nu) = \text{rect}_{\Delta\nu}(\nu - \nu_I) + \text{rect}_{\Delta\nu}(\nu + \nu_I)$$

Nous rappelons que dans la représentation en fréquence, l'action d'un filtre linéaire sur la sortie correspond au produit simple des représentations en fréquence de l'entrée et de la transmittance du filtre.

$$F[s(t)] = F[v(t)] \cdot H(v)$$

Vu la largeur de filtre qui est donné, le signal sera maximal dans deux cas : soit pour  $v_L = v_I - v^\circ$  ; soit pour  $v_L = v_I + v^\circ$ . Réponse  $v^\circ = 162 \text{ kHz}$  ;  $v_I = 455 \text{ kHz}$  ; alors  $v_L = 293 \text{ kHz}$  ou  $v_L = 617 \text{ kHz}$ . En effet c'est dans ce cas que l'énergie contenu dans le spectre résultant (obtenu comme le produit simple des spectres de l'entrée et du filtre) est maximale. Or nous savons par le théorème de Parseval que les deux représentations temporelles et fréquentielles ont la même énergie. C'est donc aussi dans ce cas que l'énergie du signal temporel  $s(t)$  est maximale.



### Déterminer le signal $s(t)$

Dans les deux cas décrits ci-dessus soit pour  $v_L = v_I - v^\circ$  , soit pour  $v_L = v_I + v^\circ$ .

$$\begin{aligned} F[s(t)] &= F[v(t)] \cdot H(v) \\ &= F[(\alpha \cdot e(t) + \beta)] \otimes \frac{1}{4} \left[ \delta(v - v^\circ - v_L) + \delta(v + v^\circ - v_L) + \delta(v - v^\circ + v_L) + \delta(v + v^\circ + v_L) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \text{rect}_{\Delta v}(v - v_I) + \text{rect}_{\Delta v}(v + v_I) \right] \end{aligned}$$

cas où  $v_L = v_I - v^\circ$ . Seules les deux composantes en sortie correspondant à des valeurs non nulles du filtre idéal sont non nulles. En supposant que dans la bande passante du filtre,  $H(v)$  vaut 1, alors le résultat est le suivant :

$$\begin{aligned} F[s(t)] &= F[(\alpha \cdot e(t) + \beta)] \otimes \frac{1}{4} \left[ \delta(v - v^\circ - v_L) + \delta(v + v^\circ + v_L) \right] \cdot \left[ \text{rect}_{\Delta v}(v - v_I) + \text{rect}_{\Delta v}(v + v_I) \right] \\ &= F[(\alpha \cdot e(t) + \beta)] \otimes \frac{1}{4} \left[ \delta(v - v^\circ - v_L) + \delta(v + v^\circ + v_L) \right] \\ &= F[(\alpha \cdot e(t) + \beta)] \otimes \frac{1}{4} \left[ \delta(v - v_I) + \delta(v + v_I) \right] \end{aligned}$$

$$s(t) = (\alpha \cdot e(t) + \beta) \cdot \frac{1}{2} \cos(2\pi v_I t) \text{ Il s'agit donc d'un signal modulé en amplitude de fréquence } 455 \text{ kHz.}$$

### Plage de réglage "longues ondes" $v^\circ \in [150\text{kHz}, 300\text{kHz}]$ .

La relation  $v_L = v_I - v^\circ$  donne la plage de réglage  $v_L \in [305 \text{ kHz}, 155 \text{ kHz}]$