Rattrapage de Math2

L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits.

Exercice 1 (04 points)

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$.
2. Calculer l'intégarle $J_1 = \displaystyle\int \frac{2x^4}{1+x^2}dx$. En déduire la valeur de l'intégrale $J_2 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2+1)dx$.

Exercice 2 (06 points)

Soit $m \in \mathbb{R}^\star$. On considère l'équation différentielle

$$my'' + 2my' - 4y = e^{2x} \qquad (E_m).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E_m).
2. On pose $m = -4$.
   (a) Déterminer une solution particulière y_p de l'équation (E_{-4}).
   (b) Déduire la solution générale de (E_{-4}).

Exercice 3 (05 points)

On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$

1. Écrire le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous forme matricielle $A \cdot X = b$.
2. Calculer A^2 puis déduire A^{-1}.
3. En déduire la solution du système $(\mathcal{S})$.
4. Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire $(\mathcal{S})$.

Exercice 4 (05 points)

1. En utilisant les opérations élémentaires, montrer que

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

2. Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Pour quelles valeurs du réel m, la matrice A_m est inversible ?
$b)$ Calculer l'inverse de la matrice A_0.

Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice 1. (4 points)

1. On a : $cos^3(x) = cos^2(x)cos(x) = (1 - sin^2(x))cos(x)$. D'où,

$$I_1 = \int \frac{(1 - sin^2(x))cos(x)}{sin^5(x)} dx.$$

Posons le changement de variable : $t = sin(x) \Rightarrow dt = cos(x)dx.$ **(0.5pt)**

On obtient,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1-t^2}{t^5} dt \\ &= \int (t^{-5} - t^{-3}) dt \\ &= \frac{-1}{4} t^{-4} + \frac{1}{2} t^{-2} + c. \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

Donc,

$$I_1 = \frac{-1}{4sin^4(x)} + \frac{1}{2sin^2(x)} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

2. On effectue la division euclidienne, $\frac{2x^4}{x^2+1} = 2x^2 - 2 + \frac{2}{x^2+1}$ **(0.5pt)**. Alors,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \left(2x^2 - 2 + \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2arctan(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

3. On intègre par partie, posons :

$$\begin{aligned} u'(x) = 3x^2 &\Rightarrow u(x) = x^3 \\ v(x) = ln(x^2+1) &\Rightarrow v'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} J_2 &= \left[x^3 ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1} dx \\ &= \left[x^3 ln(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= 3\sqrt{3}ln(4) - 2\left[\frac{1}{3}x^3 - x + arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}} \qquad \textbf{(0.5pt)} \\ &= 3\sqrt{3}ln(4) - 2arctan(\sqrt{3}). \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2. (6 points)

Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle

$$my'' + 2my' - 4y = e^{2x}. \qquad (E_m)$$

1. **Résolution de l'équation homogène associée à** E_m.

L'équation caractéristique associée est donnée par

$$mr^2 + 2mr - 4 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = 4m^2 + 16m = 4m(m+4)$. **(0.5pt)**.

(a) Si $m \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ $(\Delta > 0)$, l'équation admet deux solutions réelles

$$r_1 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 + 16m}}{2m} \quad et \quad r_2 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 + 16m}}{2m}. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Donc, la solution générale de équation homogène est

$$y_H = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(b) Si $m \in]-4, 0[$ $(\Delta < 0)$, l'équation admet deux solutions complexes

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-2m - i\sqrt{-4m^2 - 16m}}{2m} = -1 + i\frac{\sqrt{-4m^2 - 16m}}{2m} \quad \textbf{(0.25pt)} \\ r_2 &= \frac{-2m + i\sqrt{-4m^2 - 16m}}{2m} = -1 - i\frac{\sqrt{-4m^2 - 16m}}{2m}. \quad \textbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

On pose $\alpha = \frac{\sqrt{-4m^2 - 16m}}{2m}$. Alors, la solution générale de équation homogène est

$$y_H = (\lambda_1 cos(\alpha x) + \lambda_2 sin(\alpha x))e^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(c) Si $m = -4$ $(\Delta = 0)$, dans ce cas la solution est

$$y_H = \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 e^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

2. **On pose** $m = -4$**. Déterminons la solution générale de** (E_{-4})**.**

(a) La solution générale de l'équation homogène associée est $y_H = \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 e^{-x}$.

(b) Appliquons la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière.

Soit y_p une solution particulière de la forme : $y_p = \lambda_1(x) x e^{-x} + \lambda_2(x) e^{-x}$.

On a

$$\begin{cases} \lambda_1'(x) x e^{-x} & + & \lambda_2'(x) e^{-x} & = & 0 \\ \lambda_1'(x)(1-x)e^{-x} & - & \lambda_2'(x)e^{-x} & = & e^{2x} \end{cases} \qquad \textbf{(1pt)}$$

donc,

$$\lambda_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} xe^{-x} & e^{-x} \\ (1-x)e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{x}}{-e^{-2x}} = e^{3x} \Rightarrow \lambda_1(x) = \frac{1}{3}e^{3x}. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

et

$$\lambda_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} xe^{-x} & 0 \\ (1-x)e^{-x} & e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} xe^{-x} & e^{-x} \\ (1-x)e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{xe^{x}}{-e^{-2x}} = -xe^{3x}.$$

On intègre par partie, posons $u^{'}(x) = e^{3x} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ et $v(x) = -x \Rightarrow v^{'}(x) = -1$. Donc

$$\lambda_2(x) \quad = \quad \frac{-1}{3}xe^{3x} + \frac{1}{3}\int e^{3x}dx.$$

On déduit que : $\lambda_2(x) = \frac{-1}{3}xe^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x}$. **(1pt)**.

Une solution particulière de l'équation différentielle est donnée par :

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{2x} - \frac{1}{3}xe^{2x} + \frac{1}{9}xe^{2x} = \frac{1}{9}xe^{2x}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y_G = \lambda_1 xe^{-x} + \lambda_2 e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Exercice 3. (5 points)

1. **Ecriture matricielle.**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

2. **Calculer A^2.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I. \qquad \textbf{(1pt)}$$

Comme $A^2 = 9I$ alors $A(\frac{1}{9}A) = (\frac{1}{9}A)A = I$ donc $A^{-1} = \frac{1}{9}A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

3. **Résolution du système par la matrice inverse.**

On a $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

D'où, $\mathcal{S} = \{(1,1,1)\}$. **(0.5pt)**

4. **Résolution par la méthode du pivot de Gauss.**

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sur la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{-3}{2}} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

On obtient un système équivalent à (S) compatible,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & \frac{-3}{2}y & - & 3z & = & \frac{3}{2} \\ & & & & 9z & = & 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

D'où, $\mathcal{S} = \{(1,1,1)\}$. **(1pt)**

Exercice 4. (5 points)

1.

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & bc \\ c & c & c^2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(car les colonnes 1 et 2 sont colinéaires)} \quad \textbf{(1pt)}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{array}{c} \begin{matrix} & & c_3 - c_2 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c) \qquad \textbf{(1.5pt)}$$

3. Soit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}.$$

(a) On a $det(A_m) = -2(m-1)(m+1)$ **(1pt)**. Donc la matrice A_m est inversible si et seulement si $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. **(0.5pt)**

(b) Posons $m = 0$.

On a $A_0^{-1} = \frac{1}{det(A_0)}\, {}^t com(A_{0)}$ avec $det(A_0) = 2$ et

$$com(A_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ {}^t com(A_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Ainsi,

$$A_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$