Exercice 1 : Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1} \qquad F_2(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}$$

Exercice 2 : En utilisant la division Euclidienne, simplifier les fractions rationnelles suivantes :

$$F_3(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \qquad F_4(x) = \frac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}$$

Exercice 3 : Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F_5(x) = F_4(x) = \frac{5x^3 + x^2 - 22x - 1}{x^3 - 4x}, \qquad F_6(x) = F_2(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}$$

$$F_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}, \qquad F_8(x) = \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

Solutions

Exercice 1 :

$$F_1(x) = \frac{x - 2}{(x+1)(x^2+1)}, \qquad F_2(x) = \frac{x - 3}{(x-2)(x^2+1)}$$

Exercice 2 :

$$F_3(x) = 2x + 9 + \frac{15x - 8}{x^2 - 2x + 1} \qquad F_4(x) = 5 + \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 4x}$$

Exercice 3 :

$$F_5(x) = 5 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8(x-2)} + \frac{7}{8(x+2)}, \qquad F_6(x) = \frac{-1}{5(x-2)} + \frac{x + 7}{5(x^2+1)}$$

$$F_7(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+2}, \qquad F_8(x) = \frac{1}{5x} + \frac{\frac{-1}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - 4x + 5}$$

Sommes de Riemann et Intégrales définies

Exercice 1 (TD)

1) Soit la somme $S_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

a) Écrire S_n sous la forme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$, où f est une fonction à préciser.

b) En utilisant les sommes de Riemann, déterminer la limite de S_n.

Exercice 2 (TD)

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x+2| - |x-1|$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3,3]$.

Quelques procédés du calcul intégral

Exercice 3 [Primitives immédiates (Cours+TD)]

Calculer directement les intégrales suivantes

$$I = \int \left(2t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt,\ J = \int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx,\ K = \int \frac{t}{1+t^4}\,dt,\ L = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Application : Déduire les valeurs des intégrales définies suivantes : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx$.

Exercice 4 [Intégration par parties (Cours+TD)]

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int (x^2+1)e^x\,dx,\ I_2 = \int \arctan x\,dx,\ I_3 = \int e^x \sin(2x)\,dx,\ I_4 = \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\ (n \in \mathbb{N}^\star),$$

$$I_5 = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Exercice 5 [Changement de variable (Cours+TD)]

En utilisant le changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes

$$J_1 = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\ (t = \ln x),\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx\ (t = sinx),\ J_3 = \int \sqrt{x^2+1}\,dx\ (y = \sinh x),$$

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx\,(y = \tan x),\ J_5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx\,(y = \sqrt{x+1}).$$

Exercice 6 (TD)

On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$.

1) Calculer $I+J$.

2) Dans I, en posant le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 7 [Fonctions rationnelles (Cours+TD)]

1) En utilsant la décomposition en éléments simples, calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{5x^3+x^2-22x-1}{x^3-4x}\,dx,\ \int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx,\ \int \frac{1}{x(x^2-4x+5)}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx\ (t=\tan(\frac{x}{2})),\ \int \frac{1+\sinh x}{2+\cosh x}\,dx\ (t=th(\frac{x}{2})),\ \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx\ (t=\sqrt{x}),$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\left(\sin^2 x-4\sin x+5\right)}\,dx\ (y=\sin x).$$

Exercice 8 [Linéarisation (Cours+TD)]

1) En utilisant la linéarisation, calculer les intégrales suivantes

$$\int \sin^4 x\,dx,\ \int \cos^4 x\,\sin^2 x\,dx,\ \int \cosh^2 x\,dx.$$

Exercice 9 [Application au calcul des intégrales (Cours)]

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y=x^2$, $y=x$, puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.

2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y=x+1$, $y=-x+1$ et $x=2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

1) Écrire les expressions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ **(TD)**.

$a)$ $U_n = 3+9+27+81+\cdots+6561$, $b)$ $V_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

2) Soit la somme $R_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{n}$.

$a)$ Écrire R_n en utilisant le symbole $\sum$.

$b)$ Écrire R_n sous la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$, où f est une fonction à préciser.

$c)$ En utilisant les sommes de Riemann, déterminer la limite de R_n.

3) Mêmes questions pour la somme $R_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots\frac{n}{n^2+n^2}$.

Exercice 2

Soit la fonction en escaliers définie par : $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x\in[-1,1[\\ -1 & \text{si } x\in[1,3[\\ 2 & \text{si } x\in[3,4[\end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2) Calculer les intégrales $\int_1^4 f(x)\,dx$, $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$.

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-1,4]$.

Exercice 3

Calculer à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,\ \int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{x},\ \int \frac{\sqrt{2x-3}}{1+2\sqrt{2x-3}}\,dx,\ \int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Exercice 4

1) Intégrer les fonctions rationnelles suivantes

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx,\ \int \frac{x+2}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx,\ \int \frac{2x+1}{x^4 4x^2+3}\,dx,\ \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{dx}{\sinh x+2\cosh x},\ \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx,\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx,\ \frac{\cosh^3 x}{2+3\sinh x}\,dx.$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes

$$\int \cos(2x)\cos x\,dx,\ \int \sin(3x)\sin(2x)\,dx,\ \int \sin(x)\cos(5x)\,dx,\ \int \sinh^6 x\,dx,\ \int \cos^4 x\sin^6 x\,dx.$$

Exercice 6

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y=2x$, $y=3x$ et $y=\dfrac{1}{x^2}$,
puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.

2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y=4x$, $y=-2x$ et $x=4$.

Équations différentielles du premier ordre linéaires

Exercice 1 (Cours+TD)
Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle de résolution

1. $(2+x)y' = -y$

2. $ch(x)y' - sh(x)y = 1$

3. $xln(x)y' - y = 3\left(xln(x)\right)^2$

4. $(x^2-1)y' + xy = -1$

5. $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2+1$ avec $y(0) = 3$

Exercice 2 (Cours+TD)

1. Donner une équation différentielle linéaire du premier ordre où f définie par
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \qquad \text{est solution.}$$
2. Trouver une courbe du plan passant par le point $M(0,3)$ et dont la pente de la tangente au point (x,y) est de $\dfrac{2y}{x}$.

Exercice 3 (TD)
Soit l'équation différentielle suivante :
$$2y' - y = -x^2 - x. \tag{1}$$

1. Déterminer les réels a, b et c pour que $y = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de (1).
2. Résoudre l'équation (1), puis déduire la solution qui vérifie $y(-1) = 5$.

Exercice 4 (Cours)
Soit l'équation différentielle suivante :
$$y' - \frac{1}{x}y - y^2 = -9x^2. \tag{2}$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (2).
2. Montrer que le changement de fonction : $y(x) = y_0 - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (2) en l'équation différentielle linéaire suivante
$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z = 1. \tag{3}$$
3. Résoudre l'équation différentielle (3) sur $]0,+\infty[$. En déduire la solution de (2) définies sur $]0,+\infty[$.

Équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants

Exercice 5 (Cours+TD)

1. Donner une équation différentielle homogène du second ordre qui admet comme solutions les fonctions suivantes :
$$e^{2x} \text{ et } e^{-x}.$$
2. Trouver la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ telle que $f''(x) = 4 + \frac{2}{x^2}$ et la pente de la tangente à la courbe de f au point $P(1, 2)$ est égale à 3.

Exercice 6 (Cours+TD)
Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle de résolution

1. $y'' - 4y' + 5y = 5$
2. $y'' - 2y' + y = \sqrt{x}e^x$
3. $y'' - 4y = sin(x)$
4. $y'' + 2y' + my = m^2$
5. $y'' + y = \dfrac{1}{cos(x)}$
6. $y'' + y' = 4x^2e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$

Exercice 7 (Cours)
Un condensateur de capacite C se décharge dans une resistance R . On rappelle que la charge Q de ce condensateur verifie l'équation differentielle suivante :

$$R \times CQ'(t) + Q(t) = 0$$

$Q(t)$ est la charge du condensateur à l'instant t.

1. Quelle est la charge du condensateur à l'instant t, la charge initiale etant q_0 au temps $t = 0$?
2. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminue de moitie, le condensateur de capacite $C = 2\mu F$ se déchargeant dans une resistance $R = 10^5\Omega$?

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $xln(x)y' = (3ln(x) + 1)y$
2. $yy' = e^{x-y}$
3. $xln(x)y' - y = 3x^2ln^2(x)$
4. $(\sin^3 x)y' = (2\cos x)y$
5. $(x^2 - 1)y' + xy + 1 = 0$
6. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ avec $y(0) = 3$

Exercice 8. A l'aide d'un changement de fonction, résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $y' = \dfrac{x + y}{x}$
2. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$, on pose $z = (1+e^x)y$

4. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, on pose $z = xy$

Exercice 9.

1. Donner une équation différentielle f est solution
$$f(x) = 1 + \frac{e^x}{1+x^2}.$$
2. Donner une équation différentielle ayant comme solutions
$$e^x \text{ et } xe^x, \quad e^{2x}cos(x) \text{ et } e^{2x}sin(x).$$

Exercice 10. Soit l'équation différentielle suivante :
$$y' + y = e^{-x}. \tag{4}$$

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(x) = axe^{-x}$ soit une solution particulière de (4).
2. Résoudre l'équation différentielle (4).
3. Déduire la solution qui vérifie $y(0) = 2$.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle suivante :
$$y'' + \frac{2}{tan(x)}y' - y = 0. \tag{5}$$

1. Montrer que le changement de fonction : $z = y' + \frac{1}{tan(x)}y$ transforme l'équation (5) en l'équation différentielle
$$z' + \frac{1}{tan(x)}z = 0. \tag{6}$$
2. Résoudre l'équation différentielle (6).
3. En déduire les solutions de (5).
4. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?

Faculté de Mathématiques | Coordination du module Maths 1 | Année Universitaire
USTHB | Série d'exercices N° 6 | 2018- 2019
1ère année Lic. ST | Calcul matriciel, déterminants et systèmes linéaires | Nombre de Séances :3

Calcul matriciel

Exercice 1 ***(Cours)*** *Soient les matrices suivantes*

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-1&0&3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Calculer lorsque c'est possible : $A+B$, $B+F$, AB, BA, CD, DC, ED, DE, $(AB)C$, $A(BC)$, $(B+F)^2$ *et* B^2+F^2+2BF, ${}^tA$, ${}^t({}^tA)$.

Exercice 2 ***(TD)*** *Calculer dans les cas suivants* A^2, A^3, A^4 *puis déduire* A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 3 ***(TD)*** *On donne les matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&6\\6&-8&12\\3&-3&4\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* A^2 *puis montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que* $A^2=aA+bI$.
2. *En déduire que A est inversible et calculer* A^{-1}.

Exercice 4 ***(Cours + TD)***

1. *Déterminer par échelonnement le rang des matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&1&-2\\0&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&\alpha&1\\\alpha&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&1&4&5\\-1&3&2&1\\-1&1&4&-2\end{pmatrix}.$$

2. *Calculer* A^{-1} *par la méthode de Gauss-Jordan.*

Déterminants

Exercice 5 ***(Cours + TD)*** *Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&1&-2\\0&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&\alpha&1\\\alpha&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 6 ***(Cours + TD)***

1. **(Cours)** *Montrer que :*

   (a) $D_1=\begin{vmatrix}5&10&20\\1&2&3\\3&0&3\end{vmatrix}$ *est divisible par 15.*

(b) $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.

2. **(TD)** *Montrer sans calculs :*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 7 \\ -1 & 8 & -2 & 12 & -16 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4).$$

Exercice 7 ***(TD)*** *Soit la matrice* $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

1. *Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?*
2. *Calculer A_α^{-1} pour $\alpha = 0$.*

Exercice 8 ***(TD)*** *Soit la matrice $A(t)$ définie par :* $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $A(t)A(s) = A(t+s)$.*
2. *La matrice $A(t)$ est-elle inversible.*
3. *Calculer $A^n(t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 9 ***(Cours +TD)*** *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui calculer leur inverse en utilisant la matrice des cofacteurs puis la méthode de Gauss-Jordan.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Systèmes linéaires

Exercice 10 ***(Cours + TD)*** *Mettre sous forme matricielle puis résoudre par la méthode de Cramer ou la méthode de Gauss les systèmes linéaires suivants et préciser dans chaque cas si le système est de Cramer :*

$$(S_1) \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ x-2y-3z=-1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y-az=2 \\ x-ay+z=1 \end{cases} \; (a \in \mathbb{R}) \quad (S_3) \begin{cases} 2x+4y-6z-2t=2 \\ 3x+6y-7z+4t=2 \\ 5x+10y-11z+6t=3 \end{cases}$$

Exercice 11 ***(TD)*** *On considère la matrice M définie par* $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -m & m & m \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que M est inversible, $\forall m \in \mathbb{R}^*$ puis calculer son inverse M^{-1}.*
2. *En déduire les solutions du système :* $(S) \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ -mx+my+mz=-m \\ x+4y+3z=1 \end{cases}$

TD Math : ST_L1_S2 : 2018/19
U.S.T.H.B

Serie N°1 : de Calcul de l'intégral

Exercice 1:

1)

On a: $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$

a) Ecrire Sn sous la forme: $\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{K=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$S_n=\sum_{K=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{K=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} \text{ avec } f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \text{ et } f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

b) Limite de Sn:

$\lim_{n\to+\infty} S_n = ?$

En utilisant les sommes de Riemann:

$$\lim \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)}_{W_n} = \int_a^b f(x)dx$$

En identifiant Wn avec Sn: on a:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{K=1}^{n} f\left(a+\frac{K}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{K}{n}\right)^2}$$

$b-a=1$; soit $a=0 \Rightarrow b=1$

$$f\left(a+\frac{K}{n}(b-a)\right) = f\left(\frac{K}{n}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{K}{n}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

donc: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1$

$= \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

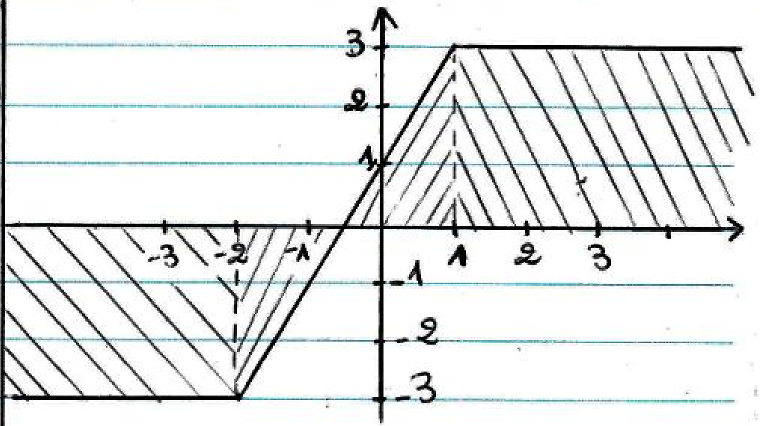
Exercice 2:

$f(x) = |x+2| - |x-1|$

1) Tracer la courbe représentatif de f.

On a:

x	$-\infty$ -2	-2 1	1 $+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$(x+2)$	$(x+2)$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$(x-1)$
$f(x)$	-3	$2x+1$	3



2) Calculer les intégrales $\int_{-3}^{0} f(x)dx$; $\int_{0}^{3} f(x)dx$

* $\int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx$

$= \int_{-3}^{-2} 3dx + \int_{-2}^{0}(2x+1)dx$

$= (-3x)\Big]_{-3}^{-2} + (x^2+x)\Big|_{-2}^{0}$

$= -3(-2-(-3)) + ((0)^2+(0)) - (-2^2+(-2))$

$\int_{-3}^{0} f(x)dx = -3-2 = -5$

* $\int_{0}^{3} (f(x))dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$

$= \int_{0}^{1}(2x+1)dx + \int_{1}^{3} 3dx$

$= (x^2+x)\Big|_0^1 + (3x)\Big|_1^3$

$= ((1)^2+1) - ((0)^2+(0)) + (3(3)) - (3(1))$

$\int_{0}^{3} f(x)dx = 2+6 = 8$

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3,3]$:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$:

Si $[a,b] = [-3,3]$

$$M = \frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[\int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx\right]$$

$$M = \frac{1}{6}\,[-5+8] = \frac{1}{2}$$

Calculées dans ②.

Exercice 3

Calculer directement les intégrales:

$$* J = \int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)}{1+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx$$

$$J = \frac{1}{2}\ln|U(x)| + c, \text{ avec } U(x) = (1+\sin 2x)$$

$$J = \frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x) + C.$$

$$* K = \int \frac{t}{1+t^4}\,dt \text{ ; on pose: } y = t^2 \Rightarrow dy = 2t\,dt$$

$$K = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$K = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y) + C.$$

$$K = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C.$$

$$* L = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \text{ ; on pose } y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$$

$$L = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(y) + C = \arcsin(x^2) + C$$

Application: déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx = \left(\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)\right)\Big|_0^{\pi/6} = ⊛$$

$$⊛ = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \ln(1+\sin 2(0))\right]$$

$$⊛ = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice 4:

Calculer les intégrales par parties.

$$I_2 = \int \arctan(x)\,dx$$

on a cette formule:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$I_2 = \int$

$$g'(x) = 1 \longrightarrow g(x) = x$$

$$I_2 = x\cdot\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$I_2 = x\cdot\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$I_3 = \int e^x\cdot\sin(2x)\cdot dx$$

$$f(x) = \sin(2x) \longrightarrow f'(x) = 2\cos 2x$$

$$g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x$$

$$I_3 = e^x\cdot\sin(2x) - 2\underbrace{\int e^x\cos 2x\,dx}_{J}$$

$= ⊛$

On applique une 2^{eme} fois l'intégration par partie sur J :
on pose :
$f(x) = \cos 2x \longrightarrow f'(x) = -2\sin 2x$
$g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x$.

$J = e^x \cos 2x + 2 \underbrace{\int e^x \sin 2x \, dx}_{I_3}$

$J = e^x \cos 2x + 2 I_3$, on remplace dans ⊛

$I_3 = e^x . \sin(2x) - 2(e^x \cos 2x) - 4 I_3$
$5 I_3 = e^x . \sin(2x) - 2(e^x \cos 2x)$.
$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{5}\left[e^x . \sin(2x) - 2(e^x . \cos 2x)\right]$

$I_4 = \int_0^x x \sin(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

on pose : $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$
$g'(x) = \sin(nx) \longrightarrow g(x) = \frac{-1}{n}\cos(nx)$

$I_4 = \left(\frac{-x}{n}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx$

$I_4 = \left(\frac{-x}{n}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} + \left(\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right)\Big|_0^{\pi}$

$I_4 = \left(\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi)\right) - \left(\frac{-0}{n}\cancel{\cos(n\times 0)}\right) + \left(\frac{1}{n^2}\cancel{\sin(\pi n)}\right) - \left(\frac{1}{n^2}\cancel{\sin(n\times 0)}\right)$

$I_4 = \frac{-\pi}{n}(-1)^n$

avec $\cos(n\pi) = (-1)^n$
pour $n = 0 \Rightarrow \cos(0\times\pi) = \cos(0) = 1$
et $(-1)^0 = 1$
pour $n = 1 \Rightarrow \cos(1\times\pi) = \cos(\pi) = -1$
et $(-1)^1 = -1$
pour $n = 2 \Rightarrow \cos(2\times\pi) = \cos(2\pi) = 1$
et $(-1)^2 = 1$
etc .....

$I_5 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

avec : $\frac{(\sqrt{1-x^2})\times(\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1-x^2})} = \frac{1-x^2}{(\sqrt{1-x^2})}$

$I_5 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$I_5 = \arcsin(x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1/2} + \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{J}$

on applique sur J l'intégrale par parties

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$
$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} \longrightarrow g(x) = \sqrt{U(x)} = \sqrt{1-x^2}$

$J = x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1/2}^{1/2} - \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx}_{I_5}$

$J = x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1/2}^{1/2} - I_5$

Donc : $I_5 = \arcsin(x)\Big|_{-1/2}^{1/2} + x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1/2}^{1/2} - I_5$

$2I_5 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right]$

$2I_5 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{6}$

$I_5 = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 5 : Changement de variables.

Calculer les intégrales.

$J_2 = \int_0^{\pi/6} \cos^3(x)\,dx \quad (t = \sin x)$

$J_2 = \int_0^{\pi/6} \cos^2 x . \cos x . dx$

$J_2 = \int_0^{\pi/6} (1-\sin^2 x) . \cos(x) . dx$

avec : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

on pose $t = \sin(x) \longrightarrow dt = \cos(x)\,dx$

$J_2 = \int_0^{\pi/6} (1-\sin^2 x) . \cos(x) . dx = \int_0^{\pi/6} (1-t^2)\,dt$

$J_2 = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \left(\sin(x) - \frac{(\sin x)^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi/6}$

$J_2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{(\sin(\frac{\pi}{6}))^3}{3}\right) - \left(\sin(0) - \frac{\sin(0)^3}{3}\right)$

$J_2 = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} = \frac{11}{24}$

$* J_3 = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$, on pose : $x = \sinh(y)$

$\Longrightarrow dx = \operatorname{ch} y\, dy.$

$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1 \longrightarrow \operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$

$\operatorname{ch}^2 y = 1 + x^2$

$\Longrightarrow \operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2+1}$

$J_3 = \int \underbrace{\operatorname{ch} y}_{\sqrt{x^2+1}} \times \underbrace{\operatorname{ch} y\, dy}_{dx} = \int \operatorname{ch}^2 y\, dy$

$\operatorname{ch}^2 y = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{(e^y+e^{-y})^2}{(2)^2} = \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2e^y e^{-y}}{4}$

$= \frac{\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\operatorname{ch} 2y}{2} + \frac{1}{2}$

$\operatorname{ch}^2 y = \frac{\operatorname{ch} 2y + 1}{2}$ avec : $e^y . e^{-y} = e^{y-y} = e^0 = 1$

$\Longrightarrow J_3 = \int \frac{\operatorname{ch} 2y + 1}{2}\, dy$

$J_3 = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{ch} 2y . dy + \int 1 . dy\right]$

$J_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2y + y\right] + C$

$x = \operatorname{sh} y \longrightarrow \operatorname{sh}^{-1} x = y$

on a : $\sinh(2y) = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = \frac{(e^y + e^{-y})(e^y - e^{-y})}{2}$

avec : $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

et $a = e^y$ et $b = e^{-y}$, $a^2 = (e^y)^2 = e^{2y}$

$b^2 = (e^{-y})^2 = e^{-2y}$

$\Longrightarrow \sinh(2y) = \frac{2(e^y+e^{-y})}{2} \times \frac{(e^y - e^{-y})}{2}$

$\sinh(2y) = 2\cosh(y)\sinh(y).$

$= 2 \underset{\sinh(y)}{x} \underset{\cosh(y).}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Longrightarrow J_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x\sqrt{1+x^2}) + \operatorname{sh}^{-1} x\right] + C$

$J_3 = \frac{1}{2} x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}^{-1} x + C$

$J_4 = \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx \quad (y = \tan x).$

$dy = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \Longrightarrow dx = \cos^2 x\, dy$

si $x = 0 \longrightarrow y = \tan(0) = 0$

si $x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow y = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$J_4 = \int_0^1 e^y\, dy = e^y \Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e^1 - 1$

avec : $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx = \frac{e^y}{\cos^2 x}\cos^2 x\, dy$

$= e^y . dy.$

$J5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$, on pose : $y = \sqrt{x+1}$

$\rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1 \rightarrow dx = 2y\,dy$.

$J5 = \int \frac{y^2-1}{y} 2y\,dy = 2\int (y^2-1)\,dy$

$J5 = 2\left(\frac{y^3}{3} - y + C\right) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

Exercice 6 :

1) $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}} dx$

$+ \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}} dx$

$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos(x)}} dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx$

$I + J = x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2$

2) Dans I ; en posant le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, montrer que $I = \frac{\pi}{4}$.

$t = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t \rightarrow dx = -dt$

si $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{cases}$: on remplace dans I

$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}} (-dt)$.

$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\cos(t)}}{\sqrt{\cos(t)}+\sqrt{\sin(t)}} dt$

avec : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$

exemples :

$t = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos(0) = 1$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

même chose pour : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(t)}}{\sqrt{\cos(t)}+\sqrt{\sin(t)}} dt = J$

avec : $\int_0^{\pi/2} \boxed{X} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \boxed{X}$

$I + J = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 : Fonctions rationnelles :

1) Calculer les intégrales en utilisant la décomposition en elements simples.

1) $f(x) = \frac{5x^3 + x^2 - 22x - 1}{x^3 - 4x} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

de degré de $P(x)$ = de degré de $Q(x) = 3$

On utilise la division euclidienne,

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + x^2 - 22x - 1 & x^3 - 4x \\ \hline -\ 5x^3 - 20x & 5 \\ \hline 0 + x^2 - 2x - 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = 5 + \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 4x}$

soit $F(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x^2 - 4)}$

$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x)(x-2)(x+2)}$

$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-2)} + \frac{c}{(x+2)}$

* on multiplie $F(x)$ par x,

$$\Rightarrow x\,F(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-4x} \times x = x\,\frac{x^2-2x+1}{x(x^2-4)}$$

$$x\,F(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4} \ ; \ \lim_{x\to 0} x\,F(x) = \frac{-1}{4}$$

d'autre coté : $x\,F(x) = a + \frac{bx}{(x-2)} + \frac{cx}{(x+2)}$

$$\lim_{x\to 0} x\,F(x) = a \ \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

* on multiplie $F(x)$ par $(x-2)$:

$$(x-2)\,F(x) = \frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{(x^3-4x)}$$

$$(x-2)\,F(x) = \frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{(x^2+2x)(x-2)} = \frac{(x^2-2x+1)}{(x^2+2x)}$$

$$\lim_{x\to 2} (x-2)\,F(x) = \frac{1}{8}$$

d'autre coté : $(x-2)F(x) = \frac{a}{x}(x-2) + b + \frac{c(x-2)}{(x+2)}$

$$\lim_{x\to 2} (x-2)\,F(x) = b \Rightarrow b = \frac{1}{8}$$

* on multiplie $F(x)$ par $(x+2)$:

$$(x+2)\,F(x) = \frac{(x^2-2x+1)(x+2)}{(x^3-4x)}$$

$$(x+2)\,F(x) = \frac{(x^2-2x+1)(x+2)}{(x^2-2x)(x+2)} = \frac{(x^2-2x+1)}{(x^2-2x)}$$

$$\lim_{x\to -2} (x+2)F(x) = \frac{9}{8}$$

d'autre coté : $(x+2)\,F(x) = \frac{a(x+2)}{x} + \frac{b(x+2)}{(x-2)} + \frac{c(x+2)}{(x+2)}$

$$\lim_{x\to -2} (x+2)\,F(x) = c \Rightarrow c = \frac{9}{8}$$

$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{x-2} + \frac{9}{8}\,\frac{1}{x+2}$ donc :

$$f(x) = 5 + F(x) \rightarrow \int f(x)\,dx = \int 5\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{9}{8}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\rightarrow \int f(x)\,dx = 5x - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{9}{8}\ln|x+2| + C.$$

$$\int f(x) = \frac{1}{x(x^2-4x+5)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec : degré de $P(x)$ < degré de $Q(x)$.

$x^2-4x+5=0$; $\Delta = 4^2 - 4\times 5 = -4 < 0$

On décompose f de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2-4x+5)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2-4x+5)}$$

* on multiplie $f(x)$ par x :

$$x\,f(x) = \frac{x\times 1}{x(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x^2-4x+5)}$$

$$\lim_{x\to 0} x\,f(x) = \frac{1}{5}$$

d'autre coté : $x\,f(x) = a + \frac{x(bx+c)}{(x^2-4x+5)}$

$$\lim_{x\to 0} x\,f(x) = a \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(a + \frac{x^2b+xc}{x^2-4x+5}\right) = a+b$$

d'autre coté $\lim_{x\to +\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x^2-4x+5)} = 0$

$$\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b = -a = \frac{-1}{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{5}x + c}{(x^2-4x+5)}$$

pour $x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1(1^2-4(1)+5)} = \frac{1}{2}$

$$f(1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{1} + \frac{-\frac{1}{5}(1)+c}{(1^2-4(1)+5)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{4}{5}$$

donc : $+\frac{1}{5}\,\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{(x^2-4x+5)}$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{5}\int\frac{x-4}{(x^2-4x+5)}dx$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{(x^2-4x+5)}dx$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\left[\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx - \int\frac{4}{x^2-4x+5}dx\right]$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^2-4x+5) - 4J$$

$$J = \int\frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx$$

$$J = \int\frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(x-2)+C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^2-4x+5) - 4(\operatorname{arctg}(x-2)+C)$$

2) Calculer les intégrales :

$$I = \int\frac{1+sh(x)}{2+ch(x)}dx \quad \text{avec } t = th\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcth}(t) = \operatorname{arcth}\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$$

$$x = 2\operatorname{arcth}(t)$$

$$dx = \frac{2}{1-t^2}dt.$$

avec, $ch\,x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$; $sh\,x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$$\Rightarrow \frac{1+sh(x)}{2+ch(x)}dx = \frac{1+\frac{2t}{1-t^2}}{2+\frac{1+t^2}{1-t^2}}\times\frac{2}{1-t^2}dt$$

$$= \frac{\frac{1-t^2+2t}{(1-t^2)}}{\frac{2(1-t^2)+1+t^2}{(1-t^2)}}\times\frac{2}{(1-t^2)}dt$$

$$\frac{1+sh(x)}{2+ch(x)}dx = \frac{(1-t^2+2t)}{2(1-t^2)+1+t^2}\times\frac{2}{(1-t^2)}dt$$

$$\frac{1+sh(x)}{2+ch(x)} = \frac{2(-t^2+2t+1)}{2(1-t^2)^2+(1-t^2)+t^2(1-t^2)}$$

$$\frac{1+sh(x)}{2+ch(x)} = \frac{2(-t^2+2t+1)}{2(1+t^4-2t^2)+(1-t^2)+(t^2-t^4)}$$

$$\frac{1+sh(x)}{2+ch(x)} = \frac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t^2)(3-t^2)}$$

Soit : $f(t) = \dfrac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t^2)(3-t^2)} = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$

avec degré de $P(t) = 2$ < degré de $Q(t) = 4$
$\boxed{t^2}$ $\boxed{t^4}$

on décompose f sous la forme :

$$f(t) = \frac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t)(1+t)(\sqrt{3}-t)(\sqrt{3}+t)}$$

avec, $(1-t^2) = (1+t)(1-t)$: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$(3-t^2) = (\sqrt{3}-t)(\sqrt{3}+t)$.

$$f(t) = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1+t)} + \frac{c}{(\sqrt{3}-t)} + \frac{d}{(\sqrt{3}+t)}$$

détermination de a, b, c et d :

* On multiplie $f(t)$ par $(1-t)$:

$$(1-t)f(t) = \frac{2(-t^2+2t+1)}{(1+t)(3-t^2)}$$

$$\lim_{t\to 1}(1-t)f(t) = \frac{2(-1^2+2(1)+1)}{(1+1)(3-(1)^2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$(1-t)f(t) = a + \frac{b(1-t)}{(1+t)} + \frac{c(1-t)}{(\sqrt{3}-t)} + \frac{d(1-t)}{(\sqrt{3}+t)}$$

$$\lim_{t\to 1}(1-t)f(t) = a \Rightarrow a = 1$$

* on multiplie $f(t)$ par $(1+t)$

$$(1+t)f(t) = \frac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t)(3-t^2)}$$

$$\lim_{t\to -1}(1+t)f(t) = \frac{-4}{4} = -1$$

$$(1+t)f(t) = \frac{a(1+t)}{(1-t)} + \frac{c(1+t)}{(\sqrt{3}-t)} + b + \frac{d(1+t)}{(\sqrt{3}+t)}$$

$$\lim_{t\to -1}(1+t)f(t) = b \Rightarrow b = -1$$

* on multiplie $f(t)$ par $(\sqrt{3}-t)$:

$$(\sqrt{3}-t)f(t)=\frac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t^2)(\sqrt{3}+t)}$$

$$\lim_{t\to\sqrt{3}}(\sqrt{3}-t)f(t)=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$*(\sqrt{3}-t)f(t)=\frac{a(\sqrt{3}-t)}{(1-t)}+\frac{b(\sqrt{3}-t)}{(1+t)}+c+\frac{d(\sqrt{3}-t)}{(\sqrt{3}+t)}$$

$$\lim_{t\to\sqrt{3}}(\sqrt{3}-t)f(t)=c \Rightarrow c=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

* on multiplie $f(t)$ par $(\sqrt{3}+t)$:

$$(\sqrt{3}+t)(f(t))=\frac{2(-t^2+2t+1)}{(1-t^2)(\sqrt{3}-t)}$$

$$\lim_{t\to-\sqrt{3}}(\sqrt{3}+t)f(t)=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$*(\sqrt{3}+t)f(t)=\frac{a(\sqrt{3}+t)}{(1-t)}+\frac{b(\sqrt{3}+t)}{(1+t)}+\frac{c(\sqrt{3}+t)}{(\sqrt{3}-t)}+d$$

$$\lim_{t\to-\sqrt{3}}(\sqrt{3}+t)f(t)=d=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

$$\rightarrow \int f(t)\,dt=\int\frac{1}{(1-t)}+\frac{-1}{(1+t)}+\frac{(-1+\sqrt{3})/\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-t)}+\frac{\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}}{(\sqrt{3}+t)}\,dt$$

$$\int f(t)\,dt=-\ln|1-t|-\ln(1+t)-\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\ln|\sqrt{3}-t| + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}+t|+C.$$

$$I=-\ln\left|1-th^2\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)\ln\left|\sqrt{3}-th\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\ln\left|\sqrt{3}+th\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$* \; J=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx \quad (t=\sqrt{x})$$

$$t^2=x \rightarrow dx=2t\,dt.$$

$$J=\int\frac{1-t}{t(1+t^2)}2t\,dt=2\int\frac{1-t}{(1+t^2)}dt$$

$$J=\left[2\int\frac{1}{(1+t^2)}dt-\int\frac{2t}{(1+t^2)}dt\right.$$

$$J=2\arctan(t)-\ln(1+t^2)+C$$

$$J=2\arctan(\sqrt{x})-\ln(1+x)+C$$

$$K=\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)(\sin^2x-4\sin x+5)}dx \quad (y=\sin x)$$

$$dy=\cos x\,dx$$

$$K=\int\frac{1}{y(y^2-4y+5)}dy$$

$$K=\frac{1}{5}\ln|y|-\frac{1}{10}\ln(y^2-4y+5)-4\arctan(y-2)+C$$

$$K=\frac{1}{5}\ln|\sin x|-\frac{1}{10}\ln(\sin^2x-4\sin x+5) -4\arctan(\sin x-2)+C.$$

Exercice 8: Calcule d'intégrales en utilisant la linéarisation.

$$I=\int\cos^4x\sin^2x\,dx$$

$$\cos^2x=\frac{\cos2x+1}{2} \quad ; \quad \sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$$

$$\cos^4x\sin^2x=\left(\frac{\cos2x+1}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)$$

$$\cos^4x\sin^2x=\frac{(\cos^22x+1+2\cos2x)}{4}\frac{(1-\cos2x)}{2}$$

$$\cos^4x\sin^2x=\frac{\cos^22x-\cos^32x+1-\cos2x+2\cos2x-2\cos^22x}{8}$$

$$\cos^4x\sin^2x=\frac{\cos^22x-\cos^32x+1+\cos2x}{8}$$

$$\int\cos^4x\sin^2x=\frac{1}{8}\left[\int(\cos2x-\cos^22x-\cos^32x+1)dx\right.$$

$$(*)=\frac{1}{8}\left[\int\cos2x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos(4x)dx+\frac{1}{2}\int dx -\int(\cos^22x.\cos2x)dx\right.$$

avec: $\cos^2(2x)=\frac{\cos2(2x)+1}{2}=\frac{\cos(4x)+1}{2}$

et: $\cos^3(2x)=\cos^22x.\cos(2x).$

$$(*)=\frac{1}{8}\left[\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{2}x-J\right]$$

$$J=\int(\cos^2(2x).\cos2x)dx=\frac{1}{2}\int(1-\sin^2(2x))(2\cos2x)dx$$

on pose : $y = \sin(2x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos(2x)$

$$J = \frac{1}{2}\int (1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) + C$$

$$J = \frac{1}{2}\left(\sin(2x) - \frac{1}{3}(\sin 2x)^3\right) + C$$

$$I = \frac{1}{8}\left[\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\sin(2x) - \frac{1}{3}(\sin 2x)^3\right) + C\right]$$

$$K = \int ch^2 x\,dx$$

$$ch^2 x = \frac{ch(2x)+1}{2}$$

$$K = \int \frac{ch(2x)+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int ch(2x) + \frac{1}{2}\int dx$$

$$K = sh(2x) + \frac{x}{2} + C$$

Série 2 : Equations differentielles :

Exercice 1 :

2) $ch(x)\,y' - sh(x)\,y = 1 \ \ldots\ldots (E)$

$\Leftrightarrow y' + a(x)\,y = f(x)$ est une équation differentielle linéaire.

* la résolution se fait en 2 étapes :

a) 1ère etape :

Résoudre : $ch(x)\,y' - sh(x)\,y = 0 \ \ldots\ldots (E_0)$

$\Leftrightarrow ch(x)\,y' = sh(x)\,y$

$\Leftrightarrow y' = \frac{sh(x)}{ch(x)}\,y$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{sh(x)}{ch(x)}\,y$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{sh(x)}{ch(x)}\,dx$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{sh(x)}{ch(x)}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$

avec $u(x) = ch(x)$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln(ch(x)) + C$

$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln(ch(x))+C} = e^{a+c} = e^a \cdot e^c$

$\Leftrightarrow |y| = e^c \cdot ch(x)$.

$y \neq 0 \Leftrightarrow y = \pm e^c \cdot ch(x) = K_1\,ch(x), K_1 \in \mathbb{R}^*$

$y = 0$ est la solution triviale de (E_0).

$\Rightarrow y_0 = K\,ch(x), K \in \mathbb{R}$: la solution générale de (E_0).

b) 2e étape : On a la relation suivante $ch^2 x - sh^2 x = 1$, en comparant à (E) on déduit que $y_P = ch(x)$ est solution particulière de (E).

donc : $y_G = y_0 + y_P = K\,ch(x) + ch(x)$ est la solution générale de (E)

$y_G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad D_R = \mathbb{R}$.

$x \longrightarrow y_G(x) = K\,ch(x) + ch(x)$

3) $x\ln(x)\,y' - y = 3(x\ln(x))^2 \quad x > 0 \ \ldots (E)$

a) 1ère étape : Resoudre $x\ln(x)\,y' - y = 0 \ \ldots\ldots (E_0)$.

$(E_0) \Leftrightarrow x\ln(x)\,y' = y$

$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{x\ln(x)}\,y \quad x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln(x)}\,y$

$y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{\overbrace{\tfrac{1}{x}}^{u'(x)}}{\underbrace{\ln(x)}_{u(x)}}\,dx$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln(\ln x) + C$

$\ln(x) > 0 \Rightarrow x > 1$

$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln(\ln(x))+c} = e^{a+c} = e^{a}.e^{c}$

$\Rightarrow |y| = \ln(x).e^{c} \Rightarrow y = \pm e^{c}\ln(x)$

$y \neq 0$, $y = k_1 \ln(x)$, $k_1 \in \mathbb{R}^*$

$y=0$ est la solution triviale de (E_0)

$\Rightarrow y_0 = k \ln(x)$, $k \in \mathbb{R}$ solution générale de (E_0).

b) 2e étape : On cherche la solution particulière par la méthode de variation de la constante : $y_P = K(x)\ln(x)$ solution particulière de (E) : $x\ln(x)y_P' - y_P = 3(x\ln(x))^2$ ...(E)

$y_P' = (K(x)\ln(x))' = K'(x)\ln(x) + K(x)\frac{1}{x}$

on remplace dans (E) :

$x\ln(x)\left(K'(x).\ln(x) + K(x).\frac{1}{x}\right) - K(x)\ln x = 3(x\ln(x))^2$

$x\ln(x)K'(x)\ln(x) + \cancel{K(x)\ln(x)} - \cancel{K(x)\ln(x)} = 3x^2(\ln(x))^2$.

$\Rightarrow K'(x) = 3x \Rightarrow \int K'(x)dx = \int 3x\,dx$

$\Rightarrow K(x) = \frac{3}{2}x^2$.

$y_P = K(x)\ln(x) = \frac{3}{2}x^2\ln(x)$.

donc :

$y_G = y_0 + y_P = K\ln(x) + \frac{3}{2}x^2\ln(x)$

$D_{y_G} =]1; +\infty[$

5) I : $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2+1$ ..... (E) avec $y(0)=3$.

On résout (E) : $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2+1$

$[(x^2+1)y]' = 3x^2+1$

$\int [(x^2+1)y]'dx = \int (3x^2+1)\,dx$

$\Rightarrow (x^2+1)y = x^3 + x + c$

$\Rightarrow y = \frac{(x^3+x+C)}{(x^2+1)} = \frac{x(x^2+1)}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x^2+1)}$

$\Rightarrow y = \underbrace{x}_{y_P} + \underbrace{\frac{C}{x^2+1}}_{y_0}$; $C \in \mathbb{R}$: solution générale de (E) ; $D_y = \mathbb{R}$

$\begin{cases} y(x) = x + \frac{C}{x^2+1} \\ y(0) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 + \frac{C}{0^2+1} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$\rightarrow C = 3$.

La solution générale de I est : $y = x + \frac{3}{x^2+1}$

Exercice 2 :

1) Donnons une équation differentielle.

$y(x) = f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow (e^x+1)\,y(x) = e^x$.

$\rightarrow [(e^x+1)y(x)]' = (e^x)' = e^x$

$\rightarrow (e^x+1)y'(x) + e^x.y(x) = e^x$ « une equation » possible

on a aussi : $[(1+e^x)y(x)]' = e^x = (1+e^x)y(x)$

$(1+e^x)y'(x) + e^x y(x) = (1+e^x)y(x) = y(x) + e^x y(x)$

$\rightarrow (1+e^x)y'(x) = y(x)$ ..... une autre equation possible.

2) Trouvons une courbe de plan passant par le point M(,3) et dont la pente de la tangente au point (x,y) est de $\frac{2y}{x}$.

$f(x) = ?$ $| f(1) = 3$

$y = f'(x)(x - x_0) + f(x)$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{2y}{x} \\ f(x) = y \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 2\int \frac{1}{x}dx$

$\rightarrow \ln|f(x)| = 2\ln|x| + C = \ln(x^2) + C$

$|f(x)| = e^{c}x^2 \Rightarrow f(x) = \pm e^{c}x^2$

$f(x) = Kx^2 \rightarrow K = 3$ pour $f(1) = K(1)^2$.
$f(1) = 3$
avec : $K = \pm e^c$
$\rightarrow f(x) = 3x^2$.

Exercice 3 :

1) Détermination des réels a, b et c pour que $y = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de : $2y' - y = -x^2 - x$ ①

yp solution particulière de ① :

$\rightarrow 2y_p' - y_p = -x^2 - x$ ②

et $y_p = ax^2 + bx + c$ ③ , $y_p' = 2ax + b$ ④

on remplace ③ et ④ dans ② :

$2(2ax+b) - (ax^2 + bx + c) = -x^2 - x$

$4ax + 2b - ax^2 - bx - c = -x^2 - x$

$-ax^2 + (4a-b)x + 2b - c = -x^2 - x$

par identification :

$$\begin{cases} -a = -1 & a = 1 \\ 4a - b = -1 \rightarrow & b = 4a + 1 = 5 \\ 2b - c = 0 & c = 2b = 10 \end{cases}$$

$\rightarrow y_p = x^2 + 5x + 10$

2) Résolution de ① et déduction de la solution vérifions $y(-1) = 5$.

on a : $y_G = y_0 + y_p$

y_0 solution de l'équation : $2y' - y = 0$ ....(E_0)

$2y' - y = 0 \leftrightarrow 2\frac{dy}{dx} = y$

$y \neq 0$; $\rightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} dx$

$y \neq 0$; $\rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2} dx \leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x + c$

$\leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}x + c} = e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^c$

$\rightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^c$

$y = \pm e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^c \rightarrow y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x}$, $K \in \mathbb{R}$ solution homogène de E_0

$y = 0$ solution triviale de(E_0)

donc : $y_G = y_P + y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 5x + 10$.

b) Déduction de la solution qui vérifie $y(-1) = 5$:

$y_G(x) = Ke^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 5x + 10$.

$y_G(-1) = Ke^{-\frac{1}{2}} + (-1)^2 + 5(-1) + 10$.

$y_G(-1) = Ke^{-\frac{1}{2}} + 6 = 5 \rightarrow Ke^{-\frac{1}{2}} = -1$

$\rightarrow K = \frac{-e^0}{e^{-1/2}} = -e^{1/2}$

donc :

$y = -e^{1/2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 5x + 10$.

Exercice 5 :

Trouvons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ telle que $f''(x) = 4 + \frac{2}{x^2}$ et la pente de la tangente à la courbe de f au point P(1,2) est égale à 3 :

$$\begin{cases} f''(x) = 4 + \frac{2}{x^2} \\ f'(1) = 3 \\ f(1) = 2 \end{cases} : I$$

$f''(x) = 4 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow \int f''(x)dx = \int (4 + \frac{2}{x^2})dx$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x - \frac{2}{x} + C_1 \\ f'(1) = 3 \end{array}\right\} f'(1) = 4 - 2 + C_1 = 3$
$C_1 = 1$

donc : $f'(x) = 4x - \frac{2}{x} + 1$

$\rightarrow \int f'(x)dx = \int (4x - \frac{2}{x} + 1)dx$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 - 2\ln(x) + x + C_2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}$

$\rightarrow f(1) = 2 + 1 + C_2 = 2$
$C_2 = -1$

donc, $f(x) = 2x^2 - 2\ln(x) + x - 1$ est solution du système I.

Exercice 6:

Résolution des équations différentielles avec précision de l'intervalle de résolution:

On considère les equations différentielles de la forme:

$ay''+by'+cy=f(x)$.... (E).

(E) est dite equation différentielle du 2e ordre avec second membre.

* La résolution de (E) se fait en 2 étapes:

* 1ère étape: résoudre $ay''+by'+cy=0$ (E₀)

à (E₀) on fait correspondre:

$ar^2+br+c=0$.... ($\mathcal{E}$).

* Si $\Delta>0$, ($\mathcal{E}$) a 2 racines réelles r_1 et r_2, donc:

$y_0=C_1\underbrace{e^{r_1x}}_{y_1}+C_2\underbrace{e^{r_2x}}_{y_2}$ est solution de (E_0)

* Si $\Delta=0$, ($\mathcal{E}$) a une racine double r, donc:

$y_0=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, solution de (E_0).

* Si $\Delta<0$, ($\mathcal{E}$) a 2 racines complexes $r_1=\alpha+i\beta$; $r_2=\alpha-i\beta$

donc $y_0=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, solution de (E_0).

* 2ème étape: On cherche la solution particulière $y_p=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$, par la méthode de la variation de la constante; où $C_1(x)$, $C_2(x)$ deux inconnues solutions du systèmes:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)\\ C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0\end{cases}$$

4) Résoudre: $y''+2y'+my=m^2$.... (E) $m\in\mathbb{R}$.

* 1ère étape: résoudre: $y''+2y'+my=0$.... (E_0)

$r^2+2r+m=0$.... ($\mathcal{E}$)

$\Delta=(2)^2-(4m)=4(1-m)$.

a) si $m<1$; $\Delta>0$, $r_1=\frac{-2-2\sqrt{1-m}}{2}$

$r_1=-1-\sqrt{1-m}$

$r_2=-1+\sqrt{1-m}$

donc: $y_0=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

$y_0=C_1\underbrace{e^{(-1-\sqrt{1-m})x}}_{y_1}+C_2\underbrace{e^{(-1+\sqrt{1-m})}}_{y_2}$

b) si $m=1$, $\Delta=0$, $r=\frac{-2}{2}=-1$ "racine double"

donc: $y_0=C_1e^{rx}+C_2e^{rx}=C_1\underbrace{e^{-x}}_{y_1}+C_2\underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

c) si $m>1$, $\Delta<0$, $r_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$r_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$r_1=-1-i\sqrt{m-1}=\alpha-i\beta$

$r_2=-1+i\sqrt{m-1}=\alpha+i\beta$

$y_0=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_0=C_1e^{-x}\cos(\sqrt{m-1}\,x)+C_2e^{-x}\sin(\sqrt{m-1}\,x)$

* 2ème étape: On vérifient facilement que $y_p=m$ est solution particulière de (E).

Serie : Calcul matriciel, déterminant et systèmes linéaires:

Exercice 1

Calculer lorsque c'est possible:

* $A+B$, $\nexists$ "n'existe pas" car A et B n'ont pas les mêmes dimensions.

* $B+F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+1 \\ 0+(-1) & 3+0 \end{pmatrix}$

$B+F = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

* $A.B$: pour que ce produit soit possible il faut que: $\underbrace{A}_{(n,m)} . \underbrace{B}_{(m,p)} = \underbrace{C}_{(n,p)}$

Exemple:

$$\begin{array}{c|c} & m_1 \quad m_2 \\ \hline \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c|c} & p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \\ \hline \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c|c} & p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \\ \hline \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 1\times2+(-1\times0) & (1\times-1)+(-1\times3) \\ -1\times2+(+1\times0) & (-1\times-1)+(1\times3) \\ 1\times2+(-1\times0) & (1\times-1)+(-1\times3) \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$B.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\nexists$ "n'existe pas" car $B(2,2)$ et $A(3,2)$ $m=2 \neq m=3$

* $C.D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+3\times2+5\times-1 \\ 2\times1+4\times2+6\times-1 \end{pmatrix}$

$C.D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

* $(B+F)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (B+F).(B+F)$

$(B+F)^2 = \begin{pmatrix} 3\times3+0\times-1 & 3\times0+0\times0 \\ -1\times3+3\times-1 & -1\times0+3\times3 \end{pmatrix}$

$(B+F)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

* B^2+F^2+2BF

$B^2 = (B).(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 2\times2+(-1)\times0 & 2\times(-1)+(-1)\times3 \\ 0\times2+3\times0 & 0\times(-1)+3\times3 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (F).(F)$

$F^2 = \begin{pmatrix} 1\times1+1\times(-1) & 1\times1+1\times0 \\ -1\times1+0\times(-1) & (-1)\times1+0\times0 \end{pmatrix}$

$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$2.B.F = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$2.B.F = 2 \begin{pmatrix} 2\times1+(-1)(-1) & 2\times1+(-1)\times0 \\ 0\times1+(3)\times(-1) & 0\times1+3\times0 \end{pmatrix}$

$2.B.F = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times2 \\ 2\times-3 & 2\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^2+F^2+2BF=\begin{pmatrix}4&-5\\0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&4\\-6&0\end{pmatrix}$$

$$B^2+F^2+2BF=\begin{pmatrix}4+0+6 & -5+1+4\\0-1-6 & 9+(-1)+0\end{pmatrix}$$

$$B^2+F^2+2BF=\begin{pmatrix}10&0\\-7&8\end{pmatrix}$$

$${}^tA={}^t\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Calcul de A^2, A^3, A^4, puis déduction de A^n

$$*A^2=A.A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1\times1+0\times0+1\times1 & 1\times0+0\times0+1\times0 & 1\times1+0\times0+1\times1\\0\times1+0\times0+0\times1 & 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times1\\1\times1+0\times0+1\times1 & 1\times0+0\times0+1\times0 & 1\times1+0\times0+1\times1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2\times1+0\times0+2\times1 & 2\times0+0\times0+2\times0 & 2\times1+0\times0+2\times1\\0\times1+0\times0+0\times1 & 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times1\\2\times1+0\times0+2\times1 & 2\times0+0\times0+2\times0 & 2\times1+0\times0+2\times1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=2.A^2=2^2A$$

$$A^4=A^3.A=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4\times1+0\times0+4\times1 & 4\times0+0\times0+4\times0 & 4\times1+0\times0+4\times1\\0\times1+0\times0+0\times1 & 0\times0+0\times0+0\times0 & 0\times1+0\times0+0\times1\\4\times1+0\times0+4\times1 & 4\times0+0\times0+4\times0 & 4\times1+0\times0+4\times1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}=2.A^3=2^3.A$$

On suppose que : $A^n=2^{n-1}.A$: $P(n)$

On montre $P(n+1)$: A^{n+1} $2^{(n+1)-1}.A=2^n.A$

$A^{n+1}=A^n.A=2^{n-1}.A.A=2^{n-1}.A^2$

$A^{n+1}=2^{n-1}.2A=2^{n-1+1}.A=2^n.A$

« C'est ce qu'il fallait démontrer ».

Exercice 3 :

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-3&6\\6&-8&12\\3&-3&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-3&6\\6&-8&12\\3&-3&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1\times1-3\times6+6\times3 & 1\times-3+(-3)(-8)+6\times-3 & 1\times6+-3\times12+6\times4\\6\times1+-8\times6+12\times3 & 6\times-3+-8\times-8+12\times-3 & 6\times6+(-8)(12)+12\times4\\3\times1+-3\times6+4\times3 & 3\times-3+-3\times-8+4\times-3 & 3\times6+-3\times12+4\times4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&3&-6\\-6&10&-12\\-3&3&-2\end{pmatrix}$$

montrons qu'il existe deux réels a et b tel que $A^2 = aA + bI$

$$\begin{pmatrix}1 & +3 & -6\\ -6 & 10 & -12\\ -3 & 3 & -2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 6 & -8 & 12\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ -6 & 10 & -12\\ -3 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -3a & 6a\\ 6a & -8a & 12a\\ 3a & -3a & 4a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ -6 & 10 & -12\\ -3 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & -3a & 6a\\ 6a & -8a+b & 12a\\ 3a & -3a & 4a+b\end{pmatrix}$$

$\rightarrow -3a = 3 \rightarrow a = -1$

$a + b = 1 \rightarrow b = 2$

2) Déduction que A est inversible et calculer A^{-1}:

A est dite inversible si $\exists$ B d'ordre n telque: $A.B = I_n$

on note: $B = A^{-1}$ et $B.A = I_n$.

I_n: matrice identité représentant l'élément neutre telque: $A.I_n = A$

On remarque que: $A^2 = -A + 2I$

$A^2 + A = 2I \rightarrow A^2 + AI = 2I$

parceque $A = AI$

$A(A+I) = 2I \rightarrow \underbrace{\frac{A+I}{2}}_{B=A^{-1}} A = I$

$$A^{-1} = \frac{(A+I)}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+1 & -3 & 6\\ 6 & -8+1 & 12\\ 3 & -3 & 4+1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 6 & \frac{-7}{2} & 12\\ 3 & -3 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Exercice 4:

1) Détermination par échelonnement le rang des matrices.

Definition: une matrice de type (m,n) est dite sous forme echelonnée, si le nombre de 0 au début de chaque ligne croit de ligne en ligne, jusqu'à n'avoir possiblement que des lignes de 0.

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A et B sous formes échelonnés

$$C = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix}2 & 3 & -6\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ C, D et E ne sont pas échelonnés.

Les pivots sont les 1^{er} termes non nuls des lignes de matrices échelonnées

Définitions, Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice consiste à:

1- échanger (permuter) 2 lignes $(l_i \rightarrow l_j)$

2- multiplier les 2 lignes par une constante $\neq 0$ $(l_i \rightarrow \alpha l_i)$

3- ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

$$C \xrightarrow{l_2 \longleftrightarrow l_3} \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$D \xrightarrow{l_2-5l_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

$E \xrightarrow{l_3+\frac{1}{3}l_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \xrightarrow{l_2+2l_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \xrightarrow{l_3-l_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \widetilde{A}$

$rgA \approx rg\widetilde{A}$ = nombre de pivots de la matrice échelonnées = 3 « 1, -1, 3 »

$* B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$* B \xrightarrow{l_2+l_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$* B \xrightarrow{l_3+l_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$* B \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{B}$

$rgB \approx rg\widetilde{B}$ = nombre de pivots de la matrice échelonnées = 2 « 1, -2 »

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$

quand $\alpha = 0$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \widetilde{C}$

$rgC = rg\widetilde{C} = 3$ « 1, 1, 1 »

quand $\alpha \neq 0$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$* C \xrightarrow{L_3 \to L_3-\alpha L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$

$* C \xrightarrow{L_3 \to L_3-\frac{1}{\alpha}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha^3-1}{\alpha} \end{pmatrix}$

Si $\frac{-\alpha^3-1}{\alpha} = 0 \to \alpha^3+1 = 0 \to \alpha = -1$

Si $\alpha = -1 \to rgC = 2$
Si $\alpha \neq -1 \to rgC = 3$

2. Calcul de A^{-1} par la méthode de Gauss Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de $(A \mid I)$ en utilisant des operations élementaires, on arrive a $(I \mid A)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 + 2L_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \to L_3 - L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \to \frac{1}{3} L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - 2L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$L_2 \to L_2 + 2L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$L_2 \to -L_2$
$$\Bigg(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}}_{A^{-1}}\Bigg)$$

Exercice 5. Déterminants.

Calcul des déterminants.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det|A| = 1\big((1\times 1) - (-2\times(-1))\big) - (-2)\big((-1\times 1) - (0\times -1)\big) + 0\big(((-1)\times(-2)) - (1\times 0)\big)$$

$$\det|A| = -3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 1\big((1\times(-1)) - ((-1)\times(-1))\big) - (-1)\big(((-1)\times(-1)) - (1\times(-1))\big) + 1\big(((-1)\times(-1)) - (1\times 1)\big)$$

$$\det|B| = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det|C| = 1\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det|C| = 1\big((\alpha\times 0) - (1\times 1)\big) - 0\big((0\times 0) - (\alpha\times 1)\big) + \alpha\big((0\times 1) - (\alpha\times\alpha)\big)$$

$$\det|C| = -1 - \alpha^3$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det$|\Delta| = 0$ car la ligne 1 = da ligne 5

Remarque: Quand on a deux lignes ou colonnes identique, det de la matrice est égale a 0.

Exercice 6:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_1 \xrightarrow{L_1 \to 3L_1} \begin{vmatrix} 15 & 30 & 60 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_1 \; L_2 \to 15L_2 \begin{vmatrix} 15 & 30 & 60 \\ 15 & 30 & 45 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_1 \; L_3 \to 5L_3 \begin{vmatrix} 15 & 30 & 60 \\ 15 & 30 & 45 \\ 15 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Delta}_1 = 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2) Montrer sans calcul:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

on a: $\begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

$L_2 = L_3 \to \Delta = 0$ « 2 lignes identiques ».

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 7 \\ -1 & 8 & -2 & 12 & -16 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 10 & 12 \end{vmatrix}$$

on a: $C_1 \to 2C_1$ $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & 2 & -5 \\ -2 & 8 & -2 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

$C_1 = C_3 \to \Delta = 0$ « 2 colonnes identiques »

Exercice 7

1) Pour quelle valeurs de α la matrice $A\alpha$ est-elle inversible.

$$A\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$A\alpha$ est inversible si $\det(A\alpha) \neq 0$

$$\det A\alpha = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A\alpha = \alpha((\alpha \times \alpha) - (1 \times 1)) - 1((1 \times \alpha) - (1 \times 1)) + 1((1 \times 1) - (1 \times \alpha)) = \alpha(\alpha^2 - 1) + 2(1 - \alpha)$$

$\det A_\alpha = \alpha((\alpha-1)(\alpha+1)) - 2(\alpha-1)$

$\det A_\alpha = (\alpha-1)((\alpha(\alpha+1))-2)$

$\det A_\alpha = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-2)$

$\det A_\alpha = (\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha+2) = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$

$\det A_\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = -2$

donc: A_α est inversible si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$

2) Calcul de A_α^{-1} pour $\alpha = 0$.

$\det(A_\alpha) = (0-1)^2(0+2) = 2$

et $A_\alpha = A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) En utilisant la méthode des cofacteurs.

$A_0^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_0)} {}^t\mathrm{com}(A_0)$; $\mathrm{com}(A_0) = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}$

avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{0ij}|$

$$\mathrm{com}(A_0) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(A_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) La méthode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \to -\frac{1}{2}L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

A_0^{-1}

Exercice 10 : Systemes linéaires.

Mettre sous forme matricielle les systèmes linéaires puis les résoudre.

Définition: Un systène de type (n,p) ie: n équations et p inconnues est dit de Cramer si:

* $n = p$
* Si la matrice associée a ce système à un déterminant $\neq 0$.

$$* \; S_1 \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ x-2y-3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$A.X=B$ est l'écriture matricielle de (S_1)

$*$ comme $n=p=3$ ie le nombre d'équation = au nombre d'inconnues (S_1) est de Cramer si $\det(A)\neq 0$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=2\left((5\times -3)-(2\times -2)\right)-3\left((3\times -3)-(-1\times -2)\right)+1\left((3\times 2)-(-1\times 5)\right)$$

$\det(A)=22\neq 0$

donc (S_1) est de Cramer.

$*$ La méthode de Cramer:

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -3\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$\det(A_1)=1\left((5\times -3)-(-2\times 2)\right)-8\left((-3\times 3)-(-2\times -1)\right)-1\left((3\times 2)-(5\times -1)\right)$$

$\det(A_1)=66$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 2\end{vmatrix}$$

$$\det(A_2)=2\left((8\times -3)-(2\times -1)\right)-3\left((1\times -3)-(-1\times -1)\right)+1\left((1\times 2)-(-1\times 8)\right)=-22$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -1\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8\end{vmatrix}$$

$$\det(A_3)=2\left((5\times -1)-(8\times -2)\right)-3\left((3\times -1)-(-2\times 1)\right)+1\left((3\times 8)-(5\times 1)\right)$$

$\det(A_3)=44$

$$x=\frac{66}{22}=3\ ;\ y=\frac{-22}{22}=-1\ ;\ z=\frac{44}{22}=2$$

$(x,y,z)=(3,-1,2)$ est l'unique solution du système (S_1)

$*$ Méthode de Gauss

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 8 \\ -1\end{matrix}}_{B}\right) \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3} \left(\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ 1\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_1]{L_2\to L_2-3L_1} \left(\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 7 & 5\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} -1 \\ 11 \\ 3\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\to \frac{1}{11}L_2} \left(\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 3\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3-7L_2} \left(\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -4\end{matrix}\right)$$

$$\to \begin{cases} +x-2y-3z=-1 \\ y+z=1 \\ -2z=-4\end{cases}$$

$\to z=2\ ;\ y=-1\ ;\ x=3$

$$*(S_3)\begin{cases} 2x+4y-6z-2t=2 \\ 3x+6y-7z+4t=2 \\ 5x+10y-11z+6t=3\end{cases}$$

(S_3) est un système a 3 equation et 4 inconnues, il ne peut pas être un système de Cramer, on résoud par la méthode de Gauss:

$$\left(\begin{matrix} 2 & 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & -7 & +4 \\ 5 & 10 & -11 & 6\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3\end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & -11 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 5L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 11 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{aligned} x + 2y - 3z - t &= 1 \\ 2z + 7t &= -1 \\ -3t &= 0 \end{aligned}$$

$\to t = 0$, $z = -\frac{1}{2}$,

$$S = \left\{ (x, y, z, t) = \left(-2y - \frac{1}{2}, y, -\frac{1}{2}, 0\right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$* \ S_2 \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y - az = 2 \quad a \in \mathbb{R} \\ x - ay + z = 1 \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1\big((1\times 1) - (-a \times -a)\big) - 2\big((1\times 1) - (-a \times 1)\big) + 1\big((1 \times -a) - (1 \times 1)\big)$$

$$\det(A) = 1 - a^2 - 2(1+a) - (1+a)$$

$$\det(A) = -(1+a)(2+a).$$

1^{er} cas : Si $(a+1) \neq 0$ et $(2+a) \neq 0$

$\to \det(A) \neq 0$, donc (S_2) est de Cramer.

$$\det(A_1) = \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$\det(A_1) = a\big((1\times 1) - (-a \times -a)\big) - 2\big((1\times 1) - (-a \times 1)\big) + 1\big((1 \times -a) - (1 \times 1)\big)$$

$$\det(A_1) = +a - a^3 - 2 - 2a - a - 1$$

$$\det(A_1) = -a^3 - 2a - 3$$

$$x = \frac{a^3 - 2a - 3}{-(1+a)(2+a) \leftarrow \det(A)}$$

$$\det(A_2) = \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix}$$

$$\det(A_2) = 1\big((2\times 1) - (-a \times 1)\big) - 2\big((a\times 1) - (1 \times 1)\big) + 1\big((a \times -a) - (1 \times 2)\big)$$

$$\det(A_2) = 2 + a - 2a + 2 - a^2 - 2$$

$$\det(A_2) = -a^2 - a + 2$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-a^2 + a + 2}{-(1+a)(2+a)}$$

$$\det(A_3) = \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -a & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_3) = 1\big((1\times 1) - (2 \times -a)\big) - 2\big((1\times 1) - (-a \times a)\big) + 1\big((1 \times 2) - (a \times 1)\big)$$

$$\det(A_3) = 1 + 2a - 2 - 2a^2 + 2 - a$$

$$\det(A_3) = -2a^2 + a + 1$$

$$z = \frac{-2a^2 + a + 1}{-(1+a)(2+a)}$$

$2^{ème}$ cas : si $\det(A)=0$ ie : $a=-1, a=-2$

si $a=-1$

« Methode de Gauss » :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right|$$

$0z=2$ « impossible »

$\rightarrow$ donc $S=\emptyset$.

Remarque : Si on remplace dans (S_2) a par -1 :

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{Systeme incompatible}$$

*Si $a=-2$: par méthode de Gauss :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right| \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-2 \\ -y=6 \\ 0=9 \end{array}\right\} \text{système incompatible} \quad S=\emptyset$$

Exercice 11

1) Montrer que M est inréversible.

On a :

$$\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -m & m & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} m & m \\ 4 & 3 \end{vmatrix} -(-m)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m & m \end{vmatrix}$$

$$\det(M)=1((m\times 3)-(m\times 4))+m((3\times 3)-(4\times 2))+1((3\times m)-(2\times m))$$

$\det(M)=-m+m+m=m\neq 0$ « M est inversible »

Calculer M^{-1} :

a) Par la méthode des cofacteurs.

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}\,{}^t\mathrm{com}(M)$$

$$\mathrm{com}(M)=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} m & m \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -m & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -m & m \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -m & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -m & m \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{com}(M)=\begin{vmatrix} -m & 4m & -5m \\ -1 & 1 & -1 \\ m & -3m & 4m \end{vmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(M)=\begin{vmatrix} -m & -1 & m \\ 4m & 1 & -3m \\ -5m & -1 & 4m \end{vmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{com}(M)=\begin{pmatrix} -1 & -1/m & 1 \\ 4 & 1/m & -3 \\ -5 & -1/m & 4 \end{pmatrix}$$

b) Par la méthode de Gauss :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -m & m & m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 + mL_1} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3m & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{L_3 \to 4mL_3 - L_2} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3m & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & -5m & -1 & 4m \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{L_1 \to 4mL_1 - 3L_2} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 4m & 0 & -m & m & -3 & 0 \\ 0 & 4m & 3m & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & -5m & -1 & 4m \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - 3L_3]{L_1 \to L_1 + L_3} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 4m & 0 & 0 & -4m & -4 & 4m \\ 0 & 4m & 0 & 16m & 4 & -12m \\ 0 & 0 & m & -5m & -1 & 4m \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to \frac{1}{4m} L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{m} L_3}]{L_1 \to L_1 \times \frac{1}{4m}} \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/m & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1/m & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1/m & 4 \end{array}\right|$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{M^{-1}}$

<u>2) En déduire les solution du systeme.</u>

$$(S) \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -mx + my + mz = -m \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -m & m & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}}_{x} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ -m \\ 1 \end{vmatrix}}_{B}$$

$(S) \Longleftrightarrow M.X = B \rightarrow X = M^{-1}.B$ car, M est inversible.

$$X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{m} & 1 \\ 4 & \frac{1}{m} & -3 \\ -5 & -\frac{1}{m} & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -m \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

l'unique solution du système