Sujets des divers examens avec corrigés du module de Théorie du signal 2015- 2018

Dr L.Guessas
Laboratoire des systèmes intélligents
Département d'Eléctronique Faculté de Technologie
Université de Ferhat Abbès Sétif 01

Sujets des examens 2015- 2018

Examen EMD1 de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (06 points) :

Soient les signaux suivants :

$$s_1(t) = A\,\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) = \begin{cases} A & \text{Si} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \qquad\qquad s_2(t) = s_1(t+T) - s_1(t-T)$$

1. Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
2. Déterminer l'énergie et la puissance totales des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et donner leurs type énergitique.
3. Déterminer $S_1(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s_1(t)$ et en déduire $S_2(\omega)$.

Exercice 02 (05 points) :

La fonction de transfert d'un système linéaire est donnée par :

$$H(P) = \frac{1}{(P+1)(P^2+2P+3)}$$

Calculer la sortie $s(t)$ du système si l'entrée $e(t) = 3\,\delta(t)$.

Exercice 03 (05 points) :

Soient les signaux suivants :

$$s_1(t) = \sin(t)\,u(t) \qquad s_2(t) = e^{-t}u(t)$$

- Déterminer le produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Exercice 04 (04 points) :

Soit $s(t)$ un signal défini par :

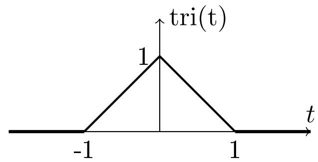
$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } |t| \leq 2, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(t)$.
2. Soit $s_e(t)$ le signal échantillonné de $s(t)$ par un échantillonneur idéal :
   - Donner le modèle de cet échantillonneur.
   - Donner l'expression générale de $s_e(t)$.
   - Représenter le signal échantillonné de $s_e(t)$ pour une période d'échantillonnage de $T_e = 0.5$.

Examen spécial de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (08 points) :

Soit tri(t) l'impulsion triangulaire unitaire, $\delta(\mathrm{t})$ est l'mpulsion de Dirac et $\delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$ est le peigne de Dirac de période $\mathrm{T_0}$, $*$ signifie produit de convolution.



1. Donner l'équation mathématique de tri(t), $\delta(\mathrm{t})$ et $\delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$.
2. Déterminer et tracer les signaux suivants :
   - $\mathrm{s_1(t)} = \mathrm{tri(t)}\,.\,\delta(\mathrm{t})$.
   - $\mathrm{s_2(t)} = \mathrm{tri(t)}\,.\,\delta(\mathrm{t}-\mathrm{t_0})$, $\mathrm{t_0} = 0.5$.
   - $\mathrm{s_3(t)} = \mathrm{tri(t)}\,.\,\delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$, avec $\mathrm{T_0} = 0.25$.
   - $\mathrm{s_4(t)} = \mathrm{tri(t)} * \delta(\mathrm{t})$.
   - $\mathrm{s_5(t)} = \mathrm{tri(t)} * \delta(\mathrm{t}-\mathrm{t_0})$.
   - $\mathrm{s_6(t)} = \mathrm{tri(t)} * \delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$ avec $\mathrm{T_0} = 4$.
3. Que représente chaque signal.

Exercice 02 (08 points) :

On considère la transformée de Laplace d'un signal s(t) définie par :

$$\mathrm{S(P)} = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)}$$

On veut déterminer le signal s(t) de deux façons :

1. Par décomposition en fractions simples.
2. Par produit de convolution.

Exercice 03 (04 points) :

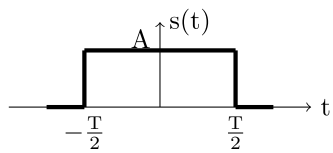
Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :

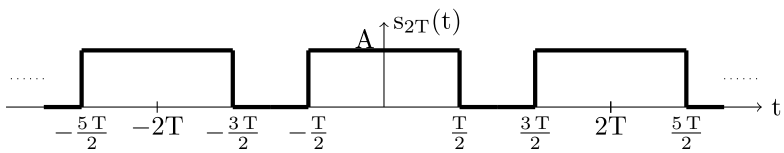
— $\mathrm{s_1(t)} = \sin(\mathrm{t})$.
— $\mathrm{s_2(t)} = \cos(\mathrm{t})$.

Examen de rattrapage de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (08 points) :

Soient les signaux suivants :





Avec A , T des constantes positives.

1. Donner l' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.
2. Déterminer la transformée de Fourier du signal s(t).
3. Écrire $s_{2T}(t)$ sous forme de produit de convolution de s(t) et un autre signal que vous pécisez et donnez sa décomposition en série de Fourier complexe.
4. Utiliser le théorème de Plancherell pour déduire la transformée de Fourier du signal $s_{2T}(t)$.

Exercice 02 (08 points) :

La fonction de transfert d'un système linéaire est donnée par :

$$H(P) = \frac{P^2 + 12}{P\,(P+2)(P+3)}$$

Calculer la sortie $s(t)$ du système si l'entrée $e(t) =$ u(t) , avec u(t) échelon unitaire.

Exercice 03 (04 points) :

Soit les signaux suivants :

1. $s_1(t) = e^{-a\,t}\,u(t)$.
2. $s_2(t) = e^{-b\,t}\,u(t)$.

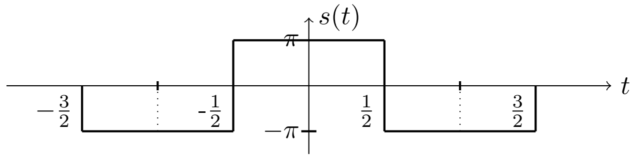
Avec a , b des constantes positives.

Calculer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(t)$ des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Examen de Théorie de signal 2016

Exercice 01 (05 points) :

Soit $s(t)$ un signal donné par la figure ci dessous :



1. Donner son équation mathématique, déterminer son énergie et sa puissance moyenne.
2. Déduire s(t) à l'aide des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalés de la forme $A\,\mathrm{rect}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)$.
3. Déterminer la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire unitaire rect(t), en déduire la transformée de Fourier du signal s(t).

Exercice 02 (05 points) :

La fonction de transfert d'un système linéaire est donnée par : $\mathrm{H(P)} = \dfrac{2P+1}{(P-2)(P^2+1)}$

Calculer la sortie $s(t)$ du système si l'entrée $e(t) = \delta(\mathrm{t})$, avec $\delta(\mathrm{t})$ l'impulsion de Dirac.

Exercice 03 (04 points) :

Soient les signaux suivants : $\mathrm{s}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{t}}\,\mathrm{u}(\mathrm{t}) \qquad \mathrm{s}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$

Choisir l'une des deux questions :

1. Déterminer le produit de convolution $\mathrm{s}_1(\mathrm{t}) * \mathrm{s}_2(\mathrm{t})$.
2. Déterminer la fonction d'intercorrélation $\mathrm{C}_{\mathrm{s1s2}}(\tau)$ des signaux $\mathrm{s}_1(\mathrm{t})$ et $\mathrm{s}_2(\mathrm{t})$.

Exercice 04 (06 points) :

Soit tri(t) l'impulsion triangulaire unitaire, $\delta(\mathrm{t})$ est l'mpulsion de Dirac et $\delta_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{t})$ est le peigne de Dirac de période T_0 , $*$ signifie le produit de convolution.

1. Donner l'équation mathématique de tri(t), $\delta(\mathrm{t})$ et $\delta_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{t})$.
2. Déterminer les signaux suivants :
   - $\mathrm{s}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t})\,.\,\delta(\mathrm{t})$.
   - $\mathrm{s}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t})\,.\,\delta(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)$, $\mathrm{t}_0 = 0.5$.
   - $\mathrm{s}_3(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t})\,.\,\delta_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{t})$, avec $\mathrm{T}_0 = 0.25$, tracer le signal $\mathrm{s}_3(\mathrm{t})$, que représente ce signal .
   - $\mathrm{s}_4(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t})$.
   - $\mathrm{s}_5(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t}) * \delta(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0)$.
   - $\mathrm{s}_6(\mathrm{t}) = \mathrm{tri}(\mathrm{t}) * \delta_{\mathrm{T}_0}(\mathrm{t})$ avec $\mathrm{T}_0 = 4$, que représente ce signal.

Examen spécial de Théorie du signal 2016

u **Exercice** 01 **(08 points)** :

Soit un signal défini par $s(t) = 4\,e^{-t}\,u(t)$,

1. Représenter le signal s(t) sur un intervalle de 6 secondes et d'un pas de 1 seconde.
2. Soit $s_e(t) = s(t)\,.\,\delta_{T_e}(t)$, avec $\delta_{T_e}(t)$ le peigne de Dirac de période T_e :
   - Donner l'expression générale de $s_e(t)$ et donner le type d'opération éffectuée.
   - Représenter le signal $s_e(t)$ pour $T_e = 0.5$ secondes.
3. Déterminer $S(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal s(t), représenter $|\,S(\omega)\,|$.
4. Décomposer en série de Fourier complexe $\delta_{T_e}(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier sachant que la TF d'une constante a est $2\,\pi\,a\,\delta\,(\omega)$.
5. En déduire l'expression de $S_e(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s_e(t)$.

Exercice 02 (06 points) :

La fonction de transfert d'un système linéaire invariant est H(P) :

$$H(P) = \frac{10}{P^2 + 4\,P + 8}$$

1. Donner les caractériqtiques d'un système linéaire invariant.
2. Quelle est le signal de sortie s(t) si l'entrée est une cosinusoïde causale $e(t) = 2\cos(2\,t)\,.\,u(t)$.

Remarque : Les transformées de Laplace de $\sin(\omega t) \rightarrow \dfrac{\omega}{P^2 + \omega^2}$; $\cos(\omega t) \rightarrow \dfrac{P}{P^2 + \omega^2}$

Exercice 03 (06 points) :

Soient les signaux suivants :

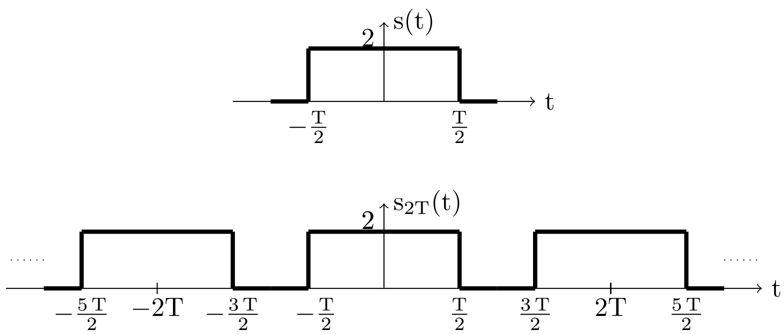
$$s_1(t) = \cos(t)\,u(t) \qquad s_2(t) = e^{-t}u(t)$$

- Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- Déterminer le produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Examen de Rattrapage de Théorie du signal 2016

Exercice 01 (7.5 points) :

Soient les signaux suivants :



Avec T une constante positive.

1. Donner l' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.
2. Déterminer la transformée de Fourier du signal s(t).
3. Écrire $s_{2T}(t)$ sous forme de produit de convolution de s(t) et un autre signal que vous précisez et donnez sa décomposition en série de Fourier complexe.
4. Utiliser le théorème de Plancherell pour déduire la transformée de Fourier du signal $s_{2T}(t)$ Sachant que la TF de $a\,e^{-j\omega_0 t}$ est $a\,2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$.

Exercice 02 (7.5 points) :

Le signal de sortie d'un système linéaire invariane dans le domaine Laplacien est donnée par :

$$S(P) = \frac{2}{(P+1)(P+2)}$$

Calculer la sortie $s(t)$ du système en utilisant :

* La décomposition en fractions simples.
* Le produit de convolution de deux signaux que vous précisez .

Exercice 04 (05 points) :

Soit s(t) un signal défini par :

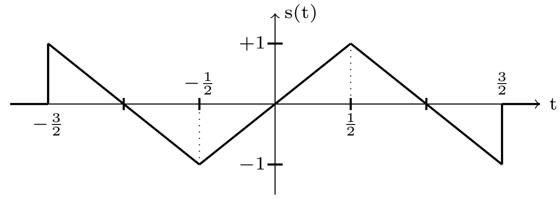
$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } |t| \leq 2, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(\tau)$.
2. En déduire l'énergie du signal.

Examen EMD1 de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (07 points) :

Soit s(t) un signal donné par la figure ci contre.
On désigne par $s_1(t) = \dfrac{d\,s(t)}{d\,t}$ la dérivée du signal s(t),



1. Donner l'équation mathématique et tracer le signal $s_1(t)$.
2. Déterminer l'énergie et la puissance moyenne du signal $s_1(t)$.
3. Déduire le signal $s_1(t)$ à l'aide des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalées de la forme $A\,\mathrm{rect}(t - t_0)$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $\mathrm{rect}(t)$ et en déduire $S_1(\omega)$ et $S(\omega)$ les transformées de Fourier de $s_1(t)$ et s(t).

Exercice 02 (07 points) :

Soit un système linéaire invariant dans le temps ayant pour entrée $e(t) = u(t+1)$ et pour fonction de transfert $H(P) = \dfrac{3}{P + 2}$

Calculer le signal de sortie s(t)

1. En utilisant la transformée de Laplace.
2. Retrouver le même résultat avec le produit de convolution.

Exercice 03 (06 points) :

Soit un signal défini par $s(t) = \begin{cases} 2 & \text{Si } |t| < 2, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Représenter le signal s(t).
2. Soit $s_e(t) = s(t)\,.\,\delta_{T_e}(t)$, avec $\delta_{T_e}(t)$ le peigne de Dirac de période T_e :
   - Donner l'expression générale de $s_e(t)$ et donner le type d'opération éffectuée.
   - Représenter le signal $s_e(t)$ pour $T_e = 1$.
3. Déterminer $S(\omega)$ la transformée de Fourier du signal s(t).
4. Décomposer en série de Fourier complexe $\delta_{T_e}(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier sachant que : la transformée de Fourier d'une constante a est $2\,\pi\,a\,\delta\,(\omega)$.
5. Déterminer l'expression de $S_e(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $s_e(t)$.

Examen de Remplacement de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (07 points) :
La fonction de transfert d'un système linéaire est donnée par :

$$\mathrm{H(P)} = \frac{1}{(P+1)(P^2+2\,P\,+3)}$$

1. Calculer la sortie s(t) du système si l'entrée $\mathrm{e(t)} = 3\,\delta(\mathrm{t})$.
2. En déduire la forme de la sortie s(t) du système si l'entrée $\mathrm{e(t)} = \mathrm{u(t)}$.

Exercice 02 (07 points) :
Soient les signaux suivant :
$\mathrm{rect}(\frac{\mathrm{t}}{2})$, $\delta(\mathrm{t})$, $\delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$ et $\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{n\,T}))$, avec $T = 4$.

1. Tracer les signaux.
2. Déterminer le produit de convolution suivant :
   - $\mathrm{rect}(\frac{\mathrm{t}}{2}) * \delta(\mathrm{t})$,
   - $\mathrm{rect}(\frac{\mathrm{t}}{2}) * \delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$,
   - $\mathrm{rect}(\frac{\mathrm{t}}{2}) * \delta_{\mathrm{T}}(\mathrm{t})$.
3. tracer les signaux résultants du produit de convolution.
4. Déterminer la transformée de Fourier des deux premiers signaux résultants du produit de convolution.

Exercice 03 (06 points) :

Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :

* $\mathrm{s}_1(\mathrm{t}) = \sin(\mathrm{t})$
* $\mathrm{s}_2(\mathrm{t}) = \cos(\mathrm{t})$.

Examen de Rattrapage de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (08 points) :

- Soit un signal défini par $s_1(t) = \begin{cases} 3 & \text{Si } |t| < 3, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_1(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier $S_1(\omega)$.
2. Déterminer $s(t) = s_1(t) * s_1(t)$, $*$ signifie le produit de convolution.
3. Tracer le signal résultant $s(t)$.

- Soit un signal défini par : $s_2(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{6} & \text{Si } |t| < 6, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_2(t)$, donner $s_2(t)$ en fonction de $s_1(t)$
2. En déduire sa transformée de Fourier $S_2(\omega)$.

Exercice 02 (05 points) :

Le signal de sortie d'un système linéaire invariant est donnée par : $S(P) = \dfrac{P - 1}{P^2 + 2P + 5}$

- Calculer la sortie s(t) du système.

Sachant que :
$e^{-at}\,u(t) \overset{TP}{\longmapsto} \dfrac{1}{P + a}$, $\sin(\omega t)\, u(t) \overset{TP}{\longmapsto} \dfrac{\omega}{P^2 + \omega^2}$ et $\cos(\omega t)\, u(t) \overset{TP}{\longmapsto} \dfrac{P}{P^2 + \omega^2}$.

Exercice 03 (07 points) :
Soient les signaux suivants :

* $s_1(t) = e^{-at}\,u(t)$ * $s_2(t) = e^{-bt}\,u(t)$.

Avec a , b des constantes positives.

1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_{s1}(t)$ du signal $s_1(t)$.
2. Donner l'expression de $C_{s2}(t)$ la fonction d'autocorrélation du signal $s_2(t)$.
3. En déduire l'énergie des deux signaux.
4. déterminer la densité spectrale d'énergie du signal $s_1(t)$.

Examen du Théorie de signal 2018

Exercice 01 (07 points)

- Soit un signal défini par $s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si}|t| < 1, \\ 0 & \text{Si}|t| > 1 \end{cases}$

  1. Tracer le signal $s_1(t)$ et calculer son énergie et sa puissance moyenne.
  2. Déterminer sa transformée de Fourier $S_1(\omega)$.

- On propose de recalculer $S_1(\omega)$ on utilisant la transformée de Fourier de l'échelon unitaire u(t).

  1. Donner une deuxième écriture de $s_1(t)$ fonction de la somme ou de la différence des échelons décalés de la forme $u(t \pm t_0)$.
  2. Tracer le signal $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ signe(t) avec signe(t) qui désigne le signal signe.
  3. Déterminer la transformée de Fourier $u(\omega)$ de l'échelon unitaire u(t) sachant que la transformée de Fourier de signe(t) est $\frac{1}{\jmath\omega}$.
  4. Retrouver la transformée de Fourier $S_1(\omega)$ de $s_1(t)$.

Exercice 02 (07 points)

1. La fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps est donnée par :

$$H(P) = \frac{1}{(P+1)^2}, \quad \text{Avec Reel (p)}, > 0$$

   - Déterminer la sortie $s(t)$ du système si l'entrée $e(t) = u(t)$.

Exercice 03 (06 points) :

Soient les signaux suivants :

* $s_1(t) = e^{-at}u(t)$ * $s_2(t) = e^{-2at}u(t)$.

Avec a une constante positive, **choisisser l'une des deux questions** :

1. Produit de convolution des signaux.
   - Déterminer le signal s(t) résultant du produit de convolution des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
   - Déterminer $S(\omega)$ la transformée de Fourier du signal résultant s(t).
2. Corrélation des signaux.
   - Déterminer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_{s1}(t)$ du signal $s_1(t)$ et en déduire son énergie.
   - Déterminer la densité spectrale d'énergie du signal $s_1(t)$.
   - Déterminer $C_{s1s2}(t)$ la fonction d'intercorrélation des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

Examen de Remplacement du Théorie du signal 2018

Exercice 01 (08 points) :

Soient les signaux suivants : $s_1(t) = e^{-t} . u(t)$; $s_2(t) = \cos(2\pi t) . u(t)$ et $s(t) = s_1(t) . s_2(t)$.

1. Tracer $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s(t)$ sur le même graphique sur un intervalle de [0; 5 secondes avec un pas de 0.5 secondes.
2. Déterminer l'énergie et la puissance des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
3. Déterminer $S_1(\omega), S_2(\omega)$, les transformées de Fourier des signaux $s_1(t), s_2(t)$ et tracer leurs spectre de fréquence en module.
4. En déduire $S(\omega)$, la transformée de Fourier de $s(t)$ et tracer son spectre de fréquence en module.

Exercice 02 (08 points) :

On considère la transformée de Laplace d'un signal s(t) définie par :

$$S(P) = \frac{2}{(P+1)(P^2+1)}$$

Déterminer le signal s(t) :

- Par décomposition en fractions simples.
- Par produit de convolution de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ que vous précisez.

Exercice 03 (04 points) :

- Calculer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(t)$ des signaux causaux définis par :

  * $s_1(t) = \sin(t)$ * $s_2(t) = \cos(t)$

Examen de Rattrapge du Théorie de signal 2018

Exercice 01 (08 points) :

Calculer la sortie $s(t)$ d'un système linéaire invariant ayant pour entrée $e(t) = \mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$ et pour réponse impulsionnelle $h(t) = 3\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{t}}\mathrm{u}(\mathrm{t})$,**utiliser l'une des deux méthodes**.

1. Le produit de convolution.
2. La transformée de Laplace.

Exercice 03 :

Soit un signal s(t) défini par $\mathrm{s(t)} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{u(t)}$,

1. Représenter le signal s(t) sur un intervalle de 4 secondes.
2. Soit $\mathrm{s_e(t)}$ le signal échantillonné de s(t), par un échantillonneur idéalisé.
   - Donner le modèle général de cet échantillonneur.
   - Donner l'expression générale de $\mathrm{s_e(t)}$.
   - Représenter le signal échantillonné $\mathrm{s_e(t)}$ pour un pas d'échantillonnage de $\mathrm{T_e} = 0.5$ secondes.
3. Déterminer $\mathrm{S}(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal s(t) .

   Représenter le module $\mathrm{S}(\omega)$.

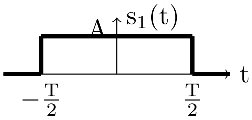
   En déduire l'expression de $\mathrm{S_e}(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $\mathrm{s_e(t)}$.

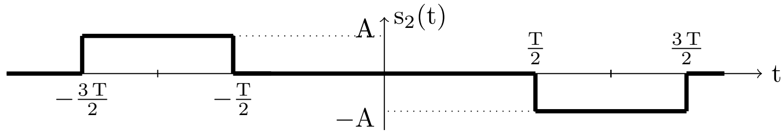
Corrigés des divers examens 2015- 2018

Corrigé de l'examen EMD1 de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (06 points) :

1. Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.





2. Déterminer l'énergie et la puissance totales des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et donner leurs type énergitique.

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2\, dt = A^2\, T \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (\texttt{energie finie}) = 0. \quad P_{moy} = 0$$

Le signal $s_1(t)$ est à l'énergie finie et à puissance moyenne nulle.

- $s_2(t) = s(t+T) - s(t-T)$

$$E_{tot} = 2\, E_{tot}(s_1(t)) = 2\, A^2\, T \qquad P_{moy} = 0$$

3. Déterminer $S_1(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s_1(t)$ et en déduire $S_2(\omega)$.

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, e^{-j\,\omega\, t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j\,\omega\, t}\, dt = \frac{2\,A}{\omega}\, \frac{e^{j\,\omega\,\frac{T}{2}} - e^{-j\,\omega\,\frac{T}{2}}}{2j} = A\,T \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}}$$

En déduire la TF du signal $S_2(t) = s_1(t+T) - s_1(t-T)$, donc :

$$S_2(\omega) = S_1(\omega) e^{+j\,\omega\,T} - S_1(\omega) e^{-j\,\omega\,T} = \frac{2\,A\,j}{\omega}\, (\cos(\frac{\omega\,T}{2} + j \sin(\frac{3\omega\,T}{2})\,))$$

Exercice 02 (05 points) :

Pour un un système linéaire la relation entre le signal de sortie et le signal d'entrée :

$$S(P) = H(P).E(P)$$

Donc pour une entrée :

$$e(t) = 3\,\delta(t) \;\Rightarrow\; E(P) = 3 \quad S(P) = H(P).E(P) = \frac{3}{(P+1)(P^2+2\,P+3)} = \frac{A}{(P+1)} + \frac{B\,P + C}{(P^2+2\,P+3)}$$

Donc :

$$S(P) = \frac{3}{2(P+1)} - \frac{3\,(P+1)}{((P+1)^2 + \sqrt{2}^2)}$$

Donc d'aprés les propriètés de la TP, le signal de sortie est :$s(t) = 3\,e^{-t}\,(\frac{1}{2} - \cos(\sqrt{2}\,t)\,)\,u(t)$.

Exercice 03 (05 points) :

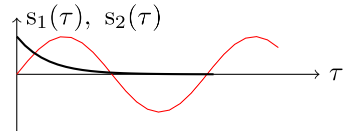
Soient les signaux suivants :

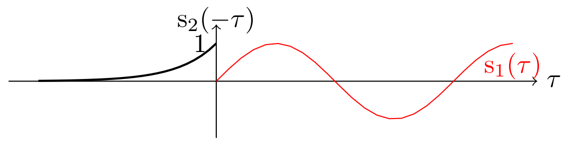
$$s_1(t) = \sin(t)\,u(t) \qquad s_2(t) = e^{-t})u(t)$$

1. Produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

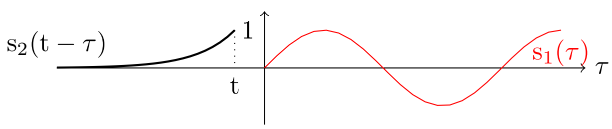
$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau)\, s_2(\tau)\, d(\tau)$$

Donc on a besoin des signaux suivants :Signaux avec variable de temps τ :

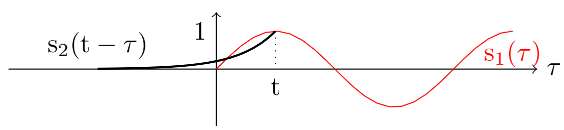




Deux cas peuvent se présenter :
$t < 0$:



Dans ce cas le produit $s_1(\tau)\, s_2(t-\tau) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d(\tau) = 0.$
$t > 0$:

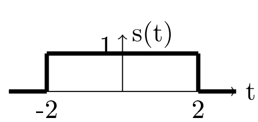


Dans ce cas $s_1(\tau)\, s_2(t-\tau) \neq 0$ donc :
$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \sin(\tau)\; e^{-(t-\tau)}\, d\tau$.
Donc : $e^{-t} \int_0^t \sin(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau$.
Cette intégration se fait par partie on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \sin(\tau)\, d\tau$:
$\int_0^t \sin(\tau)\, e^{\tau}\, d\tau = [-\cos(\tau)\, e^{\tau}]_0^t + \int_0^t \cos(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau$.
ET :
on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \cos(\tau)\, d\tau$:
$\int_0^t \cos(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau = [\sin(\tau)\, e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau$.
Donc :
$\int_0^t \sin(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau = [-\cos(\tau)\, e^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\, e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\; e^{\tau}\, d\tau$.

$\int_0^t s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} e^{-t} (\sin(t)\, e^{t} - \cos(t)\, e^{t} + 1) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin(t) - \cos(t))\, u(t).$

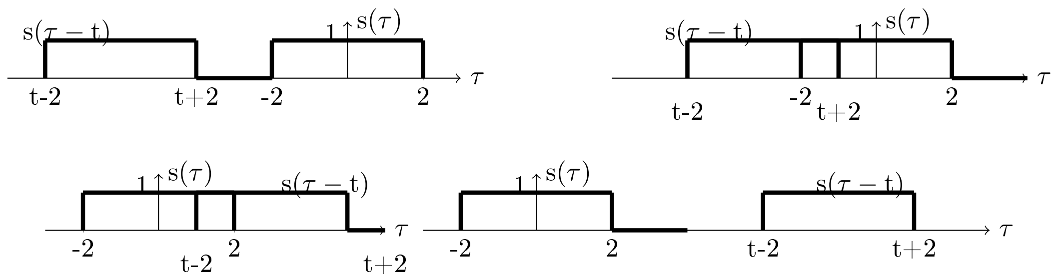
Exercice 04 (04 points) :

Soit $s(t)$ un signal défini par :



1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(t)$.

$$C_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, s(\tau - t)\, d(\tau)$$



Quatre cas peuvent se présenter :

— $t \leq -4$: Dans ce cas $\mathrm{s}(\tau)\,\mathrm{s}(\tau-\mathrm{t}) = 0$ donc $\mathrm{C_s(t)} = 0$

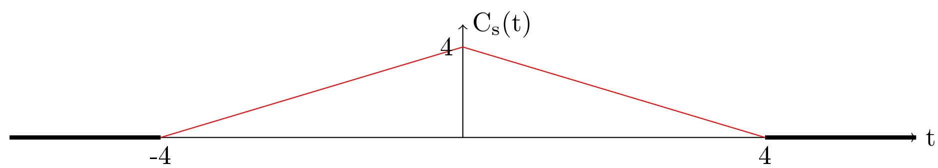
— $-4 \leq t \leq 0$: $\mathrm{C_s(t)} = \int_{-2}^{\mathrm{t}+2} 1\,\mathrm{dt} = \mathrm{t} + 4.$

— $0 \leq t \leq 4$: $\mathrm{C_s(t))} = \int_{\mathrm{t}-2}^{+2} 1\,\mathrm{dt} = \mathrm{t} - 4.$

— $t > 4$: Dans ce cas $\mathrm{s}(\tau)\,\mathrm{s}(\tau-\mathrm{t}) = 0$ donc $\mathrm{C_s(t)} = 0$

Donc :

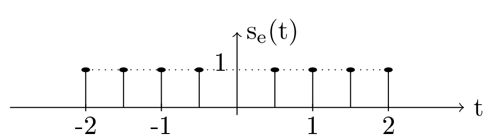
$$\mathrm{C_s(t)} = \begin{cases} 0 & \mathrm{Si} \quad < \mathrm{t} < -4 \\ \mathrm{t} + 4 & \mathrm{Si} \quad -4 < \mathrm{t} < 0 \\ 4 - \mathrm{t} & \mathrm{Si} \quad 0 < \mathrm{t} < 4 \\ 0 & \mathrm{Si t} > 4 \end{cases}$$



2. L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu s(t) et d'un peigne de Dirac de période $\mathrm{T_e}$ soit $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e})$.

- Donner l'expression générale de $\mathrm{s_e(t)}$.
  $\mathrm{s_e(t)} = \mathrm{s(t)}\,\delta_{T_e}(t) = \mathrm{s(t)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t)}\delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e})$
  $\mathrm{s(t)}\delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e})$: Ce produit n'est défini que pour les instants $\mathrm{t} = \mathrm{k\,T_e}$.
  Donc :
  $\mathrm{s_e(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(KT_e)}\delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e}) = \mathrm{s(KT_e)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e})$.
  $\mathrm{s_e(t)} = \mathrm{rec}(\frac{\mathrm{k\,T_e}}{4}) \sum_{k=-4}^{+4} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e}) = \sum_{k=-4}^{+4} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k\,T_e})$.
  C'est une suite de pics de Dirac dont les poids(les amplitudes) sont les valeurs du signal s(t) aux instants $\mathrm{KT_e}$ c'est à dire les valeurs $\mathrm{rec}(\frac{\mathrm{k\,T_e}}{4}) = 1$.
  $\mathrm{s_e(t)} = \delta(\mathrm{t}+2) + \delta(\mathrm{t}+1.5) + \delta(\mathrm{t}+1) + \delta(\mathrm{t}+0.5) + \delta(\mathrm{t}) + \delta(\mathrm{t}+0.5) + \delta(\mathrm{t}+1.5) + \delta(\mathrm{t}+2)$.

- Représenter le signal échantillonné de $\mathrm{s_e(t)}$ pour $\mathrm{T_e} = 0.5$.



Corrigé de l'examen spécial de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (08 points) :

Soit tri(t) l'impulsion triangulaire unitaire, $\delta(\mathrm{t})$ est l'mpulsion de Dirac et $\delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$ est le peigne de Dirac.

1. L'équation mathématique de tri(t), $\delta(\mathrm{t})$ et $\delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t})$.

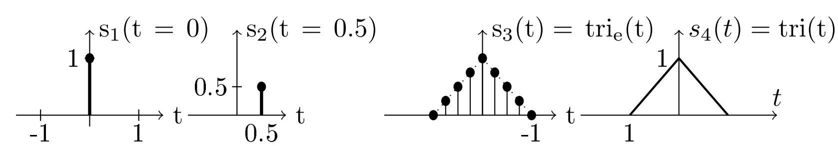
$$\mathrm{tri(t)} = \begin{cases} 1 - |\mathrm{t}| & \text{Si } |\mathrm{t}| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \delta(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t} = 1 \qquad \delta_{\mathrm{T_0}}(\mathrm{t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - n\,T_0)$$

2. Valeur et traçage les signaux suivants :

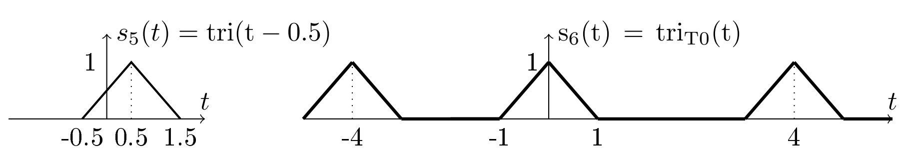
- $\mathrm{s_1(t) = tri(t)\,.\,\delta(t) = tri(0)\,.\,\delta(t) = \delta(t)}$, avec $\mathrm{tri(0) = 1}$.
- $\mathrm{s_2(t) = tri(t)\,.\,\delta(t - t_0) = tri(t_0 = 0.5)\,.\,\delta(t - t_0) = 0.5\,.\,\delta(t - 0.5)}$, avec $\mathrm{tri(0.50) = 0.5}$.
- $\mathrm{s_3(t) = tri(t)\,.\,\delta_{T_0}(t) = tri(t)\,.}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - n\,T_0) = \mathrm{tri(n\,T_0 = n\,0.25)\,.}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(t - n\,T_0)$,avec $(\mathrm{n = -4 : +4})$.

- $\mathrm{s_4(t) = tri(t) * \delta(t)}$, $\delta(\mathrm{t})$ est l'élément neutre pour le produit de convolution.
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau)\,\delta(\mathrm{t}-\tau))\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri(t)}\,\delta(\mathrm{t}-\tau))\,\mathrm{d}\tau$, tri(t) est constante par rapport à τ :
  $$\mathrm{tri(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t}-\tau))\,\mathrm{d}\tau}_{=1} = \mathrm{tri(t)}\,.$$
- $\mathrm{s_5(t) = tri(t) * \delta(t - t_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau)\,\delta(\mathrm{t + t_0} - \tau))\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri(t - t_0)}\,\delta(\mathrm{t + t_0} - \tau))\,\mathrm{d}\tau.$
  $\mathrm{tri(t - t_0)}$ est constante par rapport à τ :
  $$\mathrm{tri(t - t_0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t + t_0} - \tau))\,\mathrm{d}\tau}_{=1} = \mathrm{tri(t - t_0)}\,.$$
- $\mathrm{s_6(t) = tri(t) * \delta_{T_0}(t)}$, avec$\mathrm{T_0 = 4}$.
  $\mathrm{tri(t)} * \delta_{T0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + \mathrm{n\,T_0}))\,\mathrm{d}\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri(t - nT_0)}\,\delta(\mathrm{t} - \tau + \mathrm{n\,T_0}))\mathrm{d}\tau.$
  $\mathrm{tri(t - nT_0)}$ est constante par rapport à τ Alors :
  $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri(t - nT_0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + \mathrm{n\,T_0}))\,\mathrm{d}\tau}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri(t - nT_0)} = \mathrm{tri_{T0}(t)}.$$
  On obtient alors un signal triangulaire périodique de période T_0.

Les signaux sont donnés par :



Et



3. Que représente chaque signal.

$\mathrm{s_1(t)}$: est la valeur du signal triangulaire à l'instant $\mathrm{t = 0}$, $\mathrm{s_2(t)}$: est la valeur du signal triangulaire à l'instant $\mathrm{t_0 = 0.5}$, $\mathrm{s_3(t)}$: représente l'échantillonnage du signal triangulaire avec une période $\mathrm{T_0 = 0.25}$, $\mathrm{s_4(t)}$: représente le signal lui même, $\mathrm{s_5(t)}$: représente le décalage du signal ,$\mathrm{s_6(t)}$: représente la périodisation du signal triangulaire avec une période de $\mathrm{T_0 = 4}$.

Exercice 02 (06 points) :
On considère la transformée de Laplace d'un signal s(t) définie par :

$$\mathrm{S(P)} = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)}$$

On veut déterminer le signal s(t) de deux façons :

1. Par décomposition en fractions simples.

$$\mathrm{S(P)} = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{(P+1)} + \frac{\mathrm{B\,P+C}}{(P^2+1)}$$

$\mathrm{A} = \frac{1}{P^2+1}|_{P=-1} = \frac{1}{2}.$
Par réduction au même dénominateur on trouve :
$\mathrm{B} = -\frac{1}{2}.\ \mathrm{C} = \frac{1}{2}.$

$$\mathrm{S(P)} = \frac{1}{2}\frac{1}{P+1} - \frac{1}{2}\frac{P-1}{(P^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(P+1)} - \frac{1}{2}\frac{P}{P^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{P^2+1}$$

Donc d'aprés les propriètés de la TP inverse on a le signal de sortie est :
$s(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{u(t)} - \frac{1}{2}\cos(t)\,\mathrm{u(t)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sin(t)}\,u(t) = \frac{1}{2}\,(\,e^{-\mathrm{t}} - \mathrm{cos(t)} + \mathrm{sin(t)}\,)\,\mathrm{u(t)}.$

2. Par produit de convolution.

$$\mathrm{S(P)} = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)}$$

On considère que S(P) est le produit de deux transformées de Laplace avec :

$$\mathrm{S_1(P)} = \frac{1}{(P+1)} \qquad \mathrm{S_2(P)} = \frac{1}{(P^2+1)}$$

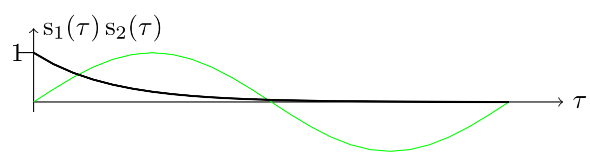
Leurs transformées inverses sont :

$$\mathrm{s_1(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{u(t)} \qquad \mathrm{s_2(t)} = \mathrm{sin(t)\,u(t)}$$

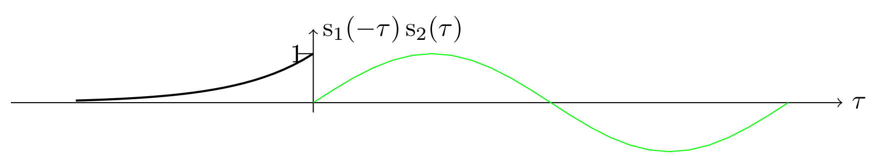
Le produit des transformées de Laplace se traduit dans le domaine temps par un produit de convolution des transformées inverses donc :

$$\mathrm{s(t)} = \mathrm{s_1(t)} * \mathrm{s_2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s_1}(\tau)\,\mathrm{s_2}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{d}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s_1}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{s_2}(\tau)\,\mathrm{d}(\tau)$$

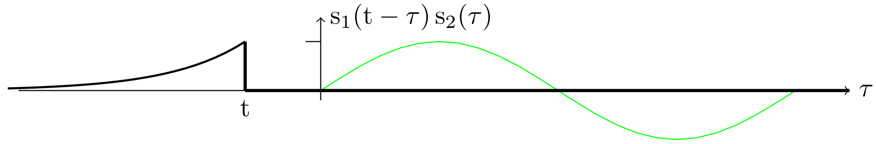
Donc on a besoin des signaux avec variable de temps τ.
Pour $\mathrm{s_1}(\tau)\,\mathrm{s_2}(\tau)$.



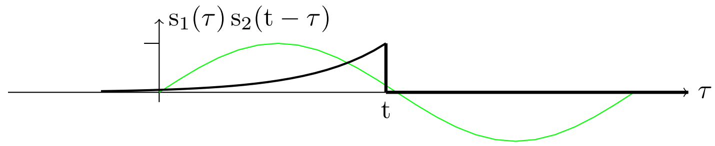
Pour $\mathrm{s_1}(-\tau)\,\mathrm{s_2}(\tau)$.



Pour les signaux $\mathrm{s_1}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{s_2}(\tau)$, deux cas peuvent se présenter :
$\mathrm{t} < 0$:



Dans ce cas le produit $s_1(t-\tau)\,s_2(\tau) = 0$ donc , $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)\,d(\tau) = 0$.
$t > 0$



Dans ce cas $s_1(t-\tau)\,s_2(\tau) \neq 0$ entre 0 et t donc :

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(\tau)\,d\tau = e^{-t} \int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau} d\tau .$$

Cette intégration se fait par partie on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \sin(\tau)\,d\tau$:

$$\int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [-\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + \int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau .$$

ET :
on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \cos(\tau)\,d\tau$:

$$\int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau .$$

Donc :

$$\int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [-\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau \quad .$$

$$2 \int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [-\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t$$

$\int_0^t s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2} e^{-t} (\sin(t)\,e^{t} - \cos(t)\,e^{t} + 1) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin(t) - \cos(t))\,u(t)$.

$$s(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin(t) - \cos(t))\,u(t)$$

Exercice 03 (04 points) :

Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :
— $s_1(t) = \sin(t)$, $\quad s_2(t) = \cos(t)$.

Les signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{T} = 1$ donc à puissance moyenne finie :
$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\tau)\,\cos(\tau - t)\,d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\tau)\,(\cos(\tau)\cos(t) + \sin(\tau)\sin(t))\,d\tau$.
$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} (\cos(t) \int_0^T \sin(\tau)\,\cos(\tau)\,d\tau + \sin(t) \int_0^T \sin(\tau)\,\sin(\tau)\,d\tau)$.
Calculant :

1. $$\int_0^T \sin(\tau)\cos(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2} \int_0^T \sin(2\,\tau)\,d\tau = -\frac{1}{4} \cos(2\,\tau)|_0^T = -\frac{1}{4} \underbrace{\cos(2\,T)}_{=1} + \frac{1}{4} = 0.$$
2. $$\int_0^T \sin(\tau)^2\,d\tau = \int_0^T \frac{1-\cos(2\,\tau)}{2}\,d\tau = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\,\tau)}{4}|_0^T = \frac{T}{2} - \underbrace{\frac{\sin(2\,T)}{4}}_{=0} = \frac{T}{2}.$$

$$C_{s1s2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sin(t) \frac{T}{2} = \frac{\sin(t)}{2}\,u(t)$$

Corrigé de l'examen de rattrapage de Théorie du signal 2015

Exercice 01 (08 points) :

1. L' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.
   - Le signal s(t) :

$$\mathrm{s(t)} = \mathrm{A\,rect}(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}) = \begin{cases} \mathrm{A} & \mathrm{Si} \quad -\frac{\mathrm{T}}{2} < \mathrm{t} < \frac{\mathrm{T}}{2} \\ 0 & \mathrm{Ailleurs} \end{cases}$$

   Le signal s(t) est un signal à durée finie, à énergie finie et à puissance moyenne nulle.
   - Le signal $\mathrm{s_{2T}(t)}$ est la périodisation de période $2\,\mathrm{T}$ de s(t) donc :

$$\mathrm{s_{2\,T}(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}$$

   Signal $\mathrm{s_{2T}(t)}$ est périodique, à énergie infinie et à puissance moyenne non nulle.

2. Déterminer la transformée de Fourier du signal s(t).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\,e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \frac{2\,A}{\omega}\,\frac{e^{j\,\omega\,\frac{T}{2}} - e^{-j\,\omega\,\frac{T}{2}}}{2j} = A\,T\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$$

3. Écrire $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$ sous forme de produit de convolution de s(t) et un autre signal que vous pécisez et donnez sa décomposition en série de Fourrier.
   * $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$ peut s'écrire fonction du produit de convolution de s(t) et le peigne de Dirac $\delta_{2\,T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t - 2\,n\,T})$), avec $2\,T$ Période du signal .
     $\mathrm{s_{2\,T}(t)} = \mathrm{s(t)} * \delta_{2\,T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s}(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T}))\,\mathrm{d}\tau.$
     $\mathrm{s}(\tau)\,.\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T}))$: ce produit n'est défini que si $\tau = t - 2\,n\,T$ donc :
     $\mathrm{s(t)} * \delta_{2T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}\,\delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T}))\mathrm{d}\tau$
     $\mathrm{s(t - 2\,n\,T)}$ est constante par rapport à τ Alors :
     $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T})\,\mathrm{d}\tau}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}\,.$
     On obtient alors un signal rectangulaire périodique de période $2\,T$.
   * Le peigne de Dirac $\delta_{2\,T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t - 2\,n\,T})$ est un signal périodique qui peut se mettre sous une décomposition en série de Fourier complexe :$\delta_{2\,T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C_n\,e^{jn\omega\,t}}$:
     Avec $\mathrm{C_n} = \frac{1}{2\,T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta\,(t)\mathrm{e^{-jn\omega\,t}\,dt} = \frac{1}{2\,T}.$
     Donc : $\delta_{2\,T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,\mathrm{e^{jn\omega\,t}}$, avec $\omega = \frac{2\pi}{2\,T}$.

4. En déduire la transformée de Fourier du signal $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$.
   D'aprés le théorème de Plancherell :$TF(\mathrm{s(t)} * \delta_{2\,\mathrm{T}}(\mathrm{t})) = \mathrm{S}(\omega)\,.\,\delta_{2\,\mathrm{T}}(\omega)$.
   Sachant que $\mathrm{S}(\omega) = A\,T\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$.
   On calcul $\delta_{2\,\mathrm{T}}(\omega) = \mathrm{TF}(\delta_{2\,\mathrm{T}}(\mathrm{t}))$:

   Sachant la TF de $\mathrm{e^{-j\,\frac{2\pi}{T}\,t}} = 2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\pi}{T})\,.$
   Alors d'aprés la proprietée de la linéarité de la TF on a :
   $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,\mathrm{e^{-jn\,\frac{2\pi}{2\,T}\,t}}$ admet comme TF $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\,\mathrm{n}\,\pi}{2\,\mathrm{T}})$

Finalement la transformée de Fourier est donné par le produit de $S(\omega)\,.\,\delta_{2\,T}(\omega)$:

Soit : $S_{2\,T}(\omega) \;=\; A\,T\dfrac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}\,.\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2\,T}\,2\,\pi\delta(\omega-\dfrac{2\,n\,\pi}{2\,T}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\,\dfrac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}\,\pi\delta(\omega-\dfrac{n\,\pi}{T})$.

C'est un spectre périodique, il se répète sur une période $\omega \;=\; \frac{n\,\pi}{T}$.

Exercice 02 (06 points) :

Pour un un système linéaire la relation entre le signal de sortie et le signal d'entrée :

$$S(P) = H(P).E(P)$$

Donc pour une entrée :

$$e(t) = u(t) \;\Rightarrow\; E(P) \;=\; \frac{1}{P} \;\Rightarrow\; S(P) = H(P).E(P) \;=\; \frac{P^2\,+\,12}{P^2\,(P+2)(P\,+\,3)} \;=\; \frac{A}{(P+2)} \;+\; \frac{B}{(P+3)} \;+\; \frac{C}{P^2} \;+\; \frac{D}{P}$$

Sachant que $P \;=\; -2$ et $P \;=\; -3$ sont des pôles simples alors que $P \;=\; 0$ est un pôle double.

Donc :

$A \;=\; \dfrac{P^2\,+\,12}{P^2\,(P\,+\,3)}|_{P\,=\,-2} \;=\; 4$. $B \;=\; \dfrac{P^2\,+\,12}{P^2\,(P\,+\,2)}|_{P\,=\,-3} \;=\; -\dfrac{7}{3}$.

$C \;=\; \dfrac{P^2\,+\,12}{(P+2)\,(P\,+\,3)}|_{P\,=\,0} \;=\; 2$. $D \;=\; \dfrac{d}{dp}(P^2.\dfrac{P^2\,+\,12}{P^2\,(P\,+\,2)(P+3)}|_{P\,=\,0} \;=\; -\dfrac{5}{3}$.

$$S(P) \;=\; \frac{4}{(P+2)} - \frac{7}{3}\,\frac{1}{(P+3)} \;+\; \frac{2}{P^2} \;-\; \frac{5}{3\,P}$$

Donc d'aprés les propriètés de la TP inverse on a le signal de sortie :

$s(t) = ,=\; 4\,e^{-2\,t}\,u(t) \;-\; \dfrac{7}{3}\,e^{-3\,t}\,u(t) \;+\; 2t\,u(t) - \dfrac{5}{3}u(t) \;=\; (4\,e^{-2\,t} \;-\; \dfrac{7}{3}\,e^{-3\,t} \;+\; 2t - \dfrac{5}{3}\,)\,u(t)\,.$

Exercice 03 (04 points) :

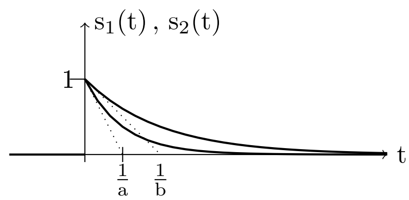
Soit les signaux suivants :

1. $s_1(t) = e^{-a\,t}\,u(t)$.
2. $s_2(t) = e^{-b\,t}\,u(t)$.

Avec a , b des constantes positives.

Calculer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(t)$.

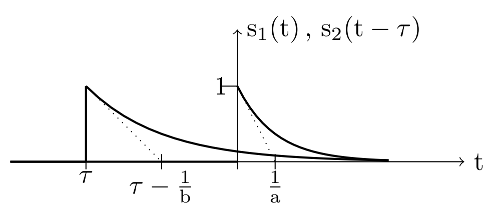
$C_{s1s2}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\,.\,s_2(t-\tau)$



$C_{s1s2}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,a\,t}\,e^{-\,b\,(t-\tau)}\,dt$.

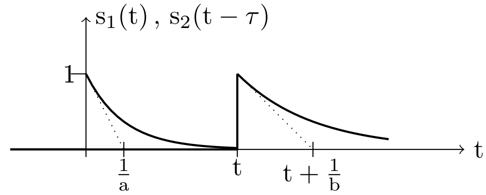
Deux cas peuvent se présenter :

— $\tau \;\leq\; 0$:



On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\,a\,t}\,e^{-\,b\,(t-\tau)}\,dt \;=\; e^{b\,\tau}\int_0^{+\infty} e^{-\,(a+b)\,t}\,dt \;=\; \frac{e^{b\,\tau}}{a\,+\,b}$.

— $\tau \;>\; 0$:



On a : $\displaystyle\int_{\tau}^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-b\,(t-\tau)}\, dt \;=\; e^{b\,\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-a\,\tau} \;=\; \frac{e^{-a\,\tau}}{a\,+\,b}.$

Corrigé de l'examen de Théorie de signal 2016

Exercice 01 (05 points) :

1. Équation mathématique, eénergie puissance :

$$s(t) = \begin{cases} -\pi & \text{Si} \quad -\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \\ \pi & \text{Si} \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -\pi & \text{Si} \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\, dt = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \pi^2\, dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi^2\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \pi^2\, dt = 3\,\pi^2 \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt}_{=3\,\pi^2} == \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (3\,\pi^2) = 0. \quad \text{Puissance moyenne nulle}$$

Le signal s(t) est à énergie finie et à puissance moyenne nulle.

2. $s(t) = -\pi\, \mathrm{rect}(t+1) + \pi\, \mathrm{rect}(t) - \pi\, \mathrm{rect}(t-1)$.
La transformée de Fourrier de rect(t)
$TF(rect(t) = RECT(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t) e^{-j\,\omega t} dt$
$$RECT(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\,\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\,\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\,\frac{\omega}{2}}}{2j} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} = sinc(\frac{\omega}{2})$$
D'aprés les propriètées de la transformée de Fourrier, $TF(s_1(t - t_0)) = S_1(\omega)\, e^{-j\,\omega t_0}$ et le principe de la linéarité on :
$S(\omega) = -\pi\ sinc(\frac{\omega}{2})\, e^{j\,\omega} + \pi\ sinc(\frac{\omega}{2}) - \pi\ sinc(\frac{\omega}{2})\, e^{-j\,\omega}$
$= \pi\ sinc(\frac{\omega}{2})(-e^{j\,\omega} + 1 - e^{-j\,\omega}) = \pi\ sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega)$.

Exercice 02 (05 points) :

Pour un système linéaire la relation entre le signal de sortie et le signal d'entrée est donnée par :

$$S(P) = H(P).E(P)$$

Donc pour $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(P) = 1$, on a

$$S(P) = H(P).E(P) = \frac{2\,P + 1}{(P-2)(P^2+1)} = \frac{A}{P-2} + \frac{B\,P + C}{P^2+1}$$

Avec : $A = \frac{2\,P + 1}{(P^2+1)}\,|_{p=2} = 1$

$$\frac{2\,P + 1}{(P-2)(P^2+1)} = \frac{1}{P-2} + \frac{B\,P + C}{P^2+1}$$

Par réduction aux même dénominateur et par identification on trouve :

$$\begin{cases} 1 + B = 0 \\ C - 2\,B = 2 \\ 1 - 2\,C = 1 \end{cases} \qquad \texttt{Donc:} B = -1, C = 0 \quad \text{Alors} \qquad S(P) = \frac{1}{P-2} - \frac{P}{P^2+1}$$

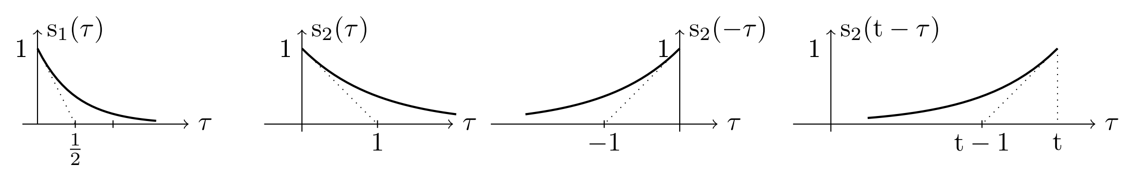
Le signal de sortie est : $s(t) = e^{2t}\,u(t) - \cos(t)\,u(t)$.

Exercice 03 (05 points) :

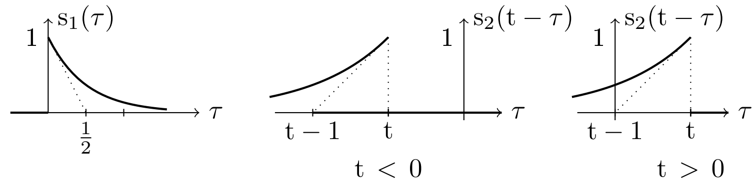
Soient les signaux suivants : $s_1(t) = e^{-2\,t}\,u(t) \qquad s_2(t) = e^{-t}\,u(t)$

Choisir l'une des deux questions :

1. $s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d(\tau)$. Donc on a besoin des sigaux fonction de τ :



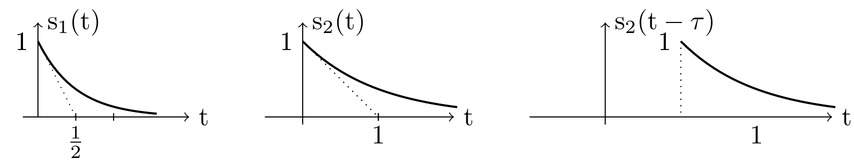
Deux cas peuvent se présenter :



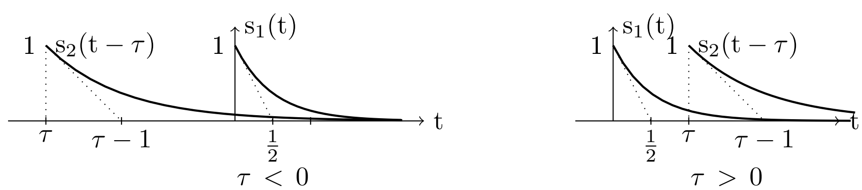
$t < 0$ on a le produit $s_1(\tau)s_2(t-\tau) = 0$, alors $s_1(t) * s_2(t) = 0$
$t > 0$ on a le produit $s_1(\tau)s_2(t-\tau) \neq 0$, alors
$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}\, d\tau = e^{-t} - e^{-2t}$.

$$s_1(t) * s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < 0; \\ e^{-t} - e^{-2t} & \text{Si } t > 0 \end{cases}$$

2. Déterminer et tracer la fonction d'intercorrélation $C_{s1s2}(\tau)$ des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
$C_{s1s2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, s_2(t-\tau)\, d(t)$



Deux cas peuvent se présenter :



$$\tau < 0, \text{ on a : } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\, e^{-(t-\tau)}\, dt = e^{\tau}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\, dt = \frac{e^{\tau}}{3}.$$

$$\tau > 0 : \text{On a : } \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t}\, e^{-(t-\tau)}\, dt = e^{\tau}\int_{\tau}^{+\infty} e^{-3\tau}\, dt = \frac{e^{-2\tau}}{3}.$$

$$C_{s1s2}(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{\tau}}{3} & \text{Si } \tau < 0; \\ \frac{e^{-2\tau}}{3} & \text{Si } t > 0 \end{cases}$$

Exercice 04 **(06 points)** :

1. Donner l'équation mathématique de tri(t), $\delta(t)$ et $\delta_{T_0}(t)$.

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{Si } |t| \leq 1; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{Ou} \quad \text{tri}(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{Si } -1 \leq t \leq 0; \\ 1 - t & \text{Si } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

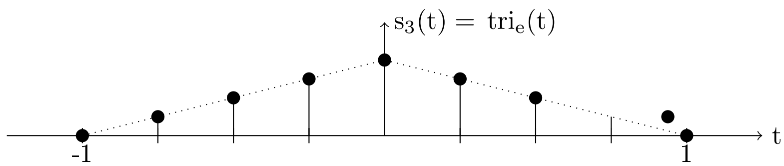
Et :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{Si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \text{ Avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1; \quad \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\,T_0\right).$$

2. Calcul des signaux suivants :
   - $s_1(t) = \text{tri}(t) \,.\, \delta(t) = \text{tri}(0) \,.\, \delta(t) = \delta(t)$, avec $\text{tri}(0) = 1$.
   - $s_2(t) = \text{tri}(t) \,.\, \delta(t - t_0) = \text{tri}(0.5) \,.\, \delta(t - t_0) = 0.5 \,.\, \delta(t - 0.5)$, avec $\text{tri}(0.50) = 0.5$.
   - $s_3(t) = \text{tri}(t) \,.\, \delta_{T_0}(t) = \text{tri}(t) \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\,T_0\right) = \text{tri}(n\,T_0 = n\,0.25) \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n\,T_0\right)$, avec $(n = -4 : +4)$.

- $s_4(t) = tri(t) * \delta(t)$, $\delta(t)$ est l'élément neutre pour le produit de convolution.
  $\int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau)\, \delta(t-\tau))\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(t)\, \delta(t-\tau))\, d\tau$.
  tri(t) est constante par rapport à τ :
  $$tri(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau))\, d\tau}_{=1} = tri(t)\,.$$
- $s_5(t) = tri(t) * \delta(t-t_0)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau)\, \delta(t+t_0-\tau))\, d\tau$.
  $tri(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(t-t_0)\, \delta(t+t_0-\tau))\, d\tau$.
  $tri(t-t_0)$ est constante par rapport à τ :
  $$tri(t-t_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+t_0-\tau))\, d\tau}_{=1},$$
  alors :$s_5(t) = tri(t) * \delta(t-t_0) = tri(t-t_0)\,.$
- $s_6(t) = tri(t) * \delta_{T_0}(t)$, avec$T_0 = 4$.
  $tri(t) * \delta_{T0} = \int_{-\infty}^{+\infty} tri(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau-n\,T_0))\, d\tau.$
  $tri(\tau)\,.\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau+n\,T_0))$: $tri(t) * \delta_{T0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} tri(t-nT_0)\, \delta(t-\tau+n\,T_0))d\tau$
  $tri(t-nT_0)$ est constante par rapport à τ Alors :
  $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} tri(t-nT_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau+n\,T_0))\, d\tau}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} tri(t-nT_0) = tri_{T0}(t).$$
  On obtient alors un signal triangulaire périodique de période T_0.

Le graphe de $s_3(t)$ donnés par :

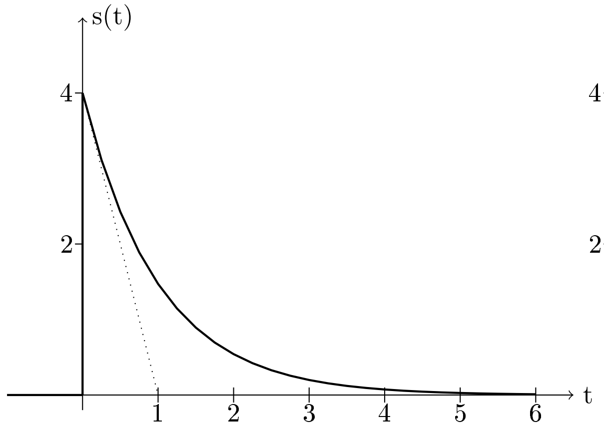


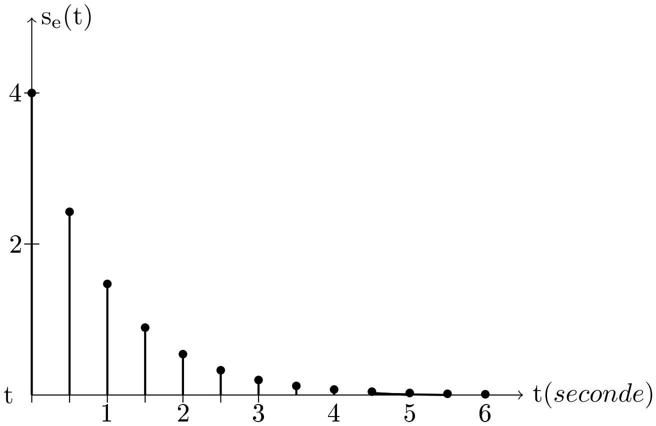
Corrigé de l'examen spécial de Théorie du signal 2016

Exercice 01 **(08 points)** :

Soit le signal s(t) défini par $s(t) = 4\,e^{-t}\,u(t)$,

1. Représenter le signal s(t) sur un intervalle de 6 secondes et d'un pas de 1 seconde.





2. Soit $s_e(t) = s(t)\,.\,\delta_{T_e}(t)$.
   - L'expression générale de $s_e(t)$.

     $s_e(t) = s(t)\,\delta_{T_e}(t) = s(t)\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - k\,T_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - k\,T_e)$

     Le produit $s(t)\delta(t - k\,T_e)$: n'est défini que pour les instants $t = k\,T_e$ avec $k > 0$.

     Donc : $s_e(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} s(KT_e)\delta(t - k\,T_e)$.

     $s_e(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 4\,e^{-k\,T_e}\,\delta(t - k\,T_e)$.

     C'est une suite de pics de Dirac dont les poids(les amplitudes) sont les valeurs du signal s(t) aux instants KT_e c'est à dire les valeurs $s(KT_e) = 4\,e^{-k\,T_e}$ avec $k = 0 \ldots 12$..
   - La multiplication du signal continu s(t) et d'un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ représente une opération d' échantillonnage idéal.
   - Représenter le signal $s_e(t)$ pour $T_e = 0.5$ secondes.

- $S(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $s(t) = 4\,e^{-t}\,u(t)$,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-\jmath\,\omega\,t}\,dt = \int_0^{\infty} 4\,e^{-t}\,e^{-\jmath\,\omega\,t} = \int_0^{\infty} 4\,e^{-t\,(1+\jmath\,\omega)}\,dt = \frac{4}{1+\jmath\,\omega}$$

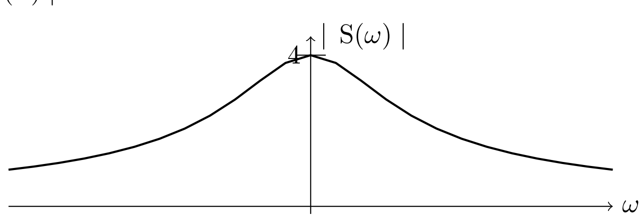
$$\mid S(\omega)\mid = \frac{4}{1+\omega^2}$$

$S(\omega)$ est fonction complexe qui a pour amplitude $\mid S(\omega) = \dfrac{4}{1+\omega^2}\mid$:

$$\lim_{\omega\to-\infty}\mid S(\omega)\mid = 0 \quad \lim_{\omega\to 0}\mid S(\omega)\mid = 4 \quad \lim_{\omega\to\infty}\mid S(\omega)\mid = 0$$

Donc le spectre d'amplitude est une guassiènne croissante de $\omega \to -\infty$ à une valeure maximale 4 pour $\omega = 0$ et décroissante vers 0 quand $\omega \to \infty$.

- Représenter le module $\mid S(\omega)\mid$.



- Décomposer en série de Fourier complexe $\delta_{T_e}(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier sachant que la TF d'une constante : a est $2\,\mathrm{a}\,\pi\,\delta\,(\omega)$. $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \mathrm{k}\,\mathrm{T_e})$ qui est un signal périodique qui peut être décomposer en série de Fourrier complexes comme :
  $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C_n}\, e^{-j\,n\,\omega_e\,t}$, avec $\mathrm{C_n} = \frac{1}{\mathrm{T_e}} \int_{\frac{-\mathrm{T_e}}{2}}^{\frac{\mathrm{T_e}}{2}} \delta(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{T_e}}$ et $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$.
  $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{-j\,n\,\omega_e\,t}$.
  Calculant la transformée de Fourier de $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{-j\,n\,\omega_e\,t}$.
  sachant que que la TF d'une constante : $\frac{1}{\mathrm{T_e}}$ est $2\,\pi\,\frac{1}{\mathrm{T_e}}\delta\,(\omega)$.
  Et comme $\frac{1}{\mathrm{T_e}} e^{-j\omega_e\,t}$ admet comme transformée de Fourrier $2\,\pi\,\frac{1}{\mathrm{T_e}}\delta(\omega - \omega_e)$.
  Alors $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{-j\,n\,2\,\pi\,\omega_e\,t}$ admet comme TF : $\frac{1}{\mathrm{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\,\omega_e)$.
  La TF d'un peigne de Dirac en temps est un peigne de Dirac en fréquence.

- La transformée de Fourrier d'un produit de deux signaux $\mathrm{s(t)}_1$ et $\mathrm{s(t)}_2$ est donnée d'aprés le théorème de Plancherell par le produit de convolution des transformées de Fourrier $\mathrm{S}(\omega)_1$ et $\mathrm{S}(\omega)_2$ soit :
  $\mathrm{s_e(t)} = \mathrm{s(t)}\,\delta_{T_e}(t)$, avec $\mathrm{S}(\omega) = \frac{4}{1 + \jmath\omega}$
  Donc $\mathrm{S_e}(\omega)$ est donnée par :$\mathrm{S}(\omega) * \mathrm{S}_{\delta_{T_e}}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\omega) * \delta(\omega - n\,\omega_e)$.
  Pour le produit de convolution d'un signal et le peigne de Dirac donne un spectre périodique donc :
  $\mathrm{S_e}(\omega) = \mathrm{S}(\omega) * \mathrm{S}_{\delta_{T_e}}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\omega - \mathrm{n}\,\omega_\mathrm{e})$.
  On obtient alors un spectre infini qui provient de la périodisation du signal origine autour des multiples de la pulsation d'échantillonnage.

Exercice 02 (08 points) :

Pour une entrée : une cosinusoïde $\mathrm{e(t)} = 2\,\cos(2\,t)u(t) \Rightarrow E(P) = \frac{2\,P}{P^2 + 4}$, et une fonction de transfert $\mathrm{H(P)} = \frac{10}{P^2 + 4\,P + 8}$, le signal de sortie est donné par :

$$S(P) = H(P).E(P) = \frac{20\,P}{(P^2 + 4P + 8)(P^2 + 4)} = \frac{AP + B}{P^2 + 4P + 8} + \frac{CP + D}{P^2 + 4}$$

Par réduction aux même dénominateur et par identification on trouve les constantes :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 4C + D = 0 \\ 4\,A + 8\,C + 4\,D = 20 \\ 4\,B + 8\,D = 0 \end{cases}$$

Donc : $B = -8; D = 4; A = -1; C = 1$.

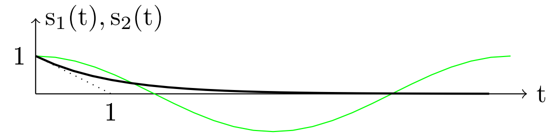
$$S(P) = \frac{-P - 8}{P^2 + 4P + 8} + \frac{P + 4}{P^2 + 4} = -\frac{P + 2}{(P + 2)^2 + 2^2} - 3\,\frac{2}{(P + 2)^2 + 2^2} + \frac{P}{P^2 + 4} + 2\,\frac{2}{P^2 + 4}$$

Donc le signal de sortie est :

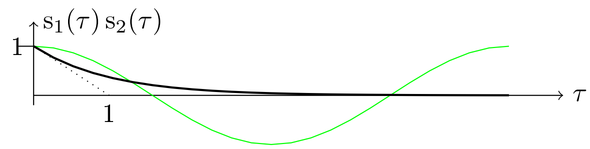
$$s(t) = -\cos(2\,t)\,e^{-2\,t}\,u(t) - 3\,\sin(2\,t))\,e^{-2\,t}\,u(t) + \cos(2\,t)\,u(t) + 2\,\sin(2\,t)\,u(t)$$

Exercice 03 (06 points) :

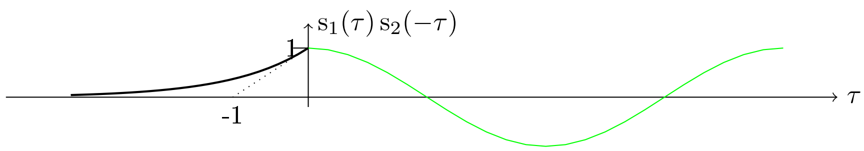
1. Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.



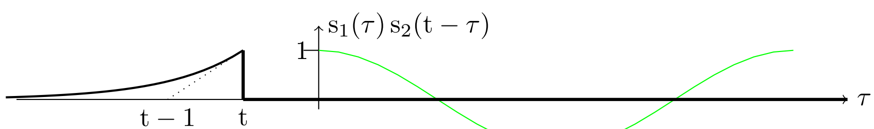
2. Le produit de convolution des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Donc on a besoin des signaux avec variable de temps τ. Pour $s_1(\tau)\,s_2(\tau)$.



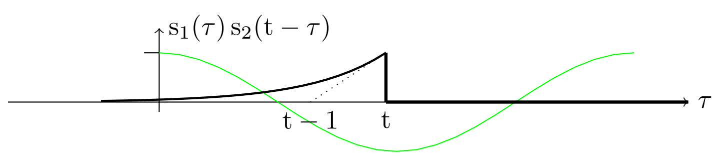
Pour $s_1(\tau)\,s_2(-\tau)$.



Pour les signaux $s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)$, deux cas peuvent se présenter :
$t < 0$:



Dans ce cas le produit $s_1(\tau)\,s_2(t-\tau) = 0$ donc , $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d(\tau) = 0$.
$t > 0$



Dans ce cas $s_1(\tau)\,s_2(t-\tau) \neq 0$ entre 0 et t donc :

$$\int_0^t \cos(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}d\tau.$$

Cette intégration se fait par partie on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \cos(\tau)\,d\tau$:

$$\int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau.$$

ET :
on pose $V = e^{\tau}$, et $dU = \sin(\tau)\,d\tau$:

$$\int_0^t \sin(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [-\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + \int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau.$$

Donc :

$$\int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + [\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t - \int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau \quad .$$

$$2\int_0^t \cos(\tau)\,e^{\tau}\,d\tau = [\cos(\tau)\,e^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\,e^{\tau}]_0^t$$

$\int_0^t s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}e^{-t}(\sin(t)\,e^t + \cos(t)\,e^t - 1) = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t) - e^{-t})\,u(t)$.

$$s(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t) - e^{-t})\,u(t)$$

Corrigé de l'examen de rattrapage de Théorie du signal 2016

Exercice 01 (08 points) :

1. L' équation mathématique, la nature et le type énergitique de chaque signal.
   - Le signal s(t) :

$$\mathrm{s(t)} = 2\,\mathrm{rect}(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}) = \begin{cases} 2 & \text{Si} \quad -\frac{T}{2} < \mathrm{t} < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

   Le signal s(t) est un signal à durée finie, à énergie finie et à puissance moyenne nulle.
   - Le signal $\mathrm{s_{2T}(t)}$ est la périodisation de période $2\,\mathrm{T}$ de s(t) donc :

$$\mathrm{s_{2\,T}(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}$$

   Signal $\mathrm{s_{2T}(t)}$ est périodique, à énergie infinie et à puissance moyenne non nulle.
2. Déterminer la transformée de Fourier du signal s(t).

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\,\omega\, t}\, dt = 2\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j\,\omega\, t}\, dt = \frac{4}{\omega}\,\frac{e^{j\,\omega\,\frac{T}{2}} - e^{-j\,\omega\,\frac{T}{2}}}{2j} = 2\,T\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$$

3. Écrire $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$ sous forme de produit de convolution de s(t) et un autre signal que vous pécisez et donnez sa décomposition en série de Fourrier.
   * $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$ peut s'écrire fonction du produit de convolution de s(t) et le peigne de Dirac $\delta_{2\,T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t - 2\,n\,T})$),
   avec $2\,T$ Période du signal .
   $\mathrm{s_{2\,T}(t)} = \mathrm{s(t)} * \delta_{2\,T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s}(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau - 2\,\mathrm{n\,T}))\, \mathrm{d}\tau.$
   $\mathrm{s}(\tau) . \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T}))$: ce produit n'est défini que si $\tau = t - 2\,n\,T$ donc :
   $\mathrm{s(t)} * \delta_{2T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}\, \delta(\mathrm{t} - \tau - 2\,\mathrm{n\,T}))\mathrm{d}\tau$
   $\mathrm{s(t - 2\,n\,T)}$ est constante par rapport à τ Alors :
   $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t} - \tau + 2\,\mathrm{n\,T})\, \mathrm{d}\tau}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t - 2\,n\,T)}\,.$
   On obtient alors un signal rectangulaire périodique de période $2\,T$.
   * Le peigne de Dirac $\delta_{2\,T} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t - 2\,n\,T})$ est un signal périodique qui peut se mettre sous une décomposition en série de Fourier complexe :$\delta_{2\,T} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C_n\, e^{-j\,n\,\omega\,t}}$:
   Avec $\mathrm{C_n} = \dfrac{1}{2\,T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta\,(t)\mathrm{e^{-j\,n\,\omega\,t}\,dt} = \dfrac{1}{2\,T}.$
   Donc : $\delta_{2\,T} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,\mathrm{e^{-j\,n\,\omega\,t}}$, avec $\omega = \frac{2\pi}{2\,T}$.
4. En déduire la transformée de Fourier du signal $\mathrm{s_{2\,T}(t)}$.
   D'aprés le théorème de Plancherell :$TF(\mathrm{s(t)} * \delta_{2\,\mathrm{T}}(\mathrm{t})) = \mathrm{S}(\omega) . \delta_{2\,\mathrm{T}}(\omega)$.
   Sachant que $\mathrm{S}(\omega) = 2\,T\frac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}$.
   On calcul $\delta_{2\,\mathrm{T}}(\omega) = \mathrm{TF}(\delta_{2\,\mathrm{T}}(\mathrm{t}))$:

   Sachant la TF de $\mathrm{e^{-j\,\frac{2\pi}{T}\,t}} = 2\,\pi\delta(\omega - \dfrac{2\pi}{T})$.
   Alors d'aprés la proprièteé de la linéarité de la TF on a :
   $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,\mathrm{e^{-jn\,\frac{2\pi}{2\,T}\,t}}$ admet comme TF $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\,\mathrm{T}}\,2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\,\mathrm{n}\,\pi}{2\,\mathrm{T}})$

Finalement la transformée de Fourier est donné par un simple produit de $S(\omega)\,.\,\delta_{2\,T}(\omega)$:

Soit : $S_{2\,T}(\omega) \;=\; 2\,T\dfrac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}\,.\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2\,T}\,2\,\pi\delta(\omega-\dfrac{2\,n\,\pi}{2\,T}) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\,\dfrac{\sin(\omega\frac{T}{2})}{\omega\frac{T}{2}}\,\pi\delta(\omega-\dfrac{n\,\pi}{T}).$

C'est un spectre périodique, il se répète sur une période $\omega \;=\; \frac{n\,\pi}{T}$.

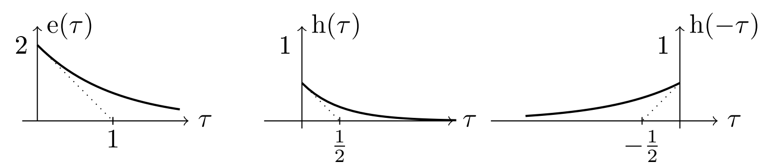
Exercice 02 (08 points) :

Le signal de sortie d'un système linéaire invariane dans le domaine Laplacien est donnée par :

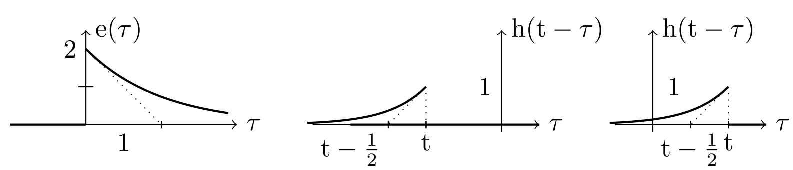
$$S(P) \;=\; \frac{2}{(P+1)(P\,+\,2)}$$

Calculer la sortie $s(t)$ du système en utilisant :

* La décomposition en fractions simples. Ce signal peut être décomposer en polynomes simples comme suivant :
  $S(P) = \dfrac{2}{(P+1)\,(P+2)} = \dfrac{A}{P+1} + \dfrac{B}{P+2}$
  Avec : $A \;=\; \dfrac{2}{P\,+\,2}|_{P\,=\,-1} \;=\; 2$
  $B \;=\; \dfrac{2}{P\,+\,1}|_{P\,=\,-2} \;=\; -2$ Donc : $S(P) = \dfrac{2}{(P+1)\,(P+2)} = \dfrac{2}{P+1} \;-\; \dfrac{2}{P+2}$,
  qui admet comme transformée inverse :
  $s(t) = 2\,u(t)\,e^{-\,t} \;-\; 2\,u(t)\,e^{-2\,t}$.
* Le produit de convolution de deux signaux que vous précisez .
  Si $S(P) = \dfrac{2}{(P+1)\,(P+2)} = \dfrac{2}{P+1}\,.\,\dfrac{1}{P+2}$ et D'aprés le théorème de Plancherell si on prend $E(P) = \dfrac{2}{P+1}$ et $H(P) = \dfrac{1}{P+2}$,
  alors le signal de sortie sera donné par Le produit de convolution de :
  $e(t) \;=\; 2\,u(t)\,e^{-\,t}$ et $h(t) \;=\; u(t)\,e^{-2\,t}$:
  $s(t) \;=\; e(t) * h(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d(\tau)$.
  Donc on a besoin des signaux fonction de τ :



Deux cas peuvent se présenter :



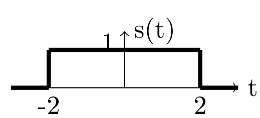
$t \;<\; 0$ on a le produit $e(\tau)h(t-\tau) \;=\; 0$, alors $e(t) * h(t) \;=\; 0$

$t \;>\; 0$ on a le produit $e(\tau)h(t-\tau) \;\neq\; 0$, alors

$e(t) * h(t) \;=\; \int_0^t\, 2\,e^{-\,\tau}\;\; e^{-\,2\,(t-\tau)}\;d\tau \;=\; 2\;e^{-\,2\,t}\,\int_0^t\; e^{\tau}\,d\tau \;=\; 2\,e^{-\,t} \;-\; 2\,e^{-2\,t}$ avec $t \;>\; 0$. on retrouve le même résultat.

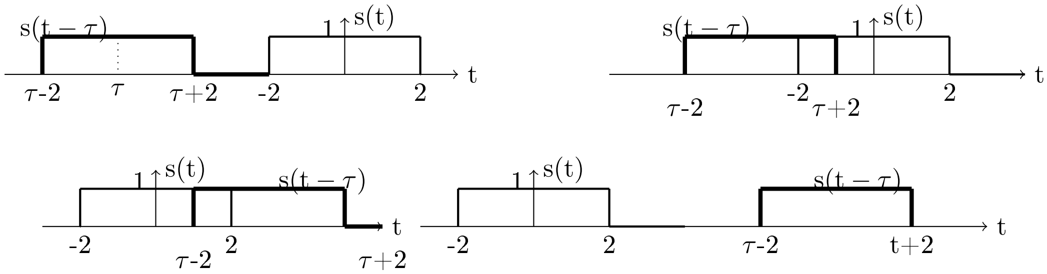
Exercice 04 (04 points) :

Soit $s(t)$ un signal défini par :



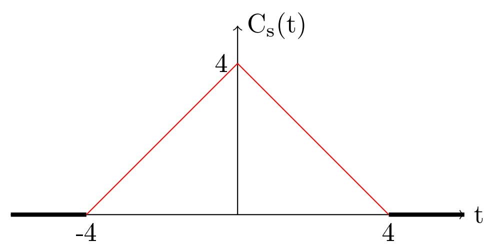
1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_s(\tau)$.

$$C_s(\tau) \; = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, s(t-\tau)\, d(t)$$



Quatre cas peuvent se présenter :
— $\tau \; \leq \; -4$: Dans ce cas $s(t)\, s(t-\tau) \; = \; 0$ donc $C_s(\tau) \; = \; 0$
— $-4 \leq \; \tau \; \leq \; 0$: $C_s(\tau) \; = \; \int_{-2}^{\tau+2} 1\, dt \; = \; \tau \; + 4.$
— $0 \leq \tau \; \leq \; 4$: $C_s(\tau)) \; = \; \int_{\tau-2}^{+2} 1\, dt \; = \; \tau \; - 4.$
— $\tau \; > \; 4$: Dans ce cas $s(t)\, s(t-\tau) \; = \; 0$ donc $C_s(\tau) \; = \; 0$
Donc :

$$C_s(t) \; = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad < t < -4 \\ t \; + 4 & \text{Si} \quad -4 < t < 0 \\ 4 \; - \; t & \text{Si} \quad 0 < t < 4 \\ 0 & \text{Sit} > 4 \end{cases}$$



2. En déduire l'énergie du signal.$W_{tot} \; = \; C_s(0) \; = \; 4.$

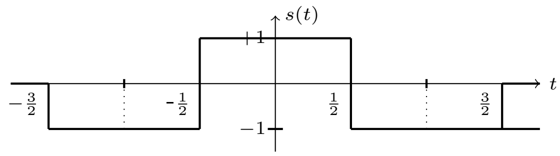
Corrigé de l'examen de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (07 points) :

1. Déterminer et tracer le signal $s_1(t)$:
   — Equation mathématique

$$s_1(t) = \frac{d\,s(t)}{d\,t} = \begin{cases} -1 & \text{Si} \quad -\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \\ +1 & \text{Si} \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{Si} \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

   — Graphe :



2. Déterminer son énergie et sa puissance moyenne.

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\,dt = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} (-1)^2\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1)^2\,dt = 3 \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt}_{=3} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (3) = 0. \quad \text{Puissance moyenne nulle}$$

   Le signal s(t) est à énergie finie et à puissance moyenne nulle.

3. $s_1(t)$ fonction des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalés de la forme $A\,\mathrm{rect}(t - t_0)$.
   $s_1(t) = -\mathrm{rect}(t+1) + \mathrm{rect}(t) - \mathrm{rect}(t-1)$

4. Déterminer la transformée de Fourier rect(t) et en déduire $S_1(\omega)$ et $S(\omega)$.
   — La transformée de Fourier de rect(t)
   $TF(rect(t)) = RECT(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)e^{-j\,\omega t}dt$
   $RECT(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\,\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\,\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\,\frac{\omega}{2}}}{2j} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} = sinc(\frac{\omega}{2}).$
   — D'aprés les propriètées de la transformée de Fourier, le décalage en temps :et le principe de la linéarité on a :

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= -\,sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{j\,\omega} + sinc(\frac{\omega}{2}) - sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{-j\,\omega} \\ &= sinc(\frac{\omega}{2})(-\,e^{j\,\omega} + 1 - e^{-j\,\omega}) \\ &= sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega) \end{aligned}$$

   — La transformée de Fourier du signal s(t).
   $s_1(t) = \overset{TF}{\longmapsto} S_1(\omega) = sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega)$
   Et d'autr part :
   $s_1(t) = \frac{d\,s(t)}{d\,t} \overset{TF}{\longmapsto} S_1(\omega) = j\omega\,S(\omega)$
   Et par iddentification :
   $j\omega\,S(\omega) = sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega).$
   $s(t) \overset{TF}{\longmapsto} S(\omega) = \frac{1}{j\omega}\,sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega)$

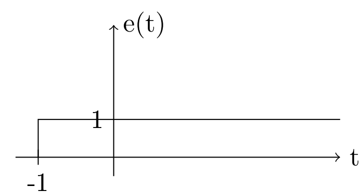
Exercice 02 (05 points) :

Calcul de la sortie s(t) d'un système linéaire invariant ayant pour entrée $e(t) = u(t+1)$ et pour fonction de transfert $H(P) = \frac{3}{P + 2}$.

1. Utiliser la transformée de Laplace.
   Dans le domaine Laplacien la sortie d'un système linéaire invariant est donnée par :
   $\mathrm{S(P)} = \mathrm{E(P).\,H(P)}$.
   Alors calculant les TPs de chaque signal : $\mathrm{e(t)} = \mathrm{u(t+1)}, \overset{TP}{\longmapsto} \quad \mathrm{E(P)} = \dfrac{\mathrm{e^P}}{P}$
   et pour fonction de transfert $\mathrm{H(P)} = \dfrac{3}{P+2}$.
   $\mathrm{S(P)} = \mathrm{E(P).\,H(P)} = \dfrac{3\,e^P}{P(P+2)}$ qui peut se mettre sous la forme :
   $\mathrm{S(P} = \dfrac{3\,\mathrm{e^P}}{\mathrm{P(P+2)}} = \mathrm{e^P}\,(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}} + \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{P+2}})$ Avec :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{S(P)}\,P|_{p=0} = \frac{3}{2} \\ \mathrm{B} &= \mathrm{S(P)}\ \mathrm{(P+2)}|_{\mathrm{p}=-2} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

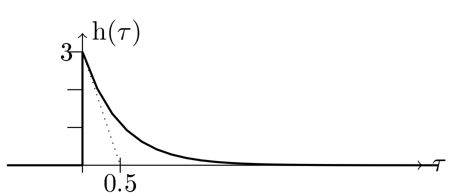
   $\mathrm{S(P)} = \dfrac{3\,\mathrm{e^P}}{\mathrm{P(P+2)}} = \dfrac{3\,\mathrm{e^P}}{2}(\dfrac{1}{\mathrm{P}} - \dfrac{1}{\mathrm{P+2}})$.
   Pour retrouver s(t) on utilise la transformée de Laplace inverse de S(P).
   $\mathrm{S(P)} = \dfrac{3}{2}(\dfrac{e^P}{P} - \dfrac{e^P}{P+2}) \overset{TP}{\longmapsto} \mathrm{s(t)} = \dfrac{3}{2}\mathrm{u(t+1)} - \mathrm{u(t+1)\,e^{-2(t+1)}} = \dfrac{3}{2}\mathrm{u(t+1)}\,(1 - e^{-2(t+1)})$
2. Utiliser le produit de convolution. Dans le domaine temporel la sortie d'un système linéaire invariant est donnée par :
   $\mathrm{s(t)} = \mathrm{e(t)} * \mathrm{h(t)}$.
   Connaissant $\mathrm{e(t)} = \mathrm{u(t+1)}$ et $\mathrm{H(P)} \overset{\mathrm{TP}^{-1}}{\longmapsto} \mathrm{h(t)} = 3\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{t}}\mathrm{u(t)}$

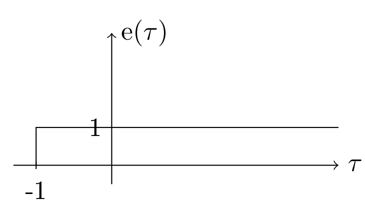


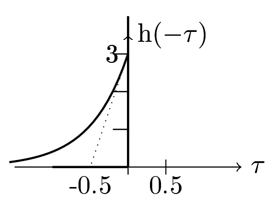
   D'aprés la définition :

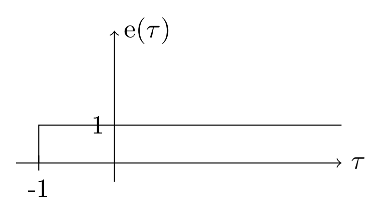
$$\mathrm{s(t)} = \mathrm{e(t)} * \mathrm{h(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}(\tau)\,\mathrm{h}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{d}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}(\mathrm{t}-\tau)\,\mathrm{h}(\tau)\,\mathrm{d}(\tau)$$

   Donc on a besoin des signaux suivants :Signaux avec variable de temps τ

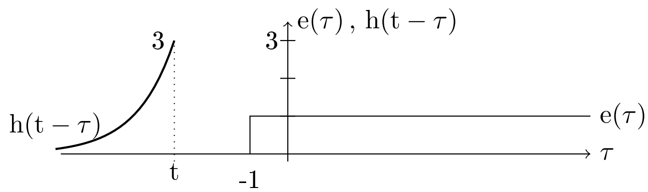




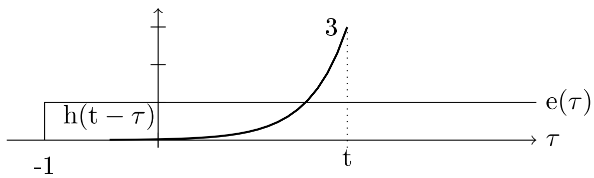




   Deux cas peuvent se présenter :
   $\mathrm{t} < -1$:



Dans ce cas le produit $e(\tau)\, h(t-\tau) = 0$ donc $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d(\tau) = 0$.
$t > -1$

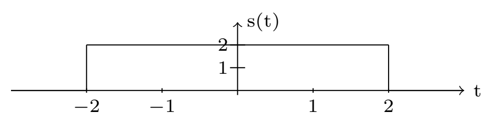


Dans ce cas $e(\tau)\, h(t-\tau) \neq 0$ donc :
$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{t} 3\, e^{-2\,(t-\tau)}\, d\tau$.
Donc : $s(t) = 3\, e^{-2\,t} \int_{-1}^{t} e^{2\,\tau}\, d\tau = \frac{3}{2}\, e^{-2\,t}\, (e^{2\,t} - e^{-2}) = \frac{3}{2}\, (1 - e^{-2(1+t)}) u(t+1)$.
$s(t)$ n'est défini que si $t > -1$.
On retrouve le même résultat qu'en premier.

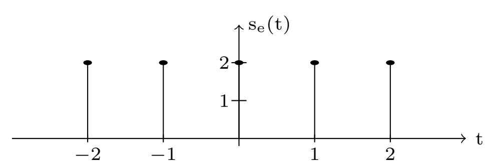
Exercice 03 (06 points) :

Soit un signal causal défini par $s(t) = \begin{cases} 2 & \text{Si } |t| < 2, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Représenter le signal s(t).



2. Soit $s_e(t) = s(t)\,.\,\delta_{T_e}(t)$, avec $\delta_{T_e}(t)$ le peigne de Dirac de période T_e :
   - Donner l'expression générale de $s_e(t)$ et donner le type d'opération éffectuée.
     $s_e(t) = s(t)\,.\,\delta_{T_e}(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\, T_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t - n\, T_e)$
     Avec $s(t)\delta(t - k\, T_e)$: n'est défini que pour les instants $t = n\, T_e$.
     Donc :
     $$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e)\delta(t - n\, T_e).$$
     C'est une suite de pics de Dirac dont les poids(les amplitudes) sont les valeurs du signal s(t) aux instants nT_e c'est à dire les valeurs $s(n) = s(nT_e) = 2$.
     $$s_e(t) = \sum_{n=-2}^{+2} 2\, \delta(t - n\, T_e) = 2\, \delta(t+2) + 2\, \delta(t+1) + 2\, \delta(t) + 2\, \delta(t-1) + 2\, \delta(t-2)\,.$$
     La multiplication du signal continu s(t) et d'un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ représente une opération d' échantillonnage idéal.
   - Représenter le signal $s_e(t)$ pour $T_e = 1$.



3. Déterminer $S(\omega)$ la transformée de Fourier du signal s(t) sachant que $rec(t) \overset{TF}{\longmapsto} sinc(\frac{\omega}{2})$.
   En appliqunat la propriètè de changement d'échelle :
   $x(t) \overset{TF}{\longmapsto} X(\omega)$
   $alors. x(a\, t) \overset{TF}{\longmapsto} \frac{1}{a} X(\frac{\omega}{a})$ et $a = \frac{1}{4}$:
   $s(t) = rec(\frac{t}{4}) \overset{TF}{\longmapsto} 4\, sinc(2\, \omega)$.

4. Décomposer en série de Fourier complexe $\delta_{T_e}(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier, sachant que la TF d'une constante a est $2\,\pi\,\mathrm{a}\,\delta\,(\omega)$.
   $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t}-\mathrm{k}\,\mathrm{T_e})$ qui est un signal périodique qui peut être décomposer en série de Fourrier complexes comme :
   $\delta_{T_e}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C_n}\, e^{j\,n\,\omega_e\,t}$, avec $\mathrm{C_n} = \dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \displaystyle\int_{\frac{-\mathrm{T_e}}{2}}^{\frac{\mathrm{T_e}}{2}} \delta(t)\, e^{-j\,n\,\omega_e\,t}\mathrm{dt} = \dfrac{1}{\mathrm{T_e}}$ et $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$.
   $\delta_{T_e}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{j\,n\,\omega_e\,t}$.
   Calculant la transformée de Fourier de $\delta_{T_e}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{j\,n\,\omega_e\,t}$.
   sachant que que la TF d'une constante : $\dfrac{1}{\mathrm{T_e}}$ est $2\,\pi\,\dfrac{1}{\mathrm{T_e}}\delta\,(\omega)$.
   Et comme $\dfrac{1}{\mathrm{T_e}} e^{j\omega_e\,t}$ admet comme transformée de Fourrier $2\,\pi\,\dfrac{1}{\mathrm{T_e}}\delta(\omega+\omega_e)$.
   Alors $\delta_{T_e}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{T_e}}\, e^{j\,n\,2\,\pi\,\omega_e\,t}$ admet comme TF : $\dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega+\,n\,\omega_e)$.
   La TF d'un peigne de Dirac en temps est un peigne de Dirac en fréquence.

5. Déterminer l'expression de $\mathrm{S_e}(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $\mathrm{s_e(t)}$.
   La transformée de Fourrier d'un produit de deux signaux $\mathrm{s(t)_1}$ et $\mathrm{s(t)_2}$ est donnée d'aprés le dexième théorème de Plancherell par le produit de convolution des transformées de Fourrier $\mathrm{S}(\omega)_1$ et $\mathrm{S}(\omega)_2$ soit :
   $\mathrm{s_e(t)} = \mathrm{s(t)}\,\delta_{T_e}(t)$, avec $\mathrm{S}(\omega) = 4\,\mathrm{sinc}(2\,\omega)$

   Donc $\mathrm{S_e}(\omega)$ est donnée par :$\mathrm{S}(\omega) * \mathrm{S}_{\delta_{T_e}}(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{T_e}} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\omega) * \delta(\omega-\,n\,\omega_e)$.
   Pour le produit de convolution d'un signal et le peigne de Dirac donne un spectre périodique donc :
   $\mathrm{S_e}(\omega) = \mathrm{S}(\omega) * \mathrm{S}_{\delta_{T_e}}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(\omega-\,\mathrm{n}\,\omega_\mathrm{e})$.
   On obtient alors un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre origine autour des multiples de la pulsation d'échantillonnage.

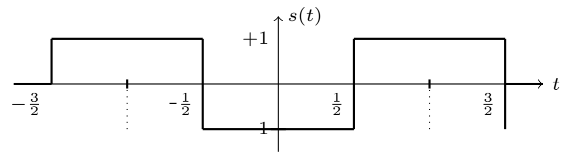
Corrigé de l'examen de remplacement de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (07 points) :

1. Déterminer et tracer le signal $s_1(t)$:
   - Equation mathématique

$$s_1(t) = \frac{d\,s(t)}{d\,t} = \begin{cases} +1 & \text{Si} \quad -\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2} \\ -1 & \text{Si} \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ +1 & \text{Si} \quad \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

   - Graphe :



2. Déterminer son énergie et sa puissance moyenne.

$$W_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\,dt = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} (-1)^2\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1)^2\,dt = 3 \quad \text{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt}_{=3} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (3) = 0. \quad \text{Puissance moyenne nulle}$$

Le signal s(t) est à énergie finie et à puissance moyenne nulle.

3. $s_1(t)$ fonction des sommes où des différences des impulsions rectangulaires unitaires décalés de la forme $A\,\mathrm{rect}(t - t_0)$.
   $s_1(t) = -\mathrm{rect}(t+1) + \mathrm{rect}(t) - \mathrm{rect}(t-1)$

4. Déterminer la transformée de Fourier rect(t) et en déduire $S_1(\omega)$ et $S(\omega)$.
   - La transformée de Fourier de rect(t)
     $TF(rect(t)) = RECT(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)e^{-j\,\omega t}dt$
     $RECT(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\,\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\,\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}) = \frac{2}{\omega}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\,\frac{\omega}{2}}}{2j} = \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} = sinc(\frac{\omega}{2}).$
   - D'aprés les propriètées de la transformée de Fourier, le décalage en temps :et le principe de la linéarité on a :

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= -\,sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{j\,\omega} + sinc(\frac{\omega}{2}) - sinc(\frac{\omega}{2})\,e^{-j\,\omega} \\ &= sinc(\frac{\omega}{2})(-\,e^{j\,\omega} + 1 - e^{-j\,\omega}) \\ &= sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega) \end{aligned}$$

   - La transformée de Fourier du signal s(t) .
     $s_1(t) = \stackrel{TF}{\longmapsto} S_1(\omega) = sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega)$
     Et d'autr part :
     $s_1(t) = \frac{d\,s(t)}{d\,t} \stackrel{TF}{\longmapsto} S_1(\omega) = j\omega\,S(\omega)$
     Et par iddentification :
     $j\omega\,S(\omega) = sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega).$
     $s(t) \stackrel{TF}{\longmapsto} S(\omega) = \frac{1}{j\omega}\,sinc(\frac{\omega}{2})\,(1 - 2\cos\omega)$

Exercice 02 (06 points) :

On considère la transformée de Laplace d'un signal s(t) définie par :

$$S(P) = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)}$$

On veut déterminer le signal s(t) de deux façons :

1. Par décomposition en fractions simples.

$$S(P) = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)} = \frac{A}{(P+1)} + \frac{B\,P + C}{(P^2+1)}$$

A $= \frac{1}{P^2+1}|_{P=-1} = \frac{1}{2}$.
Par réduction au même dénominateur on trouve :
B $= -\frac{1}{2}$. C $= \frac{1}{2}$.

$$S(P) = \frac{1}{2}\frac{1}{P+1} - \frac{1}{2}\frac{P-1}{(P^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(P+1)} - \frac{1}{2}\frac{P}{P^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{P^2+1}$$

Donc d'aprés les propriétés de la TP inverse on a le signal de sortie est :
$s(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\,u(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\,u(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\,u(t) = \frac{1}{2}\,(e^{-t} - \cos(t) + \sin(t)\,)\,u(t)$.

2. Par produit de convolution.

$$S(P) = \frac{1}{(P+1)(P^2+1)}$$

On considère que S(P) est le produit de deux transformées de Laplace avec :

$$S_1(P) = \frac{1}{(P+1)} \qquad S_2(P) = \frac{1}{(P^2+1)}$$

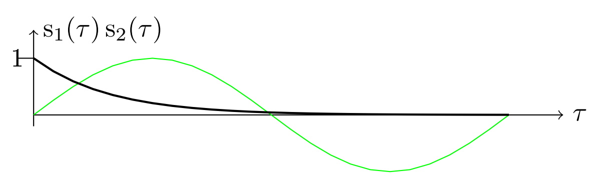
Leurs transformées inverses sont :

$$s_1(t) = e^{-t}\,u(t) \qquad s_2(t) = \sin(t)\,u(t)$$

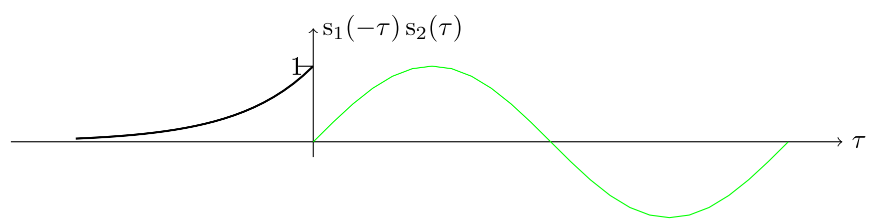
Le produit des transformées de Laplace se traduit dans le domaine temps par un produit de convolution des transformées inverses donc :

$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)\,d(\tau)$$

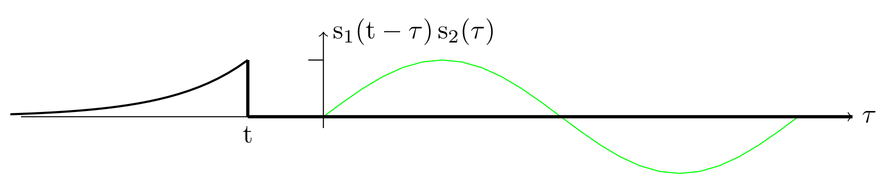
Donc on a besoin des signaux avec variable de temps τ.
Pour $s_1(\tau)\,s_2(\tau)$.



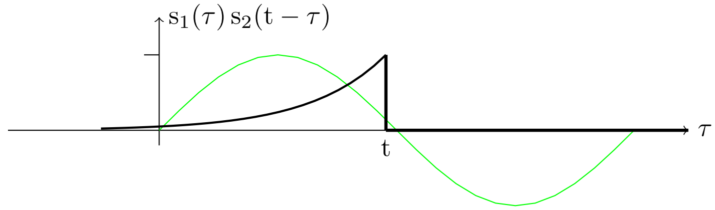
Pour $s_1(-\tau)\,s_2(\tau)$.



Pour les signaux $s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)$, deux cas peuvent se présenter :
t $<$ 0 :



Dans ce cas le produit $\mathrm{s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)} = 0$ donc , $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)\,d(\tau)} = 0$.
$\mathrm{t} > 0$



Dans ce cas $\mathrm{s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)} \neq 0$ entre 0 et t donc :
$\int_0^t \mathrm{e^{-(t-\tau)}} \sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e^{-t}} \int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau$.
Cette intégration se fait par partie on pose $\mathrm{V} = \mathrm{e}^{\tau}$, et $\mathrm{dU} = \sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$:
$\int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = [-\cos(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t + \int_0^t \cos(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau$.
ET :
on pose $\mathrm{V} = \mathrm{e}^{\tau}$, et $\mathrm{dU} = \cos(\tau)\,\mathrm{d}\tau$:
$\int_0^t \cos(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = [\sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau$.
Donc :
$\int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = [-\cos(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t - \int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau$.
$2\int_0^t \sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = [-\cos(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t + [\sin(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}]_0^t$

$\int_0^t \mathrm{s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{e^{-t}}(\sin(\mathrm{t})\,\mathrm{e^t} - \cos(\mathrm{t})\,\mathrm{e^t} + 1) = \frac{1}{2}(\mathrm{e^{-t}} + \sin(\mathrm{t}) - \cos(\mathrm{t}))\,\mathrm{u(t)}$.

Donc :

$$\mathrm{s(t)} = \frac{1}{2}(\mathrm{e^{-t}} + \sin(\mathrm{t}) - \cos(\mathrm{t}))\,\mathrm{u(t)}$$

Exercice 03 (04 points) :

Calculer la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par :
— $\mathrm{s_1(t)} = \sin(\mathrm{t})$, $\quad \mathrm{s_2(t)} = \cos(\mathrm{t})$.

Les signaux $\mathrm{s_1(t)}$, $\mathrm{s_2(t)}$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{T} = 1$ donc à puissance moyenne finie :
$\mathrm{C_{s1s2}}\,(\mathrm{t}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\tau)\,\cos(\tau - t)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\tau)\,(\cos(\tau)\cos(t) + \sin(\tau)\sin(t))\,\mathrm{d}\tau$.
$\mathrm{C_{s1s2}}\,(\mathrm{t}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(\cos(t)\int_0^T \sin(\tau)\,\cos(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sin(t)\int_0^T \sin(\tau)\,\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$.
Calculant :

1. $\int_0^{\mathrm{T}} \sin(\tau)\cos(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^T \sin(2\,\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4}\cos(2\,\tau)|_0^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{4}\underbrace{\cos(2\,\mathrm{T})}_{=1} + \frac{1}{4} = 0.$
2. $\int_0^{\mathrm{T}} \sin(\tau)^2\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\mathrm{T}} \frac{1-\cos(2\,\tau)}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\,\tau)}{4}|_0^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{T}}{2} - \underbrace{\frac{\sin(2\,\mathrm{T})}{4}}_{=0} = \frac{\mathrm{T}}{2}.$

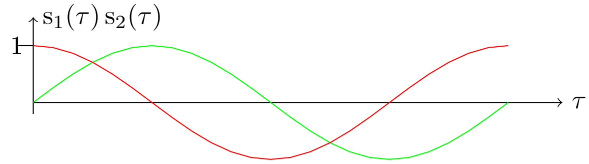
$\mathrm{C_{s1s2}}\,(\mathrm{t}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sin(t)\frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{\sin(\mathrm{t})}{2}\,\mathrm{u(t)}$

Exercice 03 (06 points) :

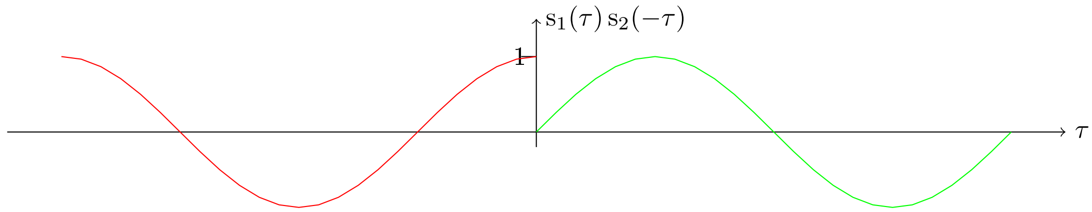
Calcul de la fonction d'intercorrélation des signaux causaux définis par : $\mathrm{s_1(t)} = \sin(\mathrm{t})$ et $\mathrm{s_2(t)} = \cos(\mathrm{t})$.

$$\mathrm{s_1(t) * s_2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d(\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s_1(t-\tau)\,s_2(\tau)\,d(\tau)}$$

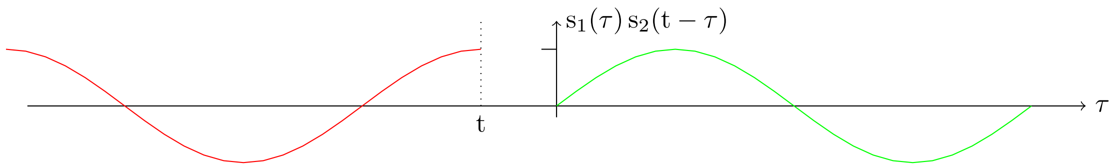
Donc on a besoin des signaux avec variable de temps τ.
Pour $\mathrm{s_1(\tau)\,s_2(\tau)}$.



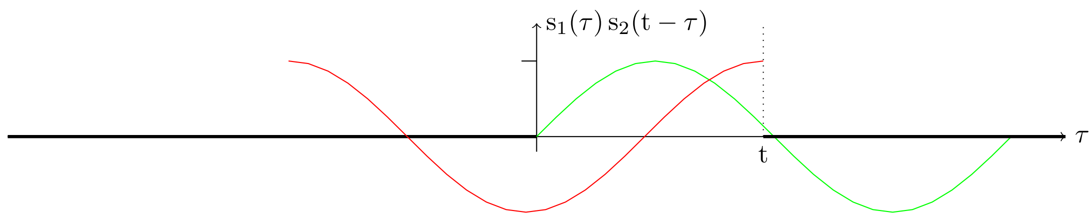
Pour $s_1(\tau)\, s_2(-\tau)$.



Pour les signaux $s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)$, deux cas peuvent se présenter :
$t < 0$:



Dans ce cas le produit $s_1(\tau)\, s_2(t-\tau) = 0$ donc , $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d(\tau) = 0$.
Donc le produit de convolution est donné par :
$t > 0$



Dans ce cas $s_1(\tau)\, s_2(t-\tau) \neq 0$ entre 0 et t donc :

$$\int_0^t \sin(\tau)\, \cos(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(\tau)\, (\cos(t)\, \cos(\tau) + \sin(t)\, \sin(\tau)\,)\, d\tau = \cos(t) \int_0^t \sin(\tau) \cos(\tau)\, d\tau + \sin(t) \int_0^t \sin(\tau)^2\, d\tau.$$

Calculant :

1. $\int_0^t \sin(\tau) \cos(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\,\tau)\, d\tau = -\frac{1}{4} \cos(2\,\tau)|_0^t = -\frac{1}{4} \cos(2\,t) + \frac{1}{4}$.
2. $\int_0^t \sin(\tau)^2\, d\tau = \int_0^t \frac{1-\cos(2\,\tau)}{2}\, d\tau = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\,\tau)}{4}|_0^t = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\,t)}{4}$.

Donc le produit de convolution est donné par :

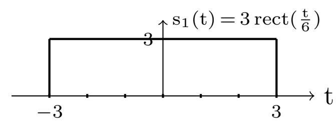
$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d(\tau) = \cos(t)(-\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{4}) + \sin(t)(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}) = \frac{1}{4}(-\cos(3t) + \cos(t)) + \frac{t}{2} \sin(t).$$

Corrigé de l'examen de rattrapage de Théorie du signal 2017

Exercice 01 (07 points) :

- Soit un signal défini par $s_1(t) = \begin{cases} 3 & \text{Si } |t| < 3, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_1(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier $S_1(\omega)$.



La transformée de Fourier de $s_1(t) = 3\,\mathrm{rect}(\frac{t}{6})$

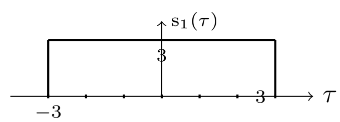
$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$S_1(\omega) = \int_{-3}^{+3} 3\, e^{-j\omega t} dt = \frac{3}{-j\omega}(e^{-j3\omega} - e^{j3\omega}) = \frac{6}{\omega}\sin(3\omega) = 18\,\mathrm{sinc}(3\,\omega).$$

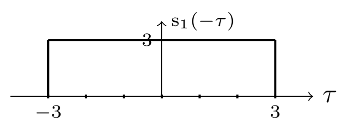
2. Déterminer $s(t) = s_1(t) * s_1(t)$ avec $*$ signifie le produit de convolution.

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_1(t - \tau)\, d\tau$$

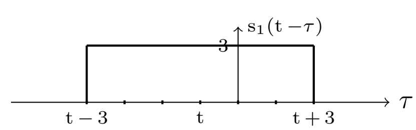
— Tracer le signal $s_1(\tau)$.



— Tracer le signal $s_1(-\tau) = s_1(\tau)$, un signal paire.

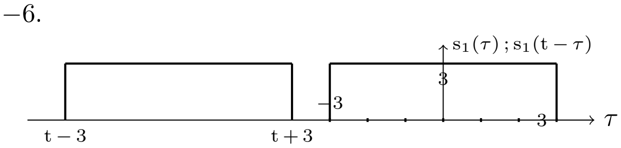


— Tracer le signal $s_1(t - \tau)$.



— Tracer les signaux $s_1(\tau)$ et $s_1(t - \tau)$ sur le même axe.

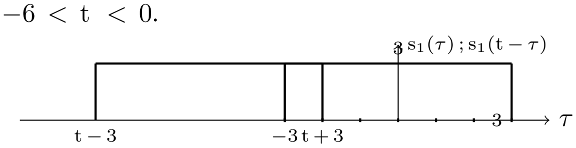
- $t + 3 < -3 \rightarrow t < -6$.



Il n'ya pas de chauvauchement entre ,$s_1(\tau)$, $s_1(t - \tau)$, alors le produit de ,$s_1(\tau) . s_1(t - \tau)$ est nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = 0$$

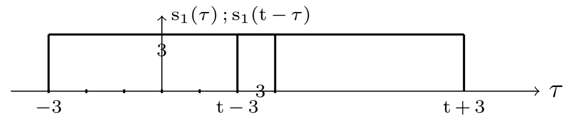
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow -6 < t < 0$.



Le produit de ,$s_1(\tau) . s_1(t - \tau)$ n'est pas nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{-3}^{t+3} 3 * 3\, d\tau = \tau\Big]_{-3}^{t+3} = 54\,(1 + \frac{t}{6})$$

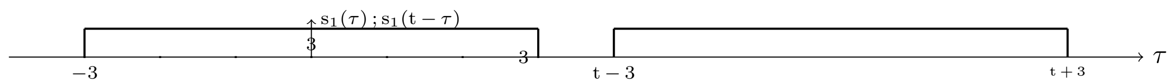
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow 0 < t < +6.$



Le produit de $, s_1(\tau)\,.\,s_1(t - \tau)$ n'est pas nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_1(t) = \int_{t-3}^{+3} 3\,3\,d\tau = \tau\Big]_{t-3}^{+3} = 54\,(1 - \frac{t}{6})$$

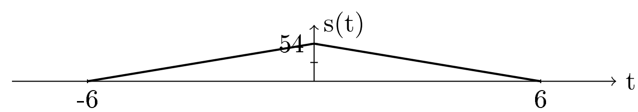
- $-3 < t - 3 < +3 \rightarrow 0 < t < +6.$



Il n'ya pas de chauvauchement entre $s_1(\tau)$, $s_1(t - \tau)$, alors le produit de $, s_1(\tau)\,.\,s_1(t - \tau)$ est nul : $s(t) = s_1(t) * s_1(t) = 0$

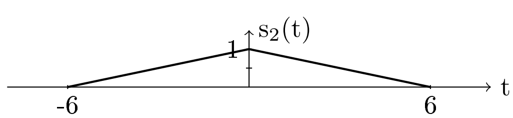
— Tracer le signal résultant.

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} 0 & t < -6, \\ 54\,(1 + \frac{t}{6}) & -6 \le t \le 0, \\ 54\,(1 - \frac{t}{6}) & 0 \le t \le 6, \\ 0 & t > 6. \end{cases}}$$



- Soit un signal défini par : $s_2(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{6} & \text{Si } |t| < 6, \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$

1. Tracer le signal $s_2(t)$,donner $s_2(t)$ fonction de $s(t)$:



$$s_2(t) = \frac{1}{54}\,s(t) = \frac{1}{54}\,s_1(t) * s_1(t)$$

2. et en déduire sa transformée de Fourier $S_2(\omega)$.
   $S_1(\omega) = 18\,\text{sinc}(3\,\omega)$.
   D'aprés le premier théorème de Plancherell $x_1(t) * x_2(t) \xmapsto{TF} X_1(\omega)\,.\,X_2(\omega)$,
   soit : $s_2(t) = \dfrac{1}{54}\,s_1(t) * s_1(t)$.
   $S_2(\omega) = \dfrac{1}{54}\,S_1(\omega)\,.\,S_1(\omega) = \dfrac{1}{54}\,18\,\text{sinc}^2(3\,\omega) = \dfrac{1}{3}\,\text{sinc}^2(3\,\omega)$.

Exercice 02 (06 points) :

Le signal de sortie d'un système linéaire invariant est donnée par :

$$S(P) = \frac{P - 1}{P^2 + 2\,P + 5}$$

1. Calculer la sortie $s(t)$ du système.

$$S(P) = \frac{P - 1}{P^2 + 2\,P + 1 + 4} = \frac{P - 1}{(P+1)^2 + 2^2} = \frac{P + 1 - 2}{(P+1)^2 + 2^2} = \frac{P + 1}{(P+1)^2 + 2^2} - \frac{2}{(P+1)^2 + 2^2}$$

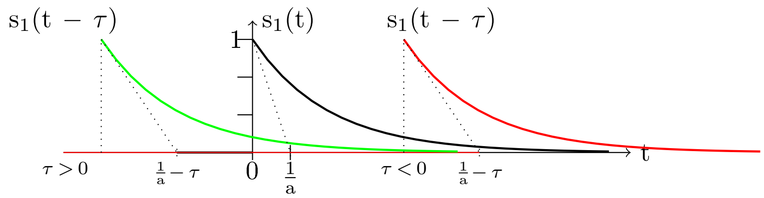
Alors le signal de sortie est : $s(t) = e^{-t}\,(\cos(2\,t) - \sin(2\,t)\,)\,u(t)$.

Exercice 03 (06 points) :

Soient les signaux suivants :

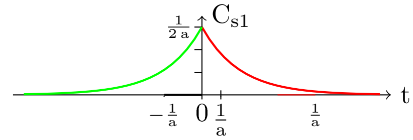
* $s_1(t) = e^{-a\,t}\,u(t)$ * $s_2(t) = e^{-b\,t}\,u(t)$.

1. Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_{s1s1}(t)$ du signal $s_1(t)$.



Deux cas peuvent se présenter :
— $\tau < 0$:$C_{s1s1} = \int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{a\,\tau}}{2\,a}\,u(-\tau)$.
— $\tau \geq 0$:$C_{s1s1} = \int_\tau^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{-a\tau}}{2\,a}\,u(\tau)$

$$C_{s1} = \begin{cases} \frac{e^{a\,t}}{2\,a} & t \leq 0, \\ \frac{e^{-a\,t}}{2\,a} & t \geq 0 \end{cases}$$



2. Donner l'expression de $C_{s2}(t)$ la fonction d'autocorrélation du signal $s_2(t)$.

$$C_{s2s2} = \begin{cases} \frac{e^{b\,t}}{2\,b} & t \leq 0, \\ \frac{e^{-b\,t}}{2\,b} & t \geq 0 \end{cases}$$

3. En déduire l'énergie des deux signaux.
$C_{ss}(0)$: représente l'énegie totale du signal,
$W_1 = C_{s1s1}(0) = \dfrac{1}{2\,a}$.
$W_2 = C_{s2s2}(0) = \dfrac{1}{2\,b}$.

4. Donner la densité spectrale d'énergie du signal $s_1(t)$. La densité spectrale d'énergie d'un signal est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

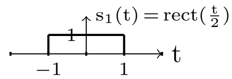
$$S_{C_{s1}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{s1}\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{a\,t}}{2\,a}\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt + \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\,t}}{2\,a}\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

Corrigé de l'examen du Théorie de signal 2018

Exercice 01 (08 points) :

- Soit un signal défini par $s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } |t| < 1, \\ 0 & \text{Si } |t| > 1 \end{cases}$

1. Traçage le signal $s_1(t)$ et calcul de son énergie et sa puissance moyenne.



Et :

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{+1} 1 \, dt = 2 \quad \texttt{energie finie}$$

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-1}^{+1} 1 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \times (\texttt{energie finie}) = 0. \quad P_{moy} = 0$$

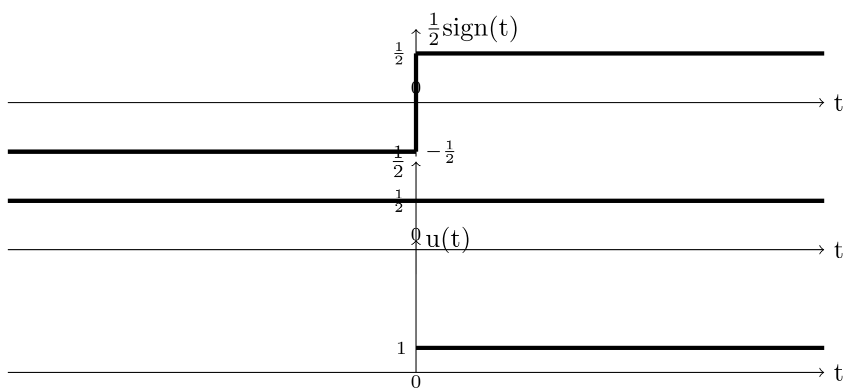
L'impulsion rectangulaire $s_1(t)$ est à l'énergie finie et à puissance moyenne nulle.

2. La transformée de Fourier de $s_1(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{2})$.

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \, e^{-j\omega t} dt \int_{-1}^{+1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega}(e^{-j\omega} - e^{j\omega}) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega) = 2 \, \mathrm{sinc}(\omega).$$

— On propose de recalculer $S_1(\omega)$ on utilisant la transformée de Fourier de l'échelon unitaire.

1. $s_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$.
2. Déterminer la transformée de Fourier de l'échelon unitaire.
   Sachant que l'échelon peut s'écrire comme $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ signe(t),



et d'aprés le principe de la dualité on a :

$$1 \xrightarrow{TF} 2\pi \, \delta(-\omega) = 2\pi \, \delta(\omega)$$

Et on utilisant le principe de la linéarité $u(t)$ admet comme transformée de Fourier :

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, \mathrm{signe}(t) \xrightarrow{TF} U(\jmath\,\omega) = \pi \, \delta(\omega) + \frac{1}{\jmath\omega}$$

3. Retrouver la transformée de Fourier $S_1(\omega)$ de $s_1(t)$ utilisant la transformée de Fourier de l'échelon unitaire.

Sachant que $s_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$. ET comme :

$$u(t) \xmapsto{T.F} U(\jmath\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\jmath\omega}$$

D'aprés la proprièté du décalage dans le temps et la proprièté de la linéaritée on a :

$$u(t+1) \xmapsto{T.F} U(\jmath\omega)\,e^{\jmath\omega} = (\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\jmath\omega})\,e^{\jmath\omega}$$

$$u(t-1) \xmapsto{T.F} U(\jmath\omega)\,e^{-\jmath\omega} = (\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\jmath\omega})\,e^{-\jmath\omega}$$

Donc :

$$s_1(t)) \xmapsto{T.F} S_1(\jmath\omega) = \pi\,\delta(\omega)\,e^{\jmath\omega} + \frac{1}{\jmath\omega}\,e^{\jmath\omega} - \pi\,\delta(\omega)e^{-\jmath\omega} - \frac{1}{\jmath\omega}\,e^{-\jmath\omega}$$

Qui donnera :

$$s_1(t)) \xmapsto{T.F} S_1(\jmath\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\jmath\omega}\,e^{\jmath\omega} - \pi\,\delta(\omega) - \frac{1}{\jmath\omega}\,e^{-\jmath\omega} = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)$$

On retrouve le même résultat qu'en première question.

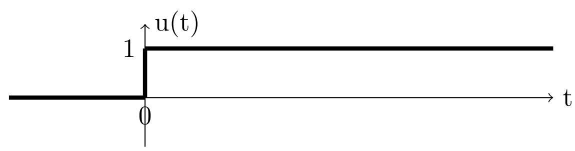
Exercice 02 (06 points) :

1. Pour un un système linéaire invariant dans le temps, la relation entre le signal de sortie et le signal d'entrée dans le domaine Laplacien est donnée par :

$$S(P) = H(P).E(P)$$

$s(t) = u(t)$ défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



Admet comme transformée de Laplace :

$$S(P) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} 1\,e^{-pt}\,dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{p} \qquad u(t) \xmapsto{T.P} \frac{1}{p}$$

Cette transformée existe, si $\lim_{t\to\infty} e^{-p\,t} = 0$ seulement pour la partie reelle de p est positif, donc le domaine de convergence de S(P) est l'intervalle positif du plan complexe σ, $\jmath\omega$, soit pour reel (p), > 0
Donc pour une entrée :

$$e(t) = u(t) \;\Rightarrow\; E(P) = \frac{1}{P} \;\Rightarrow\; S(P) = H(P).E(P) = \frac{1}{P\,(P+1)^2} = \frac{A}{P} + \frac{B}{(P+1)^2} + \frac{C}{P+1}$$

Sachant que $P = 0$ est un pôles simple, alors que $P = -1$ est un pôle double.

Donc :

$A = S(P).P|_{P=0} = \dfrac{P}{(P+1)^2 P}|_{P=0} = 1.$

$B = S(P).(P+1)^2|_{P=-1} = \dfrac{P}{(P+1)^2}(P+1)^2|_{P=-1} = -1.$

$C = \dfrac{d}{dp}\left(P+1)^2.\dfrac{P}{(P+1)^2}\right)|_{P=-1} = -1.$

$$S(P) = \frac{1}{P} - \frac{1}{(P+1)^2} - \frac{1}{P+1}$$

Donc d'aprés les propriètés de la TP inverse et la multiplication par la variable temps t, on a le signal de sortie :

$$t\,u(t) \xmapsto{TP} -\frac{d}{dP}(\frac{1}{P}) = \frac{1}{P^2}$$

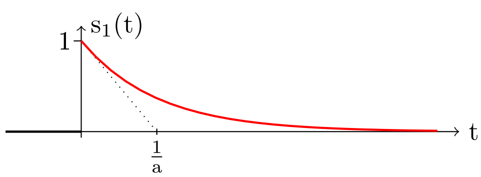
$$t\,u(t)\,e^{-t} \xmapsto{TP} -\frac{d}{dP}(\frac{1}{P}) = \frac{1}{(P+1)^2}$$

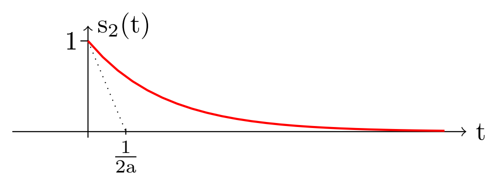
$s(t) = u(t) - t\,u(t)\,e^{-t} - u(t)\,e^{-t} = (1 - t\,e^{-t} - e^{-t})\,u(t).$

Exercice 03 (07 points) :
Soient les signaux suivants :

* $s_1(t) = e^{-at}\,u(t)$ * $s_2(t) = e^{-2at}\,u(t).$

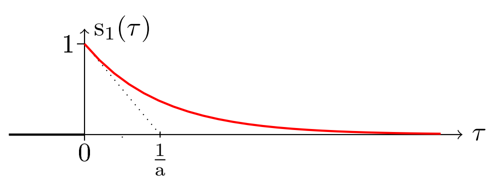
1. Produit de convolution des signaux.
   - Déterminer le signal s(t) résultant du produit de convolution des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$, $s(t) = s_1(t) * s_2(t)$.
     Tracer les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

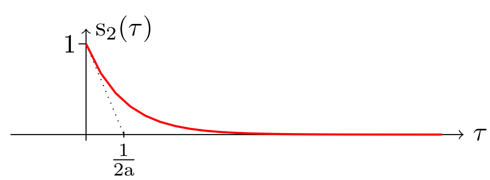




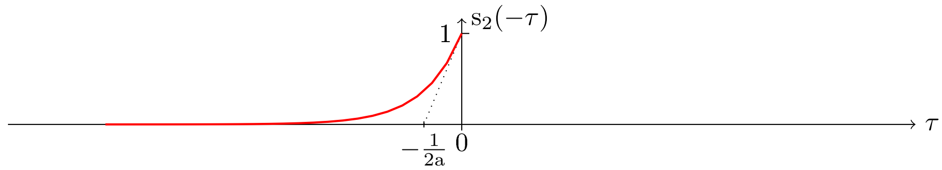
$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\,s_2(t-\tau)\,d\tau$$

   (a) Tracer les signaux $s_1(\tau)$ et $s_2(\tau)$.

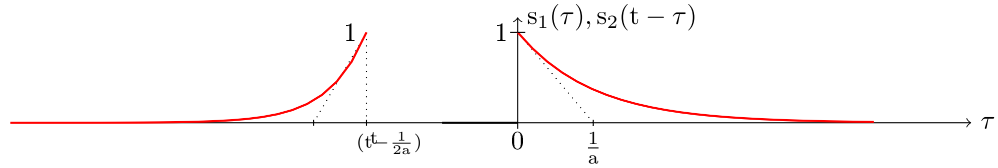




(b) Tracer le signal $s_2(-\tau)$.



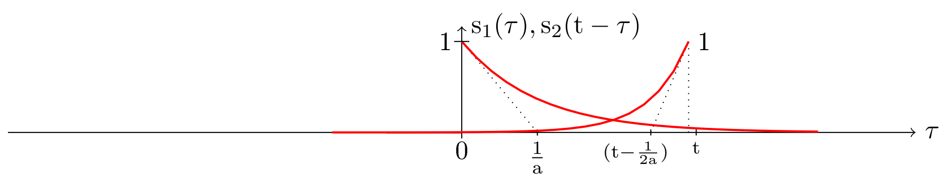
(c) Tracer les signaux $s_1(\tau)$ et $s_2(t-\tau)$ sur le même axe.
Pour $t < 0$



Il n'ya pas de chauvauchement entre , $s_1(\tau)$, $s_2(t-\tau)$, alors le produit de , $s_1(\tau) . s_2(t-\tau)$ est nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\, s_2(t-\tau)\, d\tau = 0$$

Pour $t > 0$



Le produit de , $s_1(\tau) . s_2(t-\tau)$ n'est pas nul :

$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-2a(t-\tau)}\, dt = e^{-2at} \int_0^t e^{a\tau}\, dt = \frac{1}{a} e^{-2at} \left[e^{a\tau}\right]_0^t = \frac{1}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right)$$

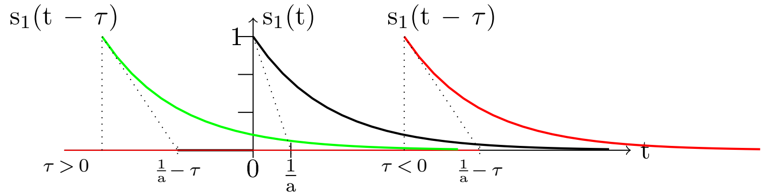
$$\boxed{s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right) & t > 0. \end{cases}}$$

- Déterminer $S(\omega)$ la transformée de Fourier du signal résultant $s(t)$.

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt - \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-2at} e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt - \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-(2a+j\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{(a+\jmath\omega)(2a+\jmath\omega)} \end{aligned}$$

Avec : :$|S(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+\omega^2)(4a^2+\omega^2)}}$

2. Corrélation des signaux.
   - Déterminer et tracer la fonction d'autocorrélation $C_{s1}(t)$ du signal $s_1(t)$ et en déduire son énergie.

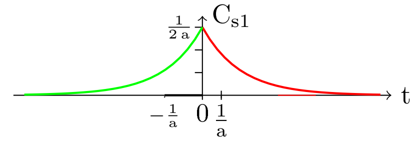


Deux cas peuvent se présenter :

— $\tau < 0 : C_{s1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{a\,\tau}}{2\,a}\,u(-\tau)$.

— $\tau \geq 0 : C_{s1} = \displaystyle\int_\tau^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{-a\tau}}{2\,a}\,u(\tau)$

$$C_{s1}(t) = \begin{cases} \frac{e^{a\,t}}{2\,a} & t \leq 0, \\ \frac{e^{-a\,t}}{2\,a} & t \geq 0 \end{cases}$$



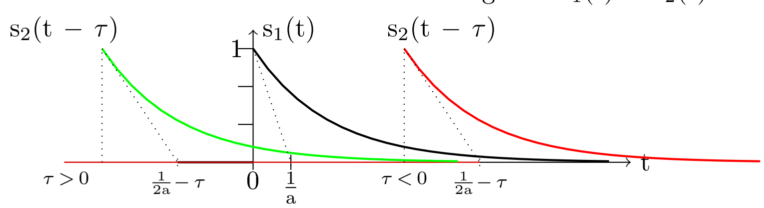
$C_s(0)$ représente l'énegie totale du signal, $W_1 = C_{s1}(0) = \dfrac{1}{2\,a}$.

   - Déterminer la densité spectrale d'énergie du signal $s_1(t)$.
     La densité spectrale d'énergie d'un signal est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{s1}(t)\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{a\,t}}{2\,a}\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-a\,t}}{2\,a}\, e^{-j\,\omega\,t}\,dt = \frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$S(\omega)$ est une fonction réelle et le spectre de fréquence en amplitude est une gaussiènne.

   - Déterminer $C_{s1s2}(t)$ la fonction d'intercorrélation des deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.

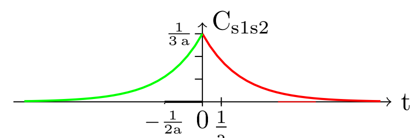


Deux cas peuvent se présenter :

— $\tau < 0 : C_{s1s2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-2a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{2a\,\tau}}{3\,a}\,u(-\tau)$.

— $\tau \geq 0 : C_{s1s2} = \displaystyle\int_\tau^{+\infty} e^{-a\,t}\, e^{-2a\,(t-\tau)}\,dt = \frac{e^{-a\tau}}{3\,a}\,u(\tau)$

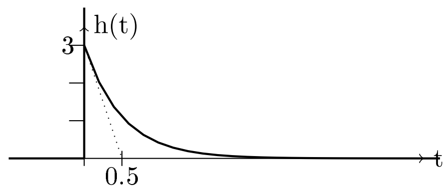
$$C_{s1}(t) = \begin{cases} \frac{e^{2\,a\,t}}{3\,a} & t \leq 0, \\ \frac{e^{-a\,t}}{3\,a} & t \geq 0 \end{cases}$$

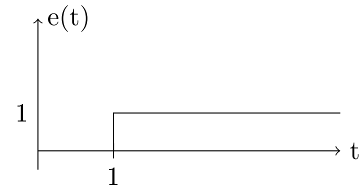


Solution d'Examen de Rattrapage du Théorie de signal 2018

Exercice 01 (08 points) :

Calcul de la sortie s(t) d'un système linéaire invariant ayant pour entrée $e(t) = u(t-1)$ et pour réponse impulsionnelle $h(t) = 3\,e^{-2\,t}u(t)$.

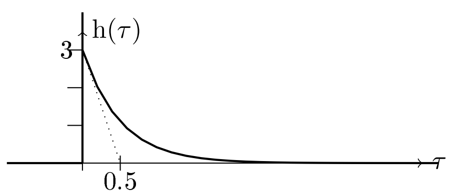


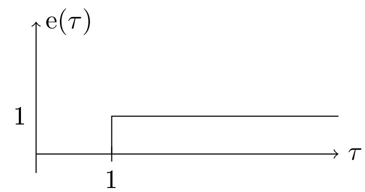


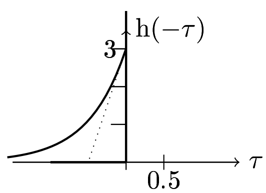
1. Utiliser le produit de convolution.
   La sortie s(t) est donnée par le produit de convolution de e(t) et h(t) soit :$s(t) = e(t) * h(t)$.
   D'aprés la définition :

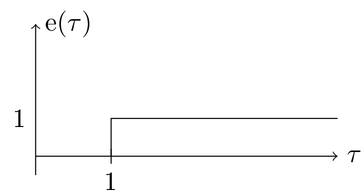
$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-\tau)\,h(\tau)\,d(\tau)$$

   Donc on a besoin des signaux suivants :Signaux avec variable de temps τ

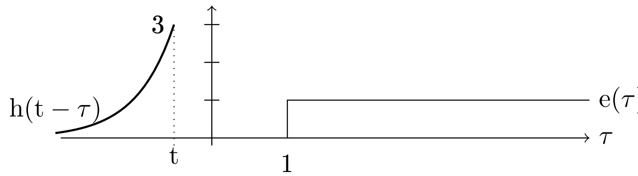




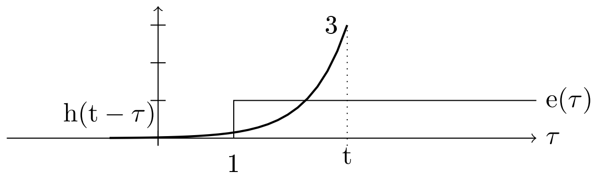




Deux cas peuvent se présenter :
t $<$ 1 :



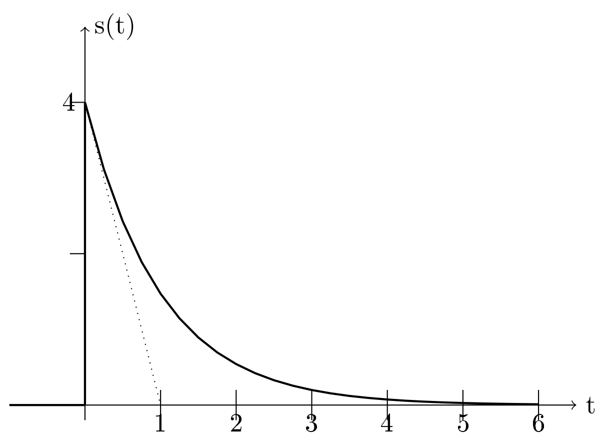
Dans ce cas le produit $e(\tau)\,h(t-\tau) = 0$ donc $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d(\tau) = 0$.
t $>$ 1

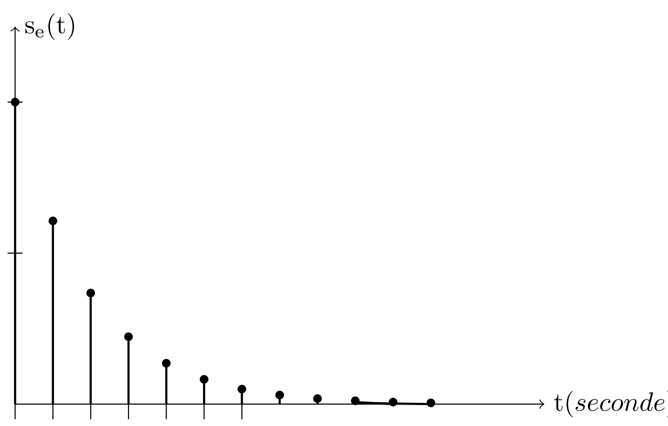


Dans ce cas $e(\tau)\,h(t-\tau) \neq 0$ donc :
$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_1^t 3\,e^{-2\,(t-\tau)}\,d\tau$.
Donc : $s(t) = 3\,e^{-2\,t} \int_1^t e^{2\,\tau}\,d\tau = \frac{3}{2}\,e^{-2\,t}\,(e^{2\,t} - e^2) = \frac{3}{2}\,(1 - e^{2-2\,t})u(t-1)$.
s(t) n'est défini que si $t > 1$

2. Utiliser la transformée de Laplace.
   Dans le domaine temporel la sortie d'un système linéaire invariant est donnée par :
   $s(t) = e(t) * h(t)$.
   Dans le domaine Laplacien la sortie d'un système linéaire invariant est donnée par :
   $S(P) = E(P).\,H(P)$.
   Alors calculant les TPs de chaque signal : $e(t) = u(t-1), \xmapsto{TP} \quad E(P) = \frac{e^{-P}}{P}$
   et pour la réponse impulsionnelle $h(t) = 3\,e^{-2\,t}u(t), \xmapsto{TP} H(P) = \frac{3}{P+2}$.
   $S(P) = E(P).\,H(P) = \frac{3\,e^{-P}}{P(P+2)}$ qui peut se mettre sous la forme :
   $S(P) = \frac{3\,e^{-P}}{P(P+2)} = \frac{3\,e^{-P}}{2}(\frac{1}{P+2} - \frac{1}{P})$.
   Pour retrouver s(t) on utilise la transformée de Laplace inverse de S(P).
   $S(P) = \frac{3}{2}(\frac{e^{-P}}{P} - \frac{e^{-P}}{P+2}) \xmapsto{TP} s(t) = \frac{3}{2}u(t-1) - u(t-1)\,e^{2-2\,t} = \frac{3}{2}u(t-1)\,(1 - e^{2-2\,t})$

1. Représenter le signal s(t).





2. Soit $s_e(t)$ le signal échantillonné de s(t), par un échantillonneur idéalisé.
   - L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu s(t) et d'un peigne de Dirac de période T_e soit $\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\,T_e)$.
   - L'expression générale de $s_e(t)$.
     $s_e(t) = s(t)\,\delta_{T_e}(t) = s(t)\,\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\,T_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t - k\,T_e)$

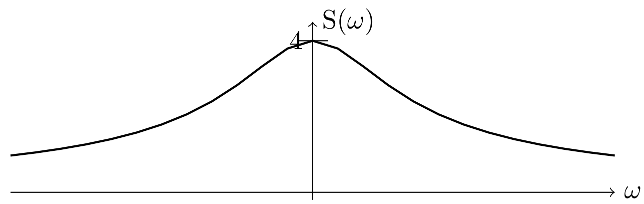
Le produit $\mathrm{s(t)}\delta(\mathrm{t - k\,T_e})$: n'est défini que pour les instants $\mathrm{t} = \mathrm{k\,T_e}$ avec $\mathrm{k} > 0$.
Donc : $\mathrm{s_e(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{s(KT_e)}\delta(\mathrm{t - k\,T_e})$.
$\mathrm{s_e(t)} = \sum_{k=-0}^{+\infty} 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k\,T_e}}\ \delta(\mathrm{t - k\,T_e})$.
C'est une suite de pics de Dirac dont les poids(les amplitudes) sont les valeurs du signal s(t) aux instants $\mathrm{KT_e}$ c'est à dire les valeurs $\mathrm{s(KT_e)} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k\,T_e}}$.

Représenter le signal échantillonné $\mathrm{s_e(t)}$ pour un pas d'échantillonnage de $\mathrm{T_e} = 0.5$ secondes.

- $\mathrm{S}(\omega)$ la transformée de Fourrier du signal $\mathrm{s(t)} = 4\,e^{-t}$,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-\jmath\,\omega\,t}\,dt = \int_{0}^{\infty} 4\,e^{-t}\,e^{-\jmath\,\omega\,t} = \int_{0}^{\infty} 4\,e^{-t\,(1+\jmath\,\omega)}\,dt = \frac{4}{1+\jmath\,\omega}$$
$$= \frac{4}{1+\omega^2}$$

$S(\omega)$ est fonction complexe qui a pour amplitude $S(\omega) = \frac{4}{1+\omega^2}$donc le spectre d'amplitude est une guassiènne croissante de $\omega \to -\infty$ à une valeure maximale 4 pour $\omega = 0$ et décroissante vers 0 quand $\omega \to \infty$.



- $\mathrm{S_e}(\omega)$ La transformée de Fourrier du signal $\mathrm{s_e(t)}$
D'aprés le théorème de Plancherell :$TF(\mathrm{s_1(t)\,.\,s_2(t)}) = \mathrm{S_1}(\omega) * \mathrm{S_2}(\omega)$.
Sachant que : $\mathrm{s_e(t)} = \mathrm{s(t)}\,.\,\delta_{T_e}(t)$ Et que $\mathrm{S}(\omega) = \frac{4}{1+\jmath\,\omega}$.
On calcul $\mathrm{S_2}(\omega)$ La transformée de Fourrier du signal $\delta_{\mathrm{T_e}}(\mathrm{t})$:
le peigne de Dirac $\delta_{T_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{t - n\,T_e})$ est un signal périodique qui peut se mettre sous une décomposition en série de fourrier complexe : $\delta_{T_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{C_n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{jn}\omega\,\mathrm{t}}$:
Avec $\mathrm{C_n} = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{+\frac{T_e}{2}} \delta\,(t), \mathrm{e}^{-\mathrm{jn}\omega\,\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{T_e}$.
$\delta_{T_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{jn}\omega\,\mathrm{t}}$:
ET comme la TF de $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\,\mathrm{t}} = 2\,\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\pi}{T_e})$ avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_e}$.
Alors d'aprés la propriètée de la linéarité on a :
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{jn}\omega\,\mathrm{t}}$ admet comme TF $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\,2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\,\mathrm{n}\,\pi}{\mathrm{T_e}})$
Finalement la transformée de Fourier du signal résultant est donné par :
$\mathrm{S_e}(\omega) = \mathrm{S}(\omega) * \Delta_(\omega) = , \frac{4}{1+\jmath\,\omega} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{T_e}}\,2\,\pi\delta(\omega - \frac{2\,\mathrm{n}\,\pi}{\mathrm{T_e}})$.