Chapitre 2 : Etude des systèmes linéaires

I- Systèmes de premier ordre

1. Définition

On appelle système de premier ordre d'entrée e (t) et de sortie s (t) tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)$$

Avec :

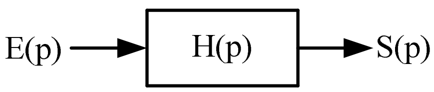
K : gain statique,

τ : constante de temps (en s).

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation à condition initiale nulle $(s(0) = 0)$.

On peut alors définir la fonction de transfert (ou transmittance) du système de premier ordre par la forme canonique de suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau\, p}$$

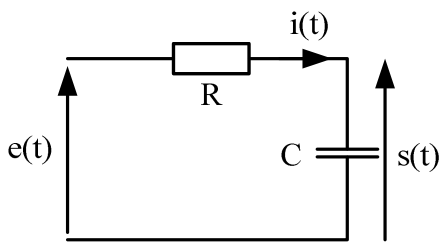


2. Exemples

Circuit RC :

Charge d'une capacité *C* au travers d'une résistance.

$$RC \frac{d\, s(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$



A condition initiale est nulle $(s(0) = 0)$ la fonction de transfert est définit par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \tau_e\, p} \text{ , Avec : } \tau_e = RC\,.$$

Circuit RL :

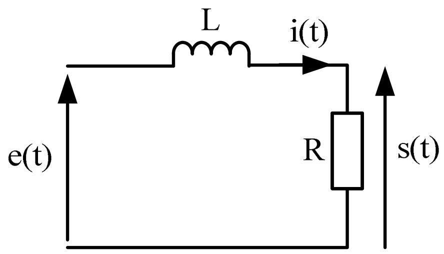
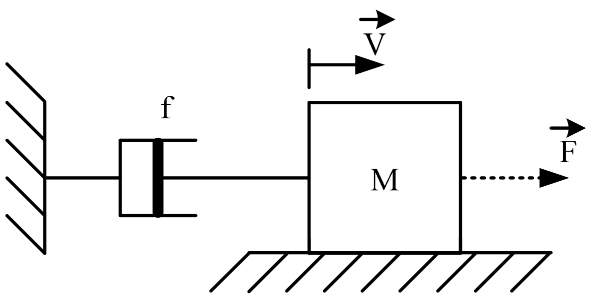


Figure-1-Circuit RL

A condition initiale nulle $(s(0)=0)$ la fonction de transfert est définit par :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+\tau_e\, p}\text{, Avec }:\tau_e=\frac{L}{R}.$$

Système mécanique :



Avec :

f : coefficient de frottement,

M : masse du corps en mouvement,

F : force extérieure appliquée.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique(RFD) pour ce système donne :

$$F=M\frac{dv}{dt}+f\,v$$

La transformée de Laplace, à conditions initiales nulles, donne

$$F(p)=(Mp+f)V(p)$$

La fonction de transfert de ce système est :

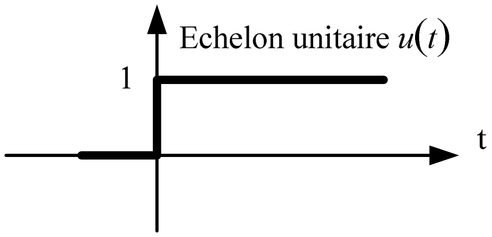
$$\frac{V(p)}{F(p)}=\frac{1}{Mp+f}=\frac{\frac{1}{f}}{1+\frac{M}{f}p}$$

avec : $\tau_m=\dfrac{M}{f}$, constante mécanique

3. Etude temporelle

a. Réponse indicielle

On considère une entrée $e(t) = Eu(t)$ où u(t)=1 (t > 0) est un échelon unitaire décrit par la figure suivante :

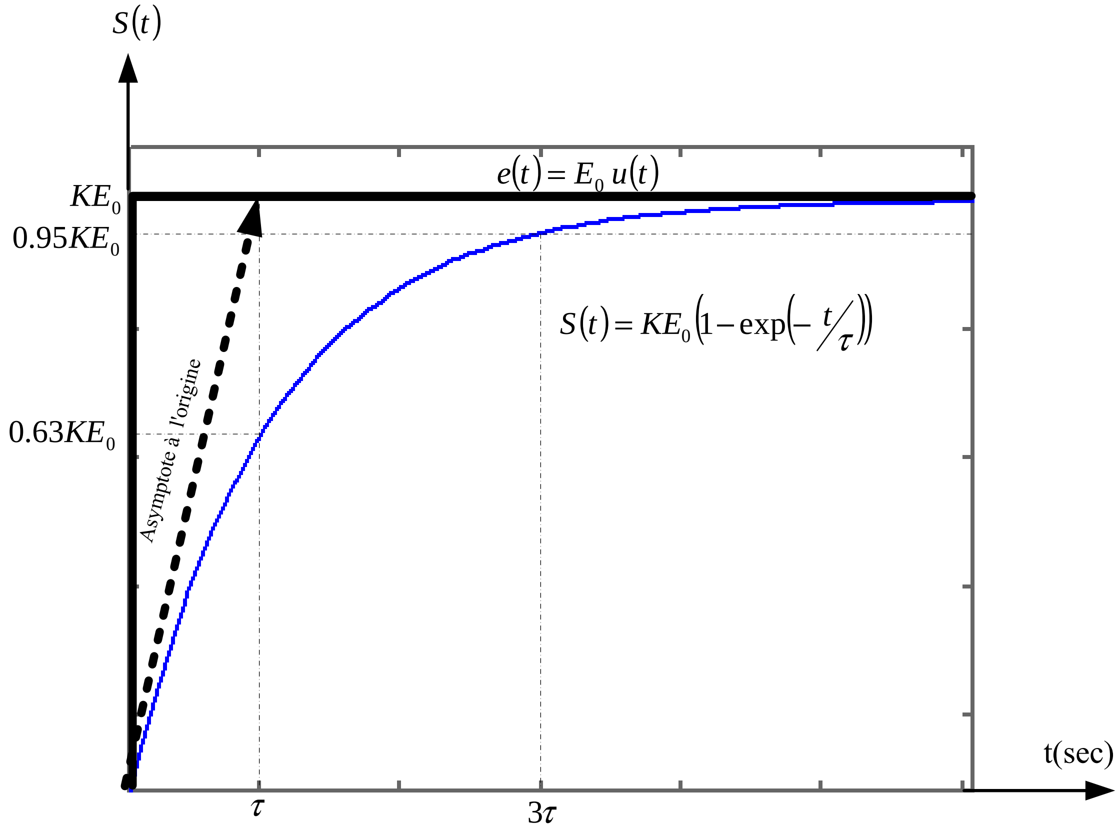


$$E(p) = \frac{E_0}{P}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{P(1+\tau p)}$$

$$s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = KE_0\left(1 - \exp\left(-\tfrac{t}{\tau}\right)\right)u(t)$$

$$s(t) = KE_0\left(1 - \exp\left(-\tfrac{\tau}{\tau}\right)\right)u(t)$$



Pour le système de premier ordre on définit les paramètres suivants :

❖ **Constante de temps** : $s(\tau) = KE_0(1-e^{-1}) = 0.63KE_0$

C'est le temps au bout duquel la réponse atteint 63% de la valeur finale. La constante de temps du système caractérise la rapidité du régime transitoire.

❖ **Temps de stabilisation à 5% (ou de réponse) :** $s(3\tau) = KE_0(1-e^{-3}) = 0.95KE_0$

Le temps de réponse est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse du système ne s'écarte pas de plus de 5% de son état permanent.

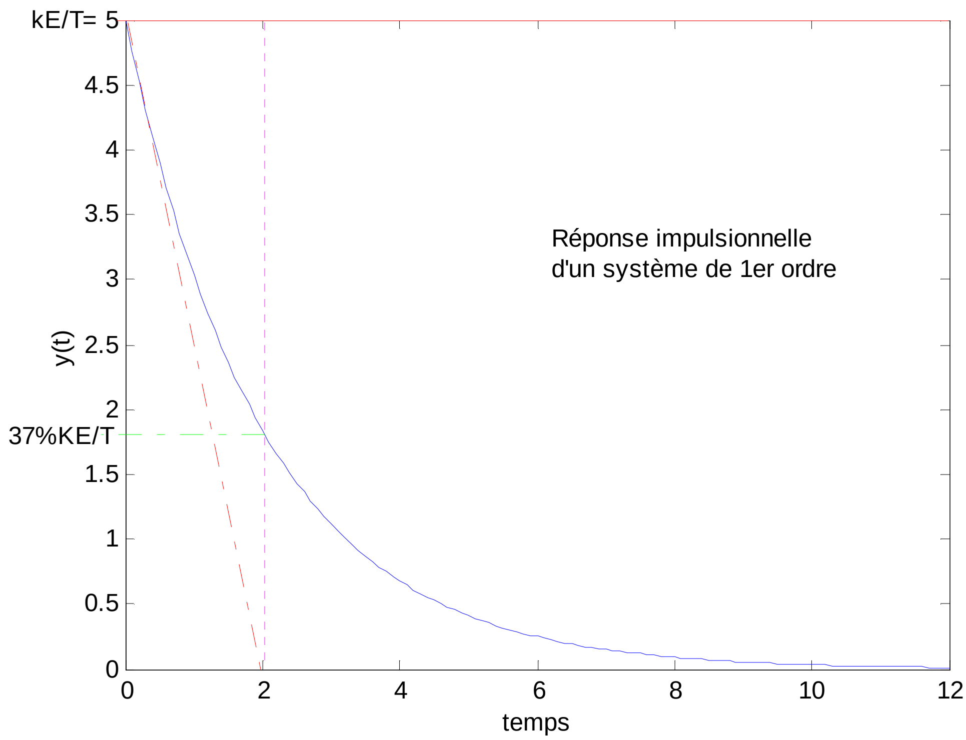
Pour le système de premier ordre t_r *à* $95\% = 3\tau$.

b. Réponse à une impulsion $e(t) = \delta(t) = 1$ pour $t = 0$

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{k}{1+\tau p}E(p)$$

$$E(p) = E_0 \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{kE_0}{1+\tau p} = \frac{kE_0}{\tau}.\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{s(t) = \frac{kE_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$s(\tau) = 0.36\frac{kE_0}{\tau}$$



Réponse impulsionnelle d'un système de 1^er^ ordre (KE=10).

**si $t \to 0; \quad y(t) \to \frac{kE_0}{\tau}$

** si $t \to \infty; \quad y(t) \to 0$

c. Réponse à une rampe

On a $e(t) = E_0\, t\, u(t)$, soit $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{P^2(1+\tau p)}$$

Décompositions en éléments simples $S(p)$

$$S(p) = \frac{KE_0}{P^2(1+\tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+\tau p}$$

$$B = \left[p^2 S(p)\right]_{(p=0)} = kE_0$$

$$C = \left[(1+\tau p)S(p)\right]_{\left(P=\frac{-1}{\tau}\right)} = kE_0\tau^2$$

$$S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1+\tau p)} = \frac{A\,p(1+\tau p) + B(1+\tau p) + C\,p^2}{p^2(1+\tau p)} = \frac{B + (A+B\tau)\,p + (C+A\tau)\,p^2}{p^2(1+\tau p)}$$

Par identification terme à terme on aura : $KE_0 = B + (A+B\tau)\,p + (C+A\tau)\,p^2$

$$\begin{cases} B = kE_0 \\ (A+B\tau)\,p = 0 \\ (C+A\tau)\,p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = kE_0 \\ A = -kE_0\tau \\ C = kE_0\tau^2 \end{cases}$$

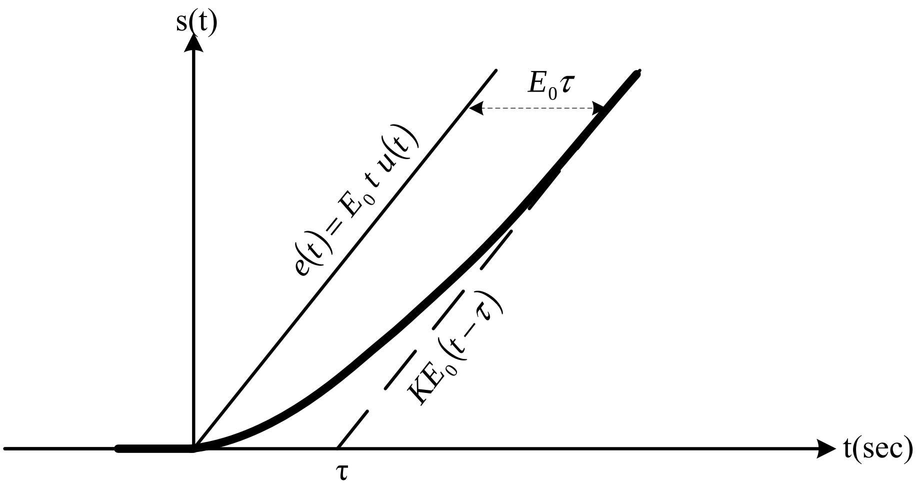
Finalement $S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1+\tau p)} = kE_0\left[-\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right]$

En appliquant la transformée inverse de Laplace, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}\left[S(p)\right] = K\,E_0\tau\left(\frac{t}{\tau} - 1 + \exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau}\right)\right)u(t)$$

Pout t tend vers l'infini :

L'équation de l'asymptote : $y = KE_0(t-\tau)$



Erreur de traînage : erreur entrée-sortie en régime permanent

$$\varepsilon = \lim_{t \longrightarrow \infty}\left[(e(t)-s(t)\right]$$

$$si\,k \gg 1 \;alors\; \varepsilon \longrightarrow -\infty$$

$$si\,k = 1 \;alors\; \varepsilon \longrightarrow E_0\tau$$

$$si\,k \ll 1 \;alors\; \varepsilon \longrightarrow +\infty$$

4. Etude harmonique (fréquentielle) $(p = j\omega)$

La transmittance harmonique du système est : $H(j\omega) = \dfrac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \dfrac{K}{1+j\tau\omega}$

Posons $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$ et $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

$$H(ju) = \frac{K}{1+ju}$$

- Module de $H(ju)$

$$|H(ju)| = \frac{K}{\sqrt{1+u^2}}$$

- Argument de $H(ju)$

$$\varphi = \arg[H(ju)] = -arctg(u)$$

a. Diagramme de Bode

Diagramme asymptotique

Posons $|H(ju)| = |H|$

Etude du module et de l'argument

➢ Pour $\omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \quad ou\; |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

- Pour $\omega=\omega_0 \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow \begin{cases} |H|=\dfrac{k}{\sqrt{2}} \quad ou\ |H|_{dB}=20\log_{10}(K)-3 \\ \varphi=-45^{\circ} \end{cases}$
- Pour $\omega \langle\langle\ \omega_0 \Leftrightarrow u\langle\langle 1 \Rightarrow \begin{cases} |H|=K \quad ou\ |H|_{dB}=20\log_{10}(K) \\ \varphi=0^{\circ} \end{cases}$
- Pour $\omega \rangle\rangle\ \omega_0 \Leftrightarrow u \rangle\rangle 1 \Rightarrow \begin{cases} |H|=\dfrac{K}{u} \quad ou\ |H|_{dB}=20\log_{10}(K)-20\log_{10}(u) \\ \varphi=-90^{\circ} \end{cases}$

La représentation asymptotique de Bode en amplitude est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \langle\langle\ \omega_0)$ $|H|_{dB}=20\log_{10}(K)$
- ✓ Une asymptote oblique d'équation $(|H|_{dB}=20\log_{10}(K)-20\log_{10}(u))$ de pente $(-20)dB/décade$ pour $(\omega\rangle\rangle\ \omega_0)$
- ✓ Le point d'intersection entre les deux asymptotes est le point où $\omega=\omega_0$

La représentation asymptotique de Bode en phase est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \langle\langle\ \omega_0)$ $(\varphi=0^{\circ})$
- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \rangle\rangle\ \omega_0)$ $(\varphi=-90^{\circ})$

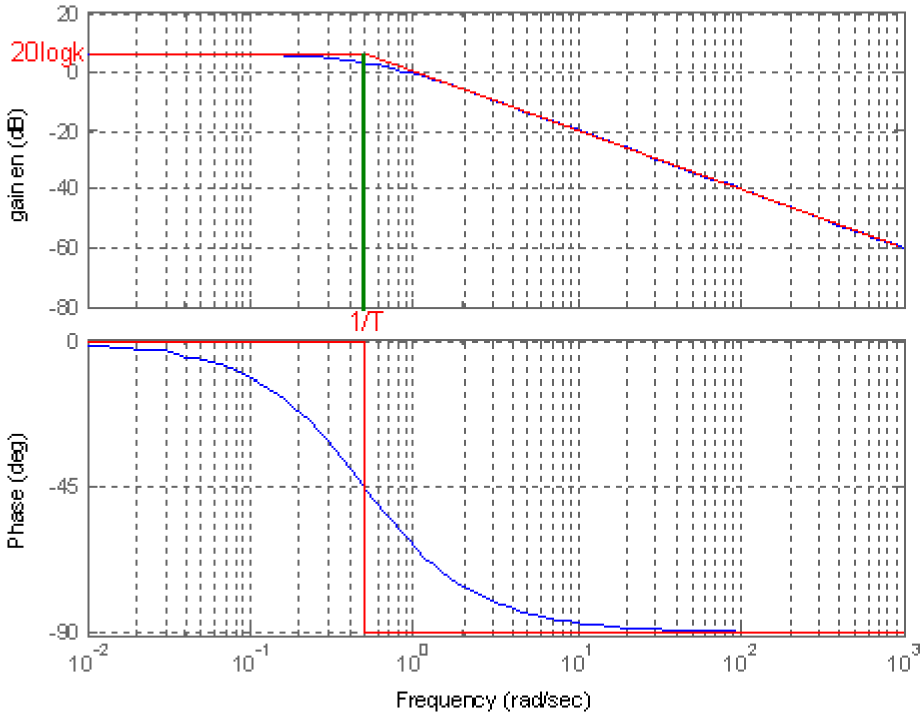


Diagramme de Bode d'un système de premier ordre

Le système possède une fréquence de coupure pour $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

Remarque pour tracer le diagramme de Bode, il faut utiliser du papier semi-logarithmique.

b. Diagramme de Nyquist

Il représente dans le plan complexe la partie imaginaire en fonction de la partie réelle et qui évolue en fonction de ω.

On représente $\mathrm{Im}\,g[H(j\omega)] = f(re\acute{e}l[H(j\omega)])$

$$H(ju) = \frac{K}{1+ju} = \frac{K(1-ju)}{(1+ju)(1-ju)} = \frac{K}{1+u^2} - j\frac{Ku}{1+u^2}$$

Posons : $\begin{cases} X = \dfrac{K}{1+u^2} & (1) \\ Y = -\dfrac{Ku}{1+u^2} & (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} (1) & \Rightarrow u^2 = \dfrac{K}{X} - 1 & (1') \\ (2) & \Rightarrow \; Y = -u\,X & (2') \end{cases}$$

$$(2')^2 \Rightarrow \quad Y^2 = u^2 X^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2 = KX - X^2$$

$$Y^2 = kX - X^2$$

$$\Rightarrow Y^2 + X^2 - kX = 0$$

$$Y^2 + \left[X^2 - 2X\frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \right] = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

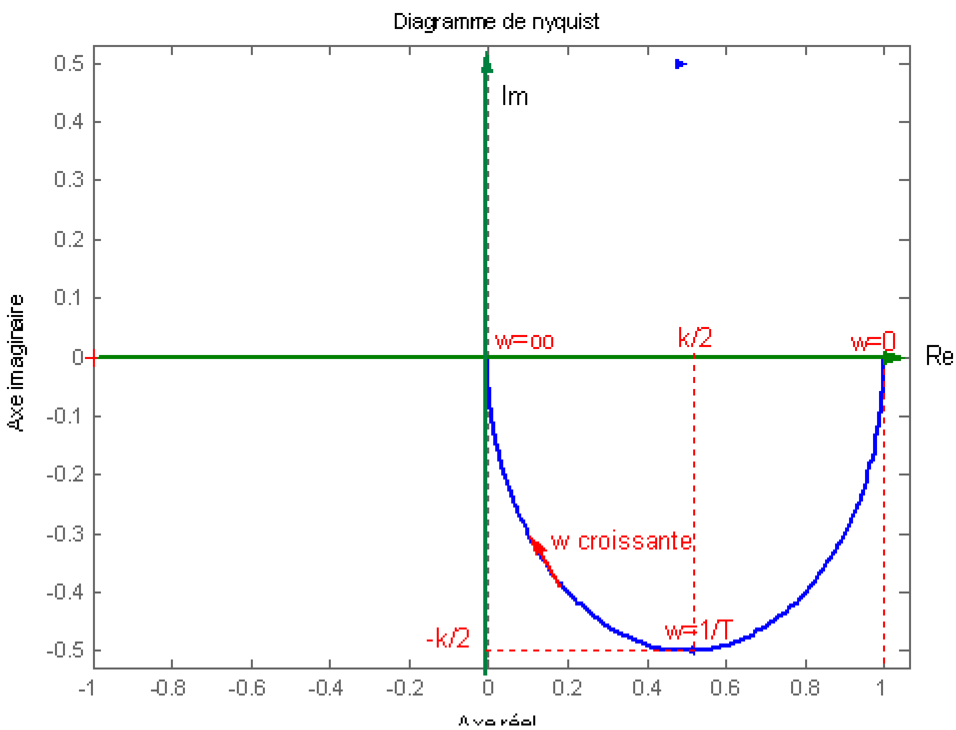
$$\Rightarrow \left(X - \frac{k}{2} \right)^2 + Y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Le lieu de Nyquist est un cercle de centre $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{k}{2}\right)$

Or $\forall \omega \in [0, \infty[$, $on\, a$ $\begin{cases} X \rangle 0 \\ Y \langle 0 \end{cases}$

ω	$\omega = 0$	$\omega = 1/\tau$	$\omega \to \infty$
X	k	k/2	0
Y	0	-k/2	0

Donc le diagramme de Nyquist est un demi-cercle.



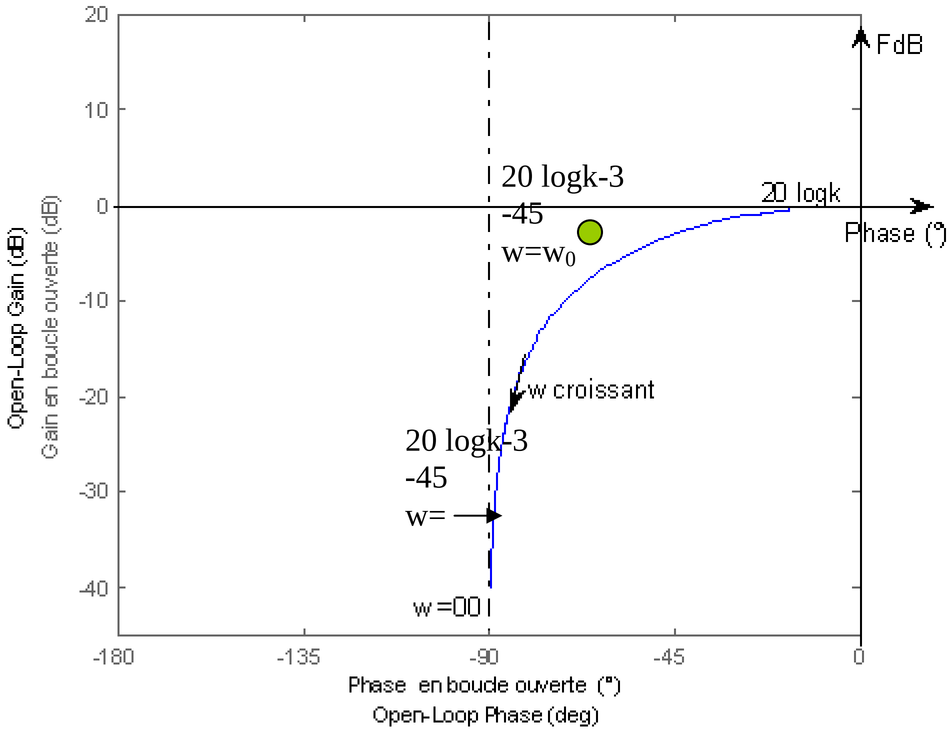
Allure de Nyquist pour un système de 1er ordre

c. Diagramme de Black

$$H(p) = \frac{k}{1+\tau p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{k}{1+\tau j\omega}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{k}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) = -arctg(\tau\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} = 20\log k - 20\log(1+(\tau\omega)^2)^{1/2} \\ \varphi = -arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

$$|H(j\omega| = f\left(\arg\left[H\left(j\omega\right)\right]\right)$$



Allure de Black pour un système de 1er ordre

II. Système de premier ordre généralisé

1. Définition

On appelle systèmes de premier ordre généralisé, les systèmes dont l'équation différentielle est de la forme suivante :

$$\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\left(e(t) + \tau'\frac{d\,e(t)}{dt}\right)$$

Hypothèse : conditions initiales nulles

La fonction de transfert est :

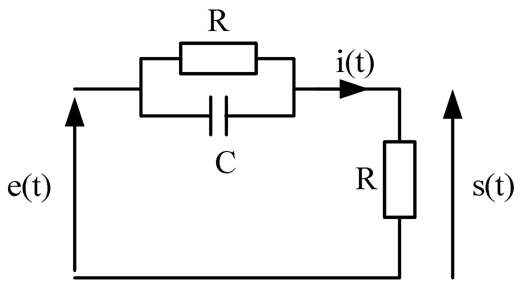
$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=K\frac{1+\tau' p}{1+\tau p}$$

Soit $\lambda=\frac{\tau'}{\tau}, \quad \tau$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

2. Exemples

a. Système électrique à avance de phase



$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$$

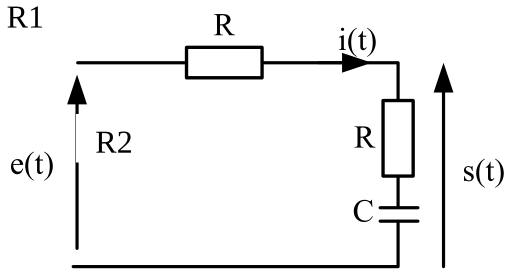
$$H(p)=\frac{R_2}{R_2+\cfrac{R_1\cfrac{1}{Cp}}{R_1+\cfrac{1}{Cp}}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{1+R_1C\,p}{1+\cfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\,p}$$

Soient : $\tau' = R_1C$, $\tau=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$ et $K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$

Finalement on obtient la forme d'un système de premier ordre généralisé $H(p)=K\frac{1+\tau' p}{1+\tau p}$

$\lambda=\frac{\tau'}{\tau}=\frac{R_1+R_2}{R_2}\rangle 1 \Rightarrow$ Système à avance de phase.

b . Système électrique à retard de phase



Calculons $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1+R_2C\,p}{1+(R_1+R_2)C\,p}=\dfrac{1+\tau'\,p}{1+\tau\,p}$

Avec : $\tau'=R_2C$, $\tau=(R_1+R_2)C$ et $k=1$

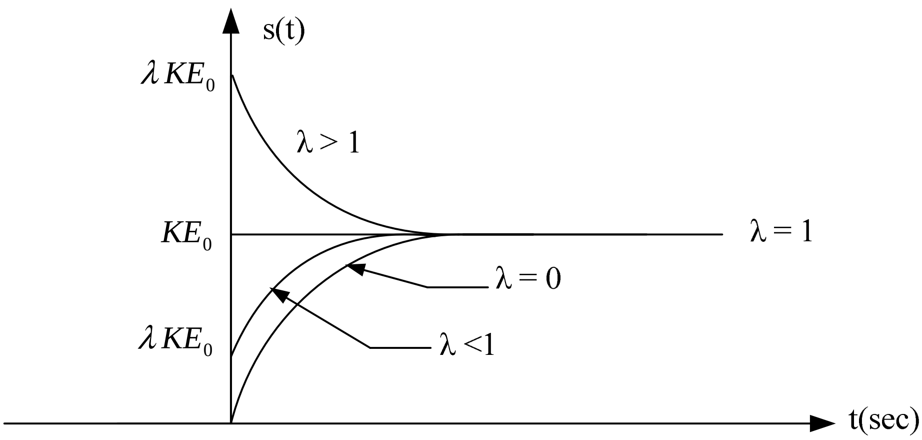
$\lambda=\dfrac{\tau'}{\tau}=\dfrac{R_2}{R_2+R_1}\langle 1\Rightarrow$ Système à retard de phase.

3. Etude temporelle

On considère une entrée $e(t)=E_0u(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}&S(p)=H(p)\times E(p)=k\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}.\frac{E_0}{p}\\&\Rightarrow s(t)=kE_0\left(1+(\lambda-1)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)u(t)\end{aligned}}$$

Cette réponse est représentée schématiquement, selon la valeur de λ, sur la figure suivante :



Réponses indicielle d'un système de premier ordre généralisé

$s(0)=\lambda kE_0$

$s(\infty)=kE_0$

Remarque :

Pour λ=0 on retrouve le cas du système de premier ordre.

On note aussi que pour λ>1, le système commence par dépasser sa valeur finale, de sorte que sa sortie atteint des valeurs notables bien plus vite que celle du système de premier ordre.

4. Etude harmonique $(p = j\omega)$

$$H(j\omega)=\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}=K\frac{1+\lambda\tau\, j\omega}{1+\tau\, j\omega}=H_1(j\omega)*H_2(j\omega)$$

Avec $\begin{cases} H_1(j\omega)=\dfrac{K}{1+\tau\, j\omega} \\ H_2(j\omega)=1+\lambda\tau\, j\omega \end{cases}$ *et* $\begin{cases} |H_1(j\omega)|=\dfrac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \\ |H_2(j\omega)|=\sqrt{1+(\lambda\tau\omega)^2} \end{cases}$

a. Diagramme de Bode

Diagramme asymptotique

$$|H(j\omega)|=|H|=k\frac{\sqrt{1+(\lambda\tau\omega)^2}}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

Module : $|H|_{dB}=20\log_{10}|H|=20\log_{10}|H_1|+20\log_{10}|H_2|$

Argument : $Arg[H(j\omega)]=\arg[H_1(j\omega)]+\arg[H_2(j\omega)]$

Premier cas $(\lambda > 1)$ **système à avance de phase**

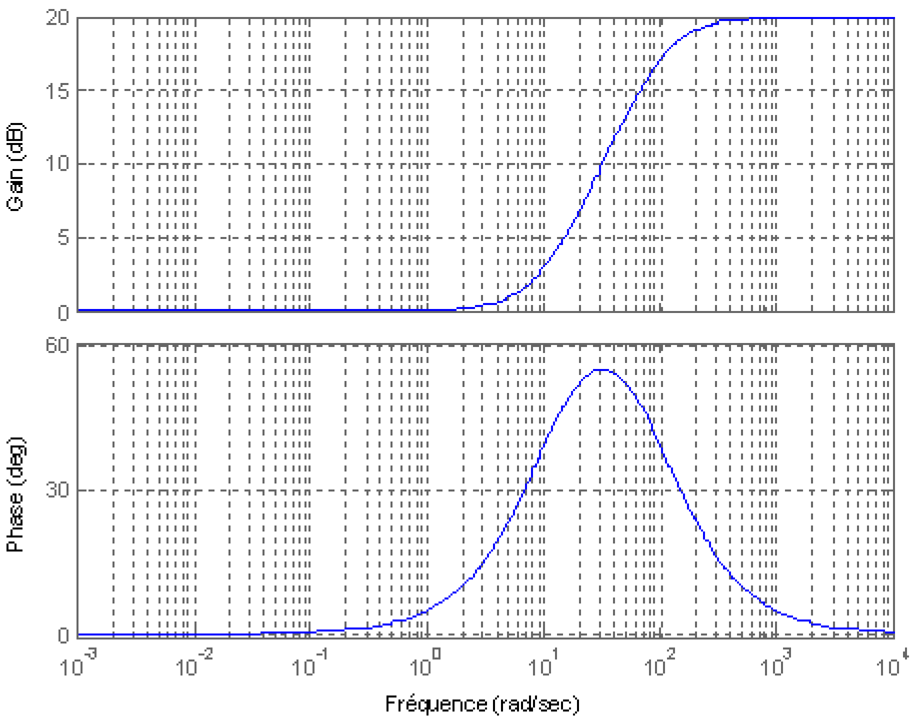


Diagramme de Bode d'un système de 1^er ordre généralisé $\lambda = 10 > 1$

Deuxième cas $(\lambda \langle 1)$ système à retard de phase

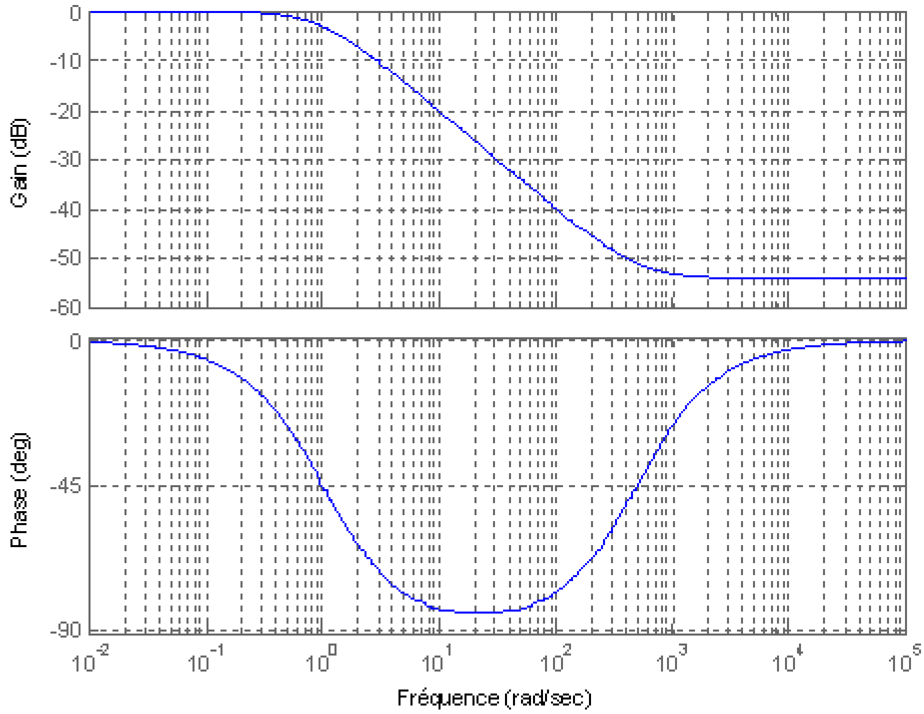


Diagramme de Bode d'un système de 1^{er} ordre généralisé $\lambda = 0.002 \langle 1$

Remarques :

Pour un système de premier ordre généralisé, la courbe de phase présente un extremum :

Si $(\lambda \langle 1)$ *: un minimum.*

Si $(\lambda \rangle 1)$ *: un maximum.*

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\lambda}}$$

$$\varphi_m = \arcsin(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1})$$

$$|H(j\omega)| = k\sqrt{\lambda}$$

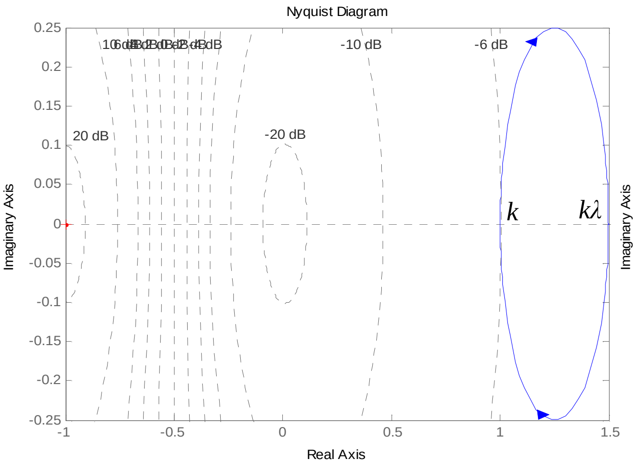
b. lieu de niquist :

$$H(j\omega) = k\frac{1+\lambda(\tau\omega)^2}{1+(\tau\omega)^2} + jk\frac{(\lambda-1)\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} = X + jY$$

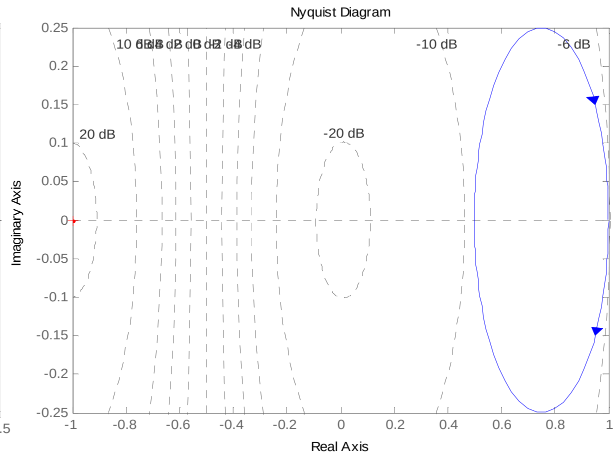
$$\Rightarrow Y^2 + \left(X - \frac{k(\lambda+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{k(\lambda-1)}{2}\right)^2$$

$$pour\ \omega = 0 \begin{cases} X = k \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$pour\ \omega \longrightarrow \infty \begin{cases} X = k\lambda \\ Y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

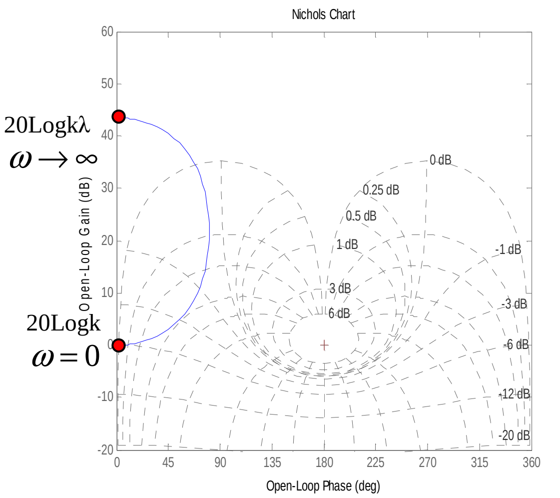


Système à avance de phase (Y >0)

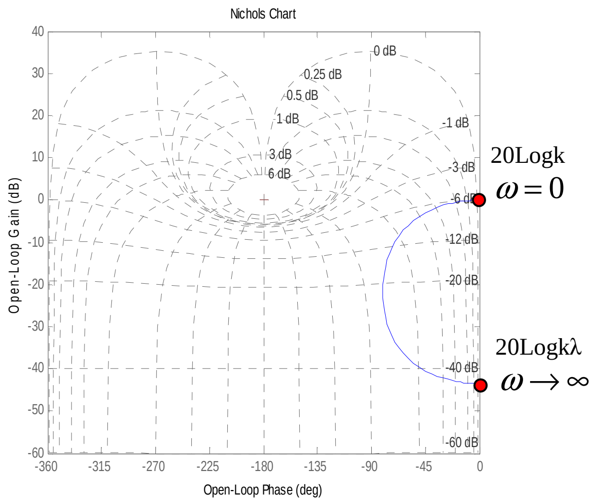


Système à retard de phase (Y <0)

b. lieu de black :



Système à avance de phase (λ >1)



Système à retard de phase (λ <1)

III. Systèmes de second ordre

1. Définition

On appelle système de second ordre d'entrée e(t) et de sortie s(t) tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{d\,s(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

Avec :

K est le **gain statique** du système (gain en régime permanent).

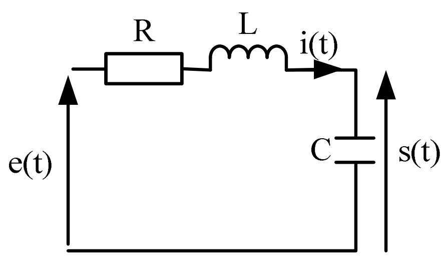
ω_0 : est appelé pulsation libre ou pulsation naturelle ou **pulsation propre** du système **non amorti** (se mesure en rad/s).

m : est appelé **amortissement** du système ou facteur d'amortissement ou coefficient d'amortissement.

En appliquant la transformée de Laplace à conditions initiales nulles ($s(0)=0 \; et \; s'(0)=0$)

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\,\omega_0^2}{p^2 + 2m\,\omega_0\,p + \omega_0^2}$$

2. Exemple (Circuit RLC)



On appliquant la loi de maille on détermine l'équation différentielle du circuit

$$\begin{cases} e(t) = R\,i(t) + L\dfrac{d\,i(t)}{dt} + s(t) \\ i(t) = C\dfrac{d\,s(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow e(t) = LC\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC\frac{d\,s(t)}{dt} + s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace (T.L) à condition initiales nulles à l'équation différentielle précédente on obtient :

$$E(p) = \left(LC\,p^2 + RC\,p + 1\right)S(p)$$

La fonction de transfert du circuit est défini par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LC\,p^2 + RC\,p + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}\,p + \frac{1}{LC}}$$

Soit

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \\ m = \dfrac{1}{2} R \sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

3. Etude temporelle du système de second ordre

L'équation caractéristique du système second ordre est défini par :

$$E_c(p) = D(p) = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + 2m\omega_0\, p + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1)$$

a. Système du second ordre hyper-amorti $(m \succ 1)$

$$\Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1) \succ 0$$

L'équation caractéristique à deux pôles réels : $\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau_2} \end{cases}$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} = \frac{\dfrac{k}{\tau_1\tau_2}}{p^2 + \dfrac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2} p + \dfrac{1}{\tau_1\tau_2}} = \frac{k\,\omega_0^2}{p^2 + 2m\,\omega_0\, p + \omega_0^2}$$

Par identification on aura : $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \\ m = \dfrac{1}{2}\dfrac{\tau_1+\tau_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \end{cases}$

<u>Réponse indicielle</u>

L'entrée appliquée est un échelon de position $e(t) = E_0 u(t)$

$$\Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{kE_0}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ donne :

$$s(t)=kE_0\left[1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)-\tau_2\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right)\right]u(t)$$

b. Système du second ordre critique $(m=1)$

$On\,a:\ m=1\Rightarrow\Delta=0$

$$p_1=p_2=-\omega_0=-\frac{1}{\tau}$$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{k\,\omega_0^2}{p^2+2\,\omega_0\,p+\omega_0^2}=\frac{K\,\omega_0^2}{(p+\omega_0)^2}$$

<u>Réponse indicielle</u>

$$e(t)=E_0u(t)\Rightarrow\ E(p)=\frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p)=H(p)E(p)=\frac{K\,\omega_0^2E_0}{p(p+\omega_0)^2}=\frac{K\,E_0}{p(1+\tau\,p)^2}$$

$$s(t)=L^{-1}\left[\frac{kE_0}{p(1+\tau\,p)^2}\right]=kE_0\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]u(t)$$

c. Système du second ordre oscillant amorti $(0\langle\, m\,\langle\ 1)$

$m\langle 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta^{'}\langle\, 0$

$\Delta^{'}=-\omega_0^2(1-m^2)=j^2\omega_0^2(1-m^2) \qquad (j^2=-1)$

Donc l'équation caractéristique à deux pôles complexes conjugués

$$\begin{cases} p_1=-m\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ p_2=-m\omega_0-\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

<u>Réponse indicielle</u>

Cette réponse est obtenue pour $(e(t)=E_0u(t))$,

La sortie $s(t)$ du système est :

$$S(p)=H(p)E(p)=\frac{kE_0\,\omega_0^2}{p\left(p^2+2m\,\omega_0\,p+\omega_0^2\right)}$$

$$\Rightarrow s(t)=L^{-1}\left[S(p)\right]$$

$$\Rightarrow s(t)=kE_0\left[1-\frac{\exp(-m\omega_0\,t)}{\sqrt{1-m^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t+\psi\right)\right]u(t)$$

$$\psi = arctg \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$
$$\psi = \arccos(m)$$

Pour le système du second ordre oscillant amorti, on définit:

- ***Pseudo pulsation du système***

Cette pseudo pulsation est définie par $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$

- ***Temps de premier dépassement :***

On appelle temps de premier dépassement, l'instant où la sortie atteint son premier maximum. On le note par t_p .

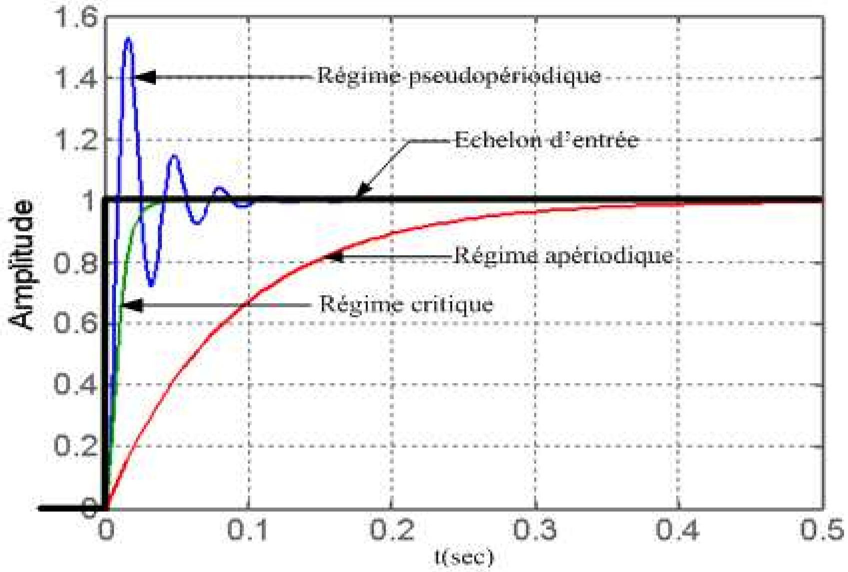
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$: Temps de premier pic

- ***Dépassement:***

On appelle amplitude de premier dépassement, l'amplitude du premier maximum sur la valeur finale de la sortie.

$$D = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} = \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

En (%) : $D(\%) = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100 = 100 \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$



Réponses indicielles d'un système de second ordre pour m=(0.5;1;3)

d. Système de second ordre oscillant pur $(m=0)$

$$m=1 \Rightarrow \Delta=-\omega_0^2$$

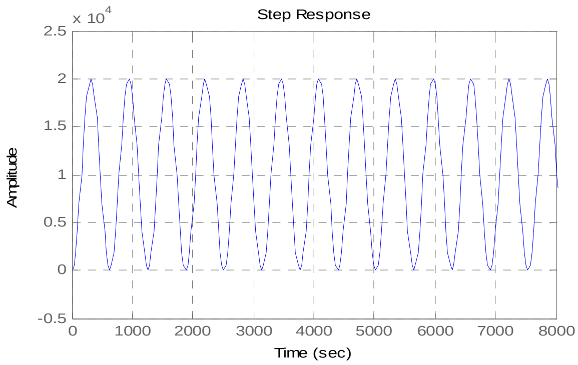
$$poles \;\; p_{1,2}=\pm j\omega_0$$

$$H(p)=\frac{k\omega_0^2}{p^2+\omega_0^2}$$

Réponse indicielle

$$S(p)=\frac{k\omega_0^2 E_0}{p(p^2+\omega_0^2)}$$

$$s(t)=kE_0(1-\cos\omega_0 t)u(t)$$



4. Etude harmonique des systèmes de second ordre $(p=j\omega)$

Règles générale de traçage asymptotique pour le diagramme de Bode

Les règles générales pour les tracés asymptotiques sont les suivantes :

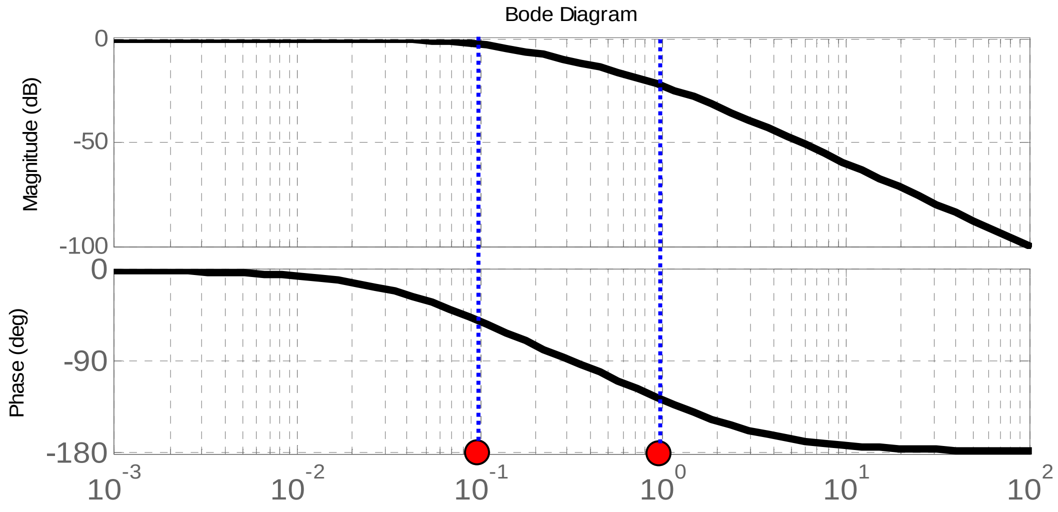
- Représenter le module des pôles $|p_i|$ et des zéros $|z_i|$ sur l'axe des pulsations ω.
- Chaque fois qu'on rencontre un pole, le tracé asymptotique du module voit sa pente diminuer de 20db/décade.
- Quant on rencontre un zéro, le tracé asymptotique du module voit sa pente augmenter de 20db/décade.
- Pour un pole négatif ou un zéro positif, le tracé asymptotique de l'argument *diminue* de $\frac{\pi}{2}$
- Pour un pole positif ou un zéro négatif, le tracé asymptotique de l'argument *augmente* de $\frac{\pi}{2}$.

a. Système hyperamorti (m>1)

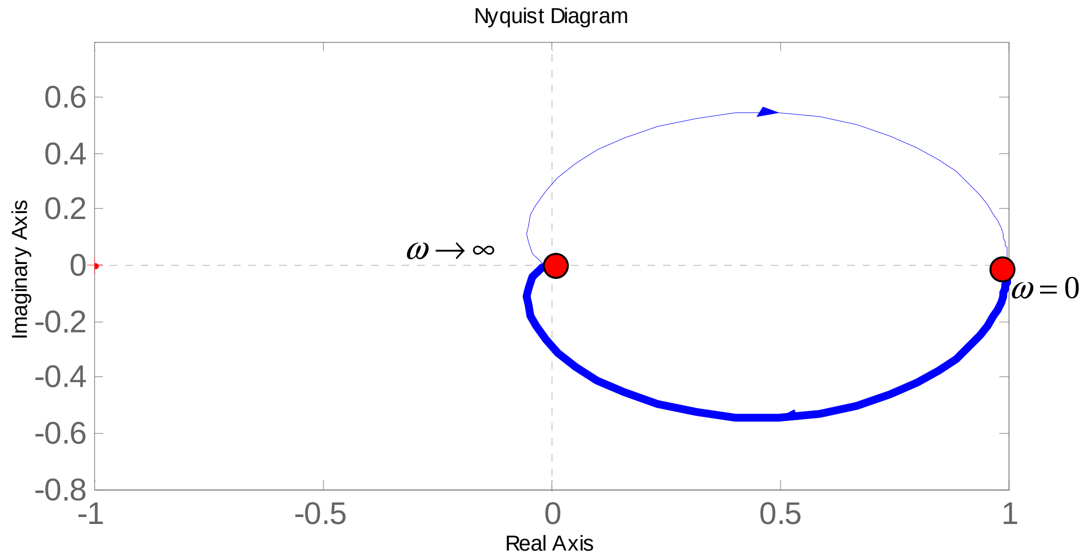
$$H(p)=\frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Lieu de Bode

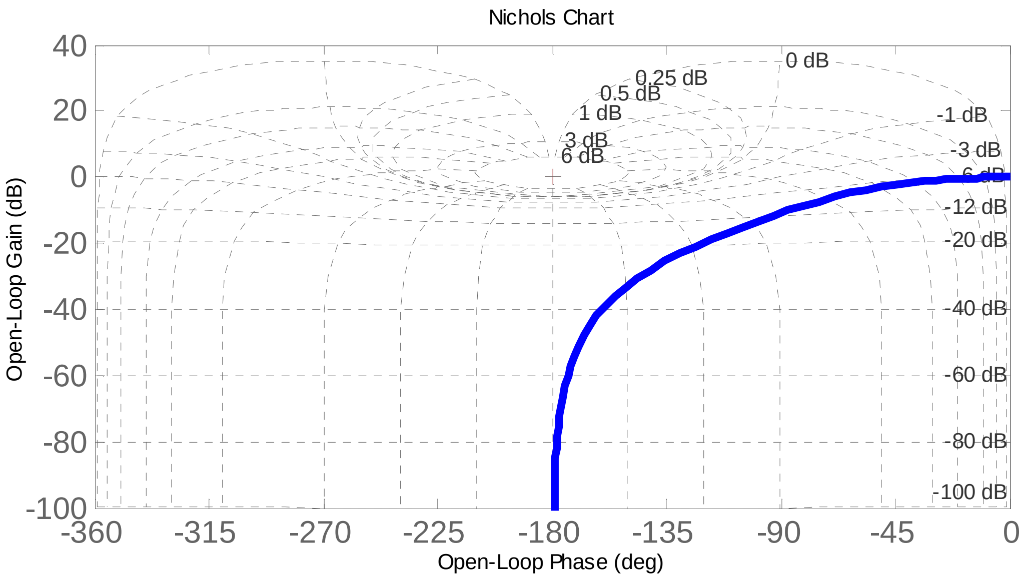
Exemple : $H(p) = \dfrac{1}{(1+p)(1+10p)} = \dfrac{0.1}{p^2 + 1.1p + 0.1}$ $\quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{\tau_1} = -0.1 \\ p_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} = -1 \end{cases}$



Lieu de Nyquist



Lieu de Black



b. Système du second ordre oscillant amorti (0<m<1)

La transmittance harmonique du système est : $H(j\omega) = \dfrac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \dfrac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2jm\omega_0\,\omega + \omega_0^2}$

Posons $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: pulsation normalisée (réduite).

$$H(ju) = \frac{k}{1 - u^2 + 2jmu}$$

Posons $|H(ju)| = |H|$

$$\begin{cases} |H(ju)| = \dfrac{k}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + 4m^2u^2}} \\ \varphi = \arg\left[H(ju)\right] = -arctg\left(\dfrac{2mu}{1-u^2}\right) \end{cases}$$

Lieu de Bode

- Pour $\omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \quad ou\ |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

- Pour $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \dfrac{k}{2m} \quad ou\ |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(2m) \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$

- Pour $\omega \langle\langle \omega_0 \Leftrightarrow u \langle\langle 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \Rightarrow |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

- Pour $\omega \rangle\rangle \omega_0 \Leftrightarrow u \rangle\rangle 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \dfrac{k}{u^2} \;\; ou \;\; |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) - 40\log_{10}(u) \\ \varphi = -180^\circ \end{cases}$

La représentation asymptotique de Bode en amplitude est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \langle\langle \omega_0)$ $|H|_{dB} = 20\log_{10}(k)$
- ✓ Une asymptote oblique d'équation $\left(|H|_{dB} = 20\log_{10}(K) - 40\log_{10}(u)\right)$ de pente $(-40dB/décade)$ pour $(\omega\rangle\rangle \omega_0)$
- ✓ Le point d'intersection entre les deux asymptotes est le point où $(\omega = \omega_0)$

La représentation asymptotique de Bode en phase est aussi composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \langle\langle \omega_0)$ $(\varphi = 0^\circ)$
- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour $(\omega \rangle\rangle \omega_0)$ $(\varphi = -180^\circ)$

Calcul de la pulsation de résonance

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = \frac{k}{2}\frac{4u^3 - 4u + 8um^2}{\left[(1-u^2)^2 + (2mu)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = 0 \Leftrightarrow u\left(4u^2 - 4 + 8m^2\right) = 0$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ 4u^2 - 4 + 8m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_r = \sqrt{1-2m^2}$$

Or $u_r = \dfrac{\omega_r}{\omega_0}$ donc $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$ pulsation de résonance

ω_r est définie quand $1-2m^2 \rangle 0 \;\Rightarrow m \langle \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$$\left|H_{\max}\right| = \left|H(j\omega_r)\right| = \frac{k}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Facteur de résonnace :

$$Q(m) = \frac{\left|H_{\max}\right|}{\left|H(0)\right|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Pic de résonnace :

$$MP = 20\log Q = 20\log\frac{\left|H_{\max}\right|}{\left|H(0)\right|}$$

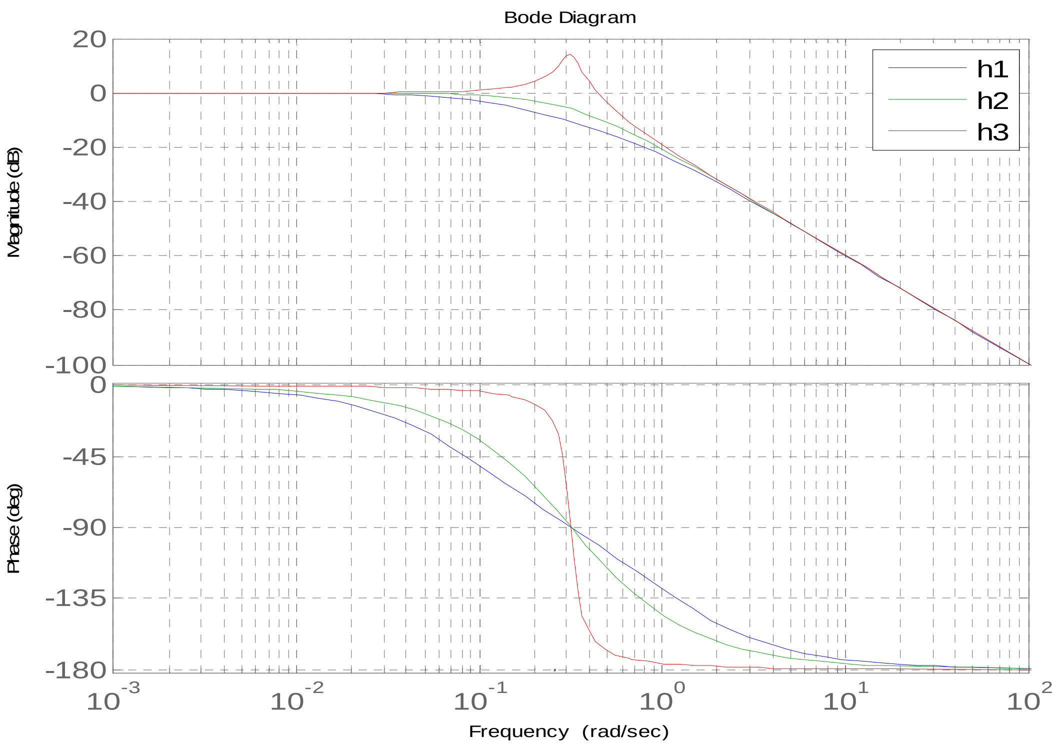
La valeur optimale de de MP=2.3dB correspond à Q=1.3 et m=0.42

Fréquence de résonnance :

$$fr = \frac{\omega_r}{2\pi}\ avec\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}\ \ pour\ 0 \prec m \prec \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La bande passante à -3dB :

$$\omega_{BP} = \omega_0\sqrt{(1-2m^2)+\sqrt{4m^4-4m^2+2}}$$
$$pour\ m=0 \Rightarrow \omega_{BP} = 1.55\omega_0$$
$$pour\ m=1 \Rightarrow \omega_{BP} = 0.64\omega_0$$



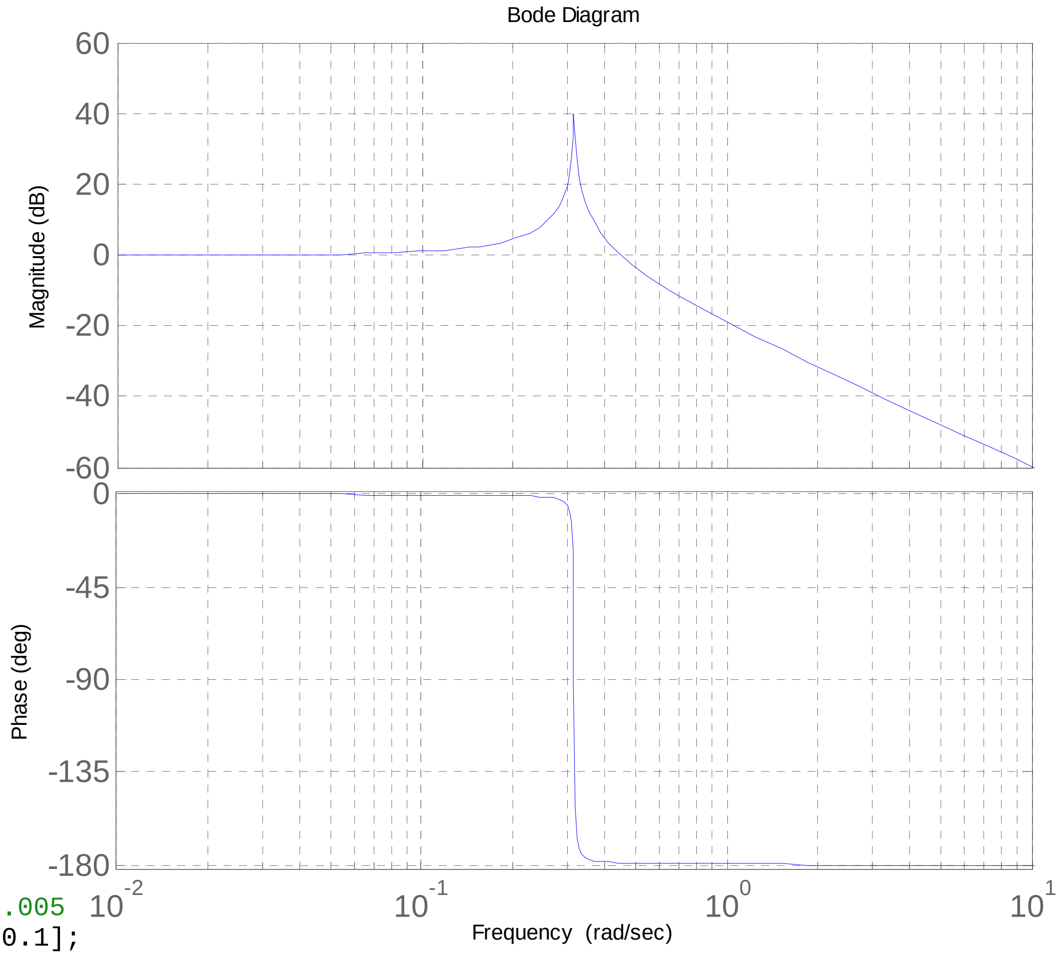

```
%m=1.74,w0=0.31rad/s
n1=[0.1];
```

```
d1=[1 1.1 0.1];
h1=tf(n1,d1);

%m=1
n2=[0.1];
d2=[1 0.63 0.1];
h2=tf(n2,d2);

%m=0.1
n3=[0.1];
d3=[1 0.63*0.1 0.1];
h3=tf(n3,d3);

bode(h1,h2,h3)
grid
```




```
%m=0.005
n4=[0.1];
d4=[1 0.63*0.005 0.1];
h4=tf(n4,d4);
bode(h4)
```

Lieu de Nyquist

On représente $\operatorname{Im} g\left[H(j\omega)\right] = f\left(reél\left[H(j\omega)\right]\right)$

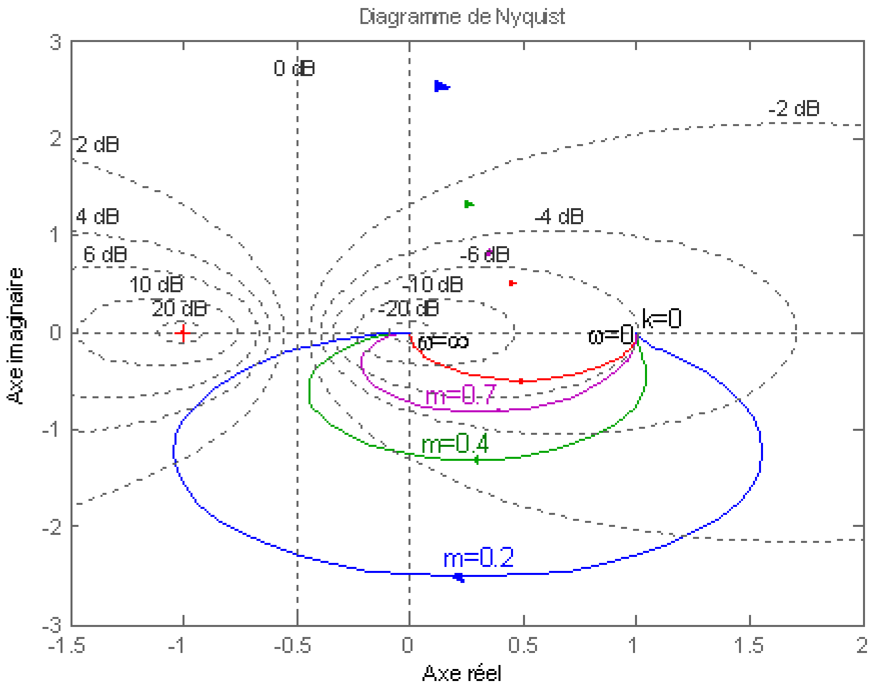


Diagramme de Nyquist pour les différentes valeurs de m pour un système de second ordre

Lieu de Black

C'est une courbe de $\left|H(j\omega)\right| = f\left(\arg\left[H(j\omega)\right]\right)$

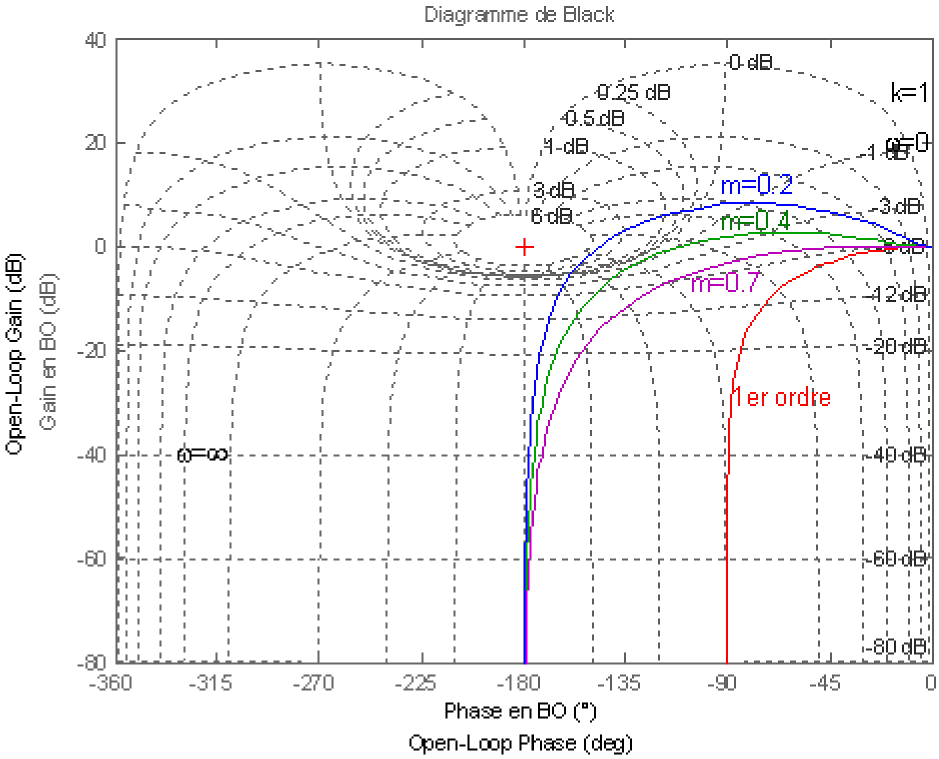


Diagramme de Black pour les différentes valeurs de m pour un système de second ordre