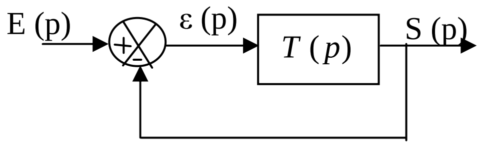
Chapitre 4 : Précision et Performances en Régime Transitoire des Systèmes Asservis Linéaires

I. Précision des systèmes asservis linéaires

1. Définition

La précision d'un système asservi linéaire est définie à partir de l'erreur ε entre la grandeur de consigne **E** et la grandeur de sortie **S**.



On distingue deux types de précisions :

- la précision statique : l'erreur statique en régime permanent $\varepsilon(\infty)$.

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)$$

- la précision dynamique : dépend des caractéristiques d'évolution en régime transitoire $\varepsilon(t)$.

2. Etude de l'erreur en régime statique :

Cas d'un système à retour unitaire :

On a $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$ et $S(p) = \varepsilon(p)T(p)$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+T(p)}$$

L'écart est fonction à la fois du signal d'entrée et de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) T(p) du système à commander.

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{E(p)}{1+T(p)}$$

Soit : $T(p) = \dfrac{k_\alpha}{p^\alpha} T_0(p)$

Avec : $T_0(p) = \dfrac{1+b_1 p+\ldots+b_m p^m}{1+a_1 p+\ldots+a_n p^n}$

$T_0(0) = 1$: gain statique de $T_0(p)$

α : nombre d'integrations purs dans $T(p)$: *Classe de système*

$$\lim_{p\to 0} T(p)=\frac{k_\alpha}{p^\alpha}$$

a. Système de classe 0 : $\alpha=0$

$$\lim_{p\to 0} T(p)=k$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty)=\lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0} p\frac{E(p)}{1+T(p)} \qquad \Rightarrow \varepsilon(\infty)=\lim_{p\to 0} p\frac{E(p)}{1+k}$$

Entrée : impulsion de Dirac

$$e(t)=E_0\,\delta(t)\xrightarrow{T.L} E(p)=E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty)=\lim_{p\to 0} p\frac{E_0}{1+k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon(\infty)=0}$$

Erreur statique de position ε_p

$$e(t)=E_0\,u(t)\xrightarrow{T.L} E(p)=\frac{1}{p}E_0 \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_p(\infty)=\frac{E_0}{1+k}}$$

Erreur statique de vitesse ε_v

$$e(t)=E_0\,t\,u(t)\xrightarrow{T.L} E(p)=\frac{1}{p^2}E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_v(\infty)=\lim_{p\to 0} p\frac{\frac{E_0}{p^2}}{1+k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_v(\infty)=\infty}$$

Erreur statique d'accélération ε_a

$$e(t)=E_0\frac{t^2}{2}u(t)\xrightarrow{T.L} E(p)=\frac{1}{p^3}E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_a(\infty)=\lim_{p\to 0} p\frac{\frac{E_0}{p^3}}{1+k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_a(\infty)=\infty}$$

b. Système de classe 1 : $\alpha=1$

$$\lim_{p\to 0} T(p)=\frac{k}{p}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty)=\lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0} p\frac{E(p)}{1+T(p)}=\lim_{p\to 0} p\frac{E(p)}{1+\frac{k}{p}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p^2 \frac{E(p)}{k}$$

Entrée : impulsion de Dirac

$$e(t) = E_0\,\delta(t) \xrightarrow{T.L} E(p) = E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p^2 \frac{E_0}{k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon(\infty) = 0}$$

Erreur statique de position ε_p

$$e(t) = E_0\,u(t) \xrightarrow{T.L} E(p) = \frac{E_0}{p} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0}$$

Erreur statique de vitesse ε_v

$$e(t) = E_0\,t\,u(t) \xrightarrow{T.L} E(p) = \frac{1}{p^2} E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \to 0} p^2 \frac{\frac{E_0}{p^2}}{k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \frac{E_0}{k}}$$

Erreur statique d'accélération ε_a

$$e(t) = E_0 \frac{t^2}{2} u(t) \xrightarrow{T.L} E(p) = \frac{1}{p^3} E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \to 0} p^2 \frac{\frac{E_0}{p^3}}{k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \infty}$$

c. Système de classe 2 : $\alpha = 2$

$$\lim_{p \to 0} T(p) = \frac{k}{p^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1+T(p)} = \lim_{p \to 0} p \frac{E(p)}{1+\frac{k}{p^2}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p^3 \frac{E(p)}{k}$$

Entrée : impulsion de Dirac

$$e(t) = E_0\,\delta(t) \xrightarrow{T.L} E(p) = E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p^3 \frac{E_0}{k} \qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon(\infty) = 0}$$

Erreur statique de position ε_p

$$e(t)=E_0\,u(t)\xrightarrow{T.L}E(p)=\frac{E_0}{p}\qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_p(\infty)=0}$$

Erreur statique de vitesse ε_v

$$e(t)=E_0\,t\,u(t)\xrightarrow{T.L}E(p)=\frac{1}{p^2}E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_v(\infty)=\lim_{p\to 0} p^3\,\frac{\frac{E_0}{p^2}}{k}\qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_v(\infty)=0}$$

Erreur statique d'accélération ε_a

$$e(t)=E_0\frac{t^2}{2}u(t)\xrightarrow{T.L}E(p)=\frac{1}{p^3}E_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_a(\infty)=\lim_{p\to 0} p^3\,\frac{\frac{E_0}{p^3}}{k}\qquad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_a(\infty)=\frac{E_0}{k}}$$

Tableau récapitulatif

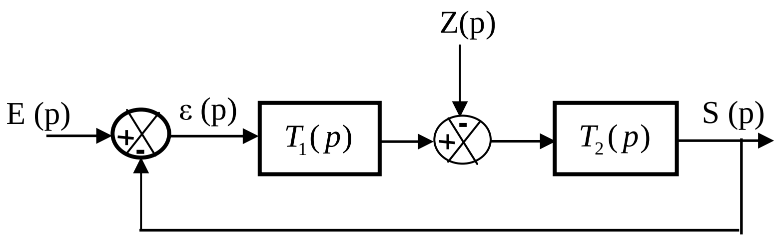
Entrée \ α	**0**	**1**	**2**	**3**
Impulsion $e(t)=E_0\partial(t)$	0	0	0	0
Echelon de position $e(t)=E_0u(t)$	$\frac{E_0}{1+k}$	0	0	0
Echelon de vitesse $e(t)=E_0tu(t)$	∞	$\frac{E_0}{k}$	0	0
Echelon d'accélération $e(t)=\frac{E_0}{2}t^2u(t)$	∞	∞	$\frac{E_0}{k}$	0

Remarques :

- La précision augmente avec la classe du système.
- L'erreur statique pour une entrée impulsionelle est nulle pour tout valeur de α .
- Pour une classe donnée, la précision se détériore si le signal d'entrée plus dur.

$$\boxed{\Rightarrow la\ précision\ d'un\ système\ asservi\ linéaire = 100.\frac{erreur\ statique}{amplitude\ de\ la\ consigne}}$$

3. Erreur statique du à la perturbation :



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

Or $S(p) = T_2(p)[T_1(p)\varepsilon(p) - z(p)]$

$$\varepsilon(p) = E(p) - T_2(p)T_1(p)\varepsilon(p) + T_2(p)z(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+T_1(p)T_2(p)} + \frac{T_2(p)z(p)}{1+T_1(p)T_2(p)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ε_1 : Erreur statique du à l'entrée

ε_2 : Erreur statique du à la perturbation

II. Performances en régime transitoire

II.1. Rapidité : Critère de Naslin

II.1.1. Systèmes du second ordre

$$H(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Gain statique : $H(0) = k = \dfrac{b_0}{a_0}$

Pulsation propre non amortie : $\omega_0^2 = \dfrac{a_0}{a_2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$

Coefficient d'amortissement : $4m^2 = \dfrac{a_1^2}{a_0\, a_2} \Rightarrow m = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$

On remarque que la rapidité d'un système de second ordre est liée au coefficient d'amortissement m, par analogie au système de 2ème ordre on va définir pour un système d'ordre quelconque des critères d'amortissement qui dépendent des coefficients de l'équation caractéristiques.

II.1.2. Critère de Naslin

Soit $H(p)$ une fonction de transfert à numérateur constant d'un système d'ordre n :

$$H(p)=\frac{b_0}{a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_{n-1}p^{n-1}+a_np^n} \qquad avec \quad a_i\rangle 0\;;\forall\; i=\{0\ldots n\}$$

Les transmittances en boucle fermée proposée par Naslin sont à amortissement réglable.

On définit $(n-1)$rapports caractéristiques :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=\dfrac{a_1^2}{a_0\,a_2}\\ \alpha_2=\dfrac{a_2^2}{a_1\,a_3}\\ \alpha_3=\dfrac{a_3^2}{a_2\,a_4}\\ \ldots.\\ \ldots..\\ \alpha_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}^2}{a_n\,a_{n-2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_i=\frac{a_i^2}{a_{i-1}\,a_{i+1}} \qquad 1\le i\le n-1$$

Le critère algébrique d'amortissement consiste à imposer aux rapports caractéristiques d'êtres supérieurs ou égaux à une valeur choisie α_0 tell que $(\alpha_i \geq\rangle \alpha_0)$ pour $i=\{1\ldots n-1\}$. Ce critère constitue une condition nécessaire mais non suffisante de stabilité et d'amortissement.

Pour monter que α joue le rôle d'un facteur d'amortissement Naslin à effectué deux expériences.

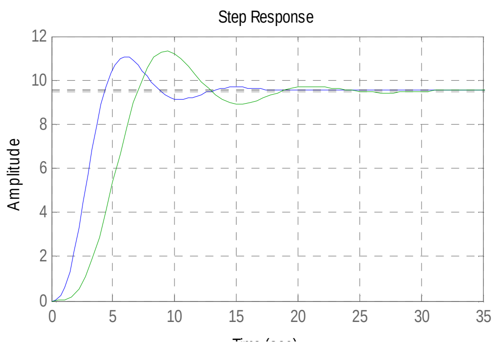
<u>Expérience 1</u>

Pour n variable $(n\rangle 2)$

On trace des réponses indicielles pour $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \ldots = \alpha_0 = cte$, $\alpha_0 = 1.75$

Programme sous « Matlab »

```
%Expérience 1 de Naslin
%Fonction de transfert h1
num1=[4.1];
den1=[1 1.33 1 0.429];
h1=tf(num1,den1)
step(h1)
grid
hold on
%Fonction de transfert h2
num2=[1];
den2=[1 1.33 1 0.429 0.1052];
h2=tf(num2,den2)
step(h2)
```



Ces réponses indicielles présentent des dépassements presque égaux.

Expérience 2

On fixe la valeur de n $(n \rangle 2)$.

On prend diverses valeurs de α_0, les réponses indicielles présentent des dépassements et des temps de pic plus grand que α_0 est plus petit.

Le dépassement est lié à α par la relation : $\boxed{Log(D\%) = 4.8 - 2\alpha_0}$

Le temps de pic est déterminé par la relation : $\boxed{t_p = 2.2 \frac{a_1}{a_0}}$

Le tableau suivant montre différentes valeurs du dépassement et d'amortissement suivant α_0 :

α_0	1.6	1.75	2	2.4
$D(\%)$	40	20	6	1
m	0.3	0.45	0.7	0.9

Exercices d'application

1. Soit un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{8p^3 + 21p^2 + 10.5p + 1 + K}$$

Déterminer la valeur de K qui garantie un dépassement inférieur ou égal à $D \le 6\%$.

$$D \le 6\% \;\Rightarrow\; \alpha_i \ge 2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0\, a_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(10.5)^2}{21(K+1)} \ge 2 \Leftrightarrow K \le \frac{(10.5)^2}{42} - 1$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1\, a_3} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(21)^2}{8 \times 10.5} \ge 2 \;\Rightarrow 5.25 \ge 2$$

$$\alpha_1 \ge 2 \;\Rightarrow\; \boxed{K \le 1.625}$$

2. soit le système tel que :

$$H(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 0.25}$$

Calculer le dépassement et le temps de pic

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0\, a_2} = \frac{1}{0.25 \times 2} = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1\,a_3} = \frac{4}{1\times 2} = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2\,a_4} = \frac{4}{2\times 1} = 2$$

Conclusion $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$

D'où : $Log(D\%) = 4.8 - 2\alpha_0 = 4.8 - 2\times 2 \quad \Rightarrow D\% = 6\%$

$$t_p = 2.2\frac{a_1}{a_0} \quad \Rightarrow t_p = 2.2\frac{1}{0.25} \quad \Rightarrow t_p = 8.8\sec$$