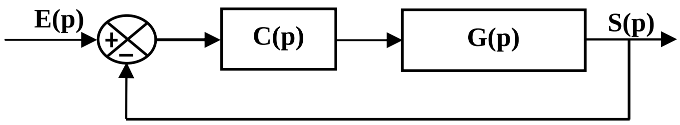
Chapitre 6 : Les Méthodes de Compensation des Systèmes Linéaires Continus

I. Principe

Soit le système asservi représenté par le schéma fonctionnel suivant :



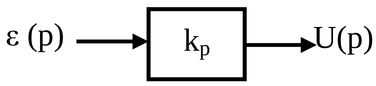
Le régulateur C(p) introduit dans la chaîne d'action a pour but de permettre d'assurer au processus à commander un comportement et des performances satisfaisantes.

II. Compensation par régulateurs P.I.D

1. Correcteur à action proportionnelle (correcteur P)

Le signal de commande $u(t)$ est proportionnel au signal d'erreur $\varepsilon(t)$: $u(t) = k_p\,\varepsilon(t)$

Dans le domaine de Laplace, on écrit :
$U(p) = k_p\,\varepsilon(p)$



- Pour un gain $0 < k_P < 1$ (atténuation), le correcteur proportionnel permet d'accroître la stabilité mais cette action se fait au détriment de la précision.
- Pour un gain $k_P > 1$ (amplification), l'action proportionnelle permet accroître la précision mais l'action se fait cette fois au détriment de la stabilité puisque le degré de stabilité décroît. un gain k_p trop élevé pouvant conduire à l'instabilité.

2. Correcteur Proportionnel Dérivé (correcteur PD) :

L'équation temporelle qui régit ce correcteur est :

$$u(t) = k_P\varepsilon(t) + k_D\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$U(p) = k_P\varepsilon(p) + k_D p\varepsilon(p) = k_P(1+\tau_D\, p)\varepsilon(p)$$

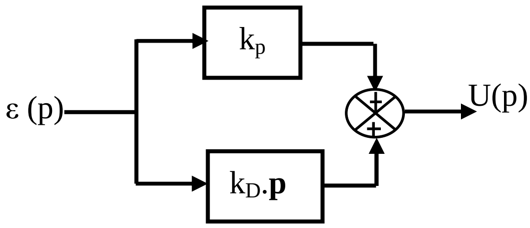
Dou $C(p) = k_p(1+\tau_D\, p)$: Forme standard.

$C(p) = k_P + k_D p$: Forme parallèle.

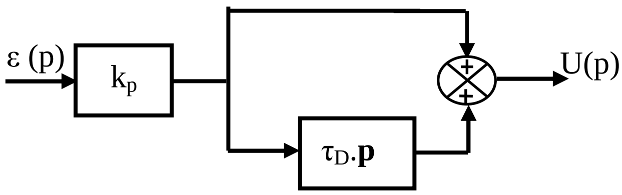
Les paramètres caractéristiques pour un correcteur PD sont : $k_p; k_d$ $et\ \tau_d = \dfrac{k_d}{k_p}$

k_p : Gain statique du correcteur.

$\tau_D = \dfrac{k_D}{k_p}$: Constante du temps de dérivation



Forme parallèle

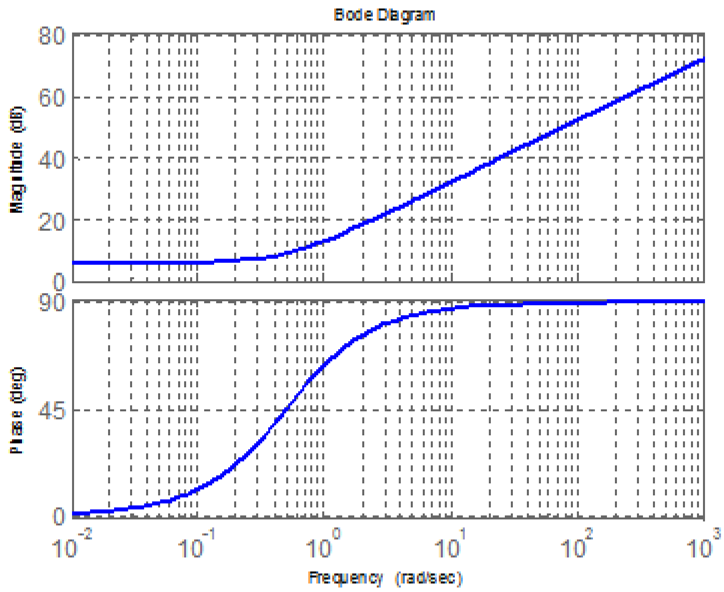


Forme standard

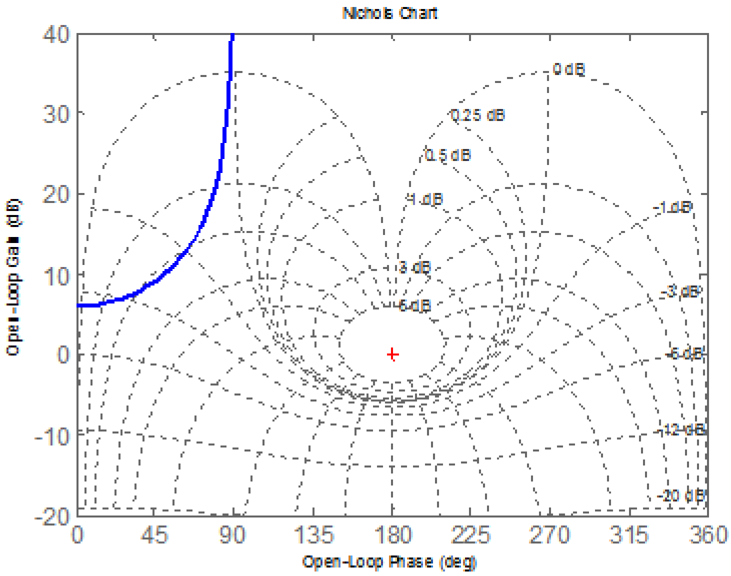
Un tel correcteur est utilisé chaque fois que le système corrigé doit être plus rapide, par ailleurs l'action dérivée à un effet stabilisant.

Exemple : $C(p) = 2(1+2p)$

Lieu de Bode :



Lieu de Black :



Le correcteur PD provoque un accroissement de gain et de phase pour les fréquences élevées. Cependant, le PD peut amplifier le bruit qui se localise à haute fréquence.

3. Correcteur Proportionnel Intégral : Correcteur PI

L'équation temporelle qui régit ce correcteur est :

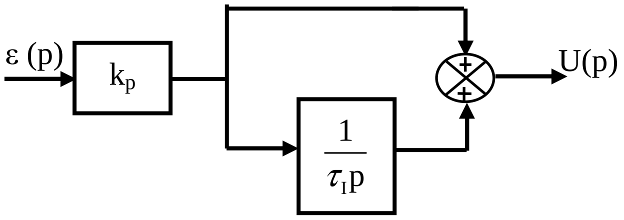
$$u(t) = k_P \varepsilon(t) + k_I \int_0^t \varepsilon(t) dt$$

$$U(p) = k_P \varepsilon(p) + k_I \frac{1}{p} \varepsilon(p)$$

$$U(p) = k_p (1 + \frac{k_I}{k_p} \frac{1}{p}) \varepsilon(p) = k_p (1 + \frac{1}{\tau_I p}) \varepsilon(p)$$

La fonction de transfert de ce régulateur est :

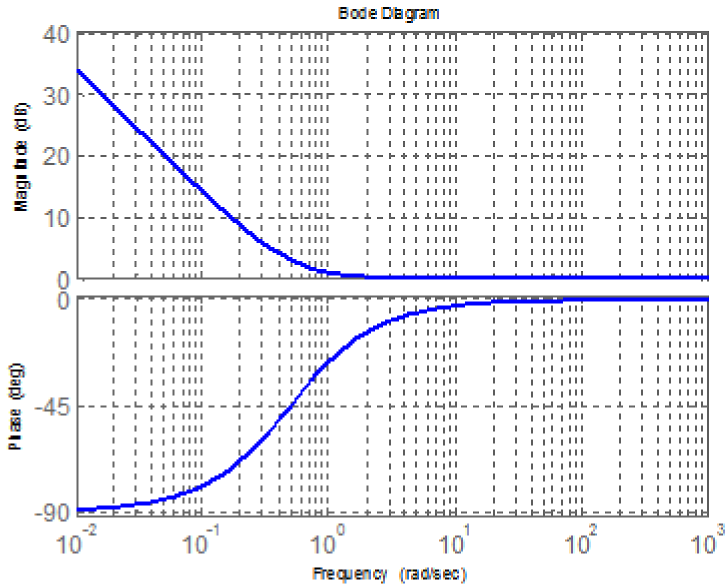
$C(p) = k_p (1 + \frac{1}{\tau_i p})$ τ_I : Constante de temps d'intégration.



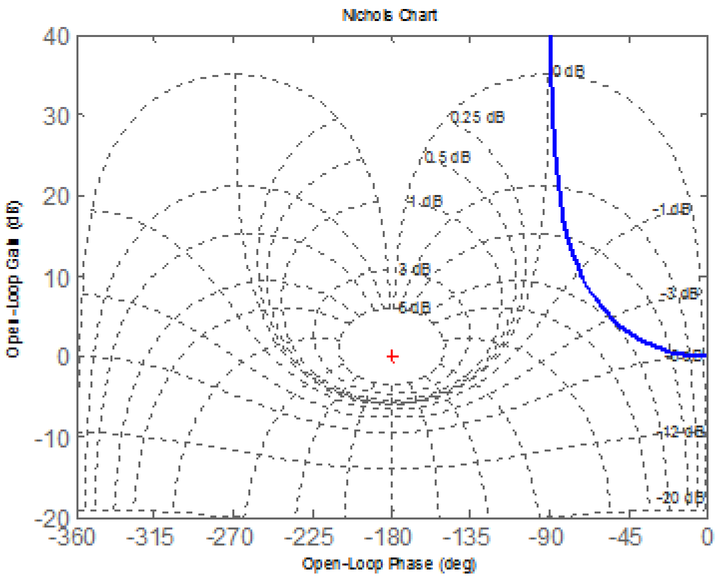
Un tel correcteur est à utiliser chaque fois qu'une erreur permanente doit être annulée. Ce correcteur a un effet déstabilisant, en raison du pole qu'il introduit à l'origine du plan complexe.

Exemple : $C(p)=1+\dfrac{1}{2p}$ soit $C(p)=\dfrac{1+2p}{2p}$

Lieu de Bode :



Lieu de Black :



4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (correcteur PID)

Le correcteur PID crée un signal de commande qui est la somme des effets proportionnel P, intégral I et dérivateur D.

L'équation temporelle qui régit le correcteur PID est :

$$u(t)=k_P\varepsilon(t)+\frac{1}{k_I}\int_0^t\varepsilon(t)dt+k_D\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$U(p)=k_P\varepsilon(p)+\frac{1}{k_I p}\varepsilon(p)+k_D p\varepsilon(p)=k_P\left(1+\frac{1}{\tau_I p}+\tau_D\, p\right)\varepsilon(p)$$

$$C(p)=k_P\left(1+\frac{1}{\tau_I p}+\tau_D\, p\right)$$

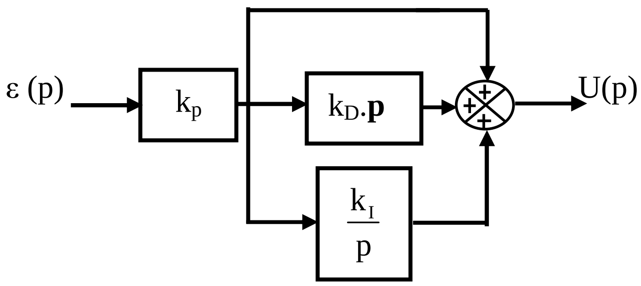
Soit $C(p)=k_P\left(\frac{1+\tau_I p+\tau_D\tau_I\, p^2}{\tau_I p}\right)$

Les paramètres caractéristiques pour un correcteur PID sont : $k_p;k_D;k_I;\ \tau_I=\frac{k_P}{k_I}\, et\, \tau_I=\frac{k_D}{k_p}$

k_p : Gain statique du correcteur.

$\tau_D=\frac{k_D}{k_p}$: Constante du temps de dérivation.

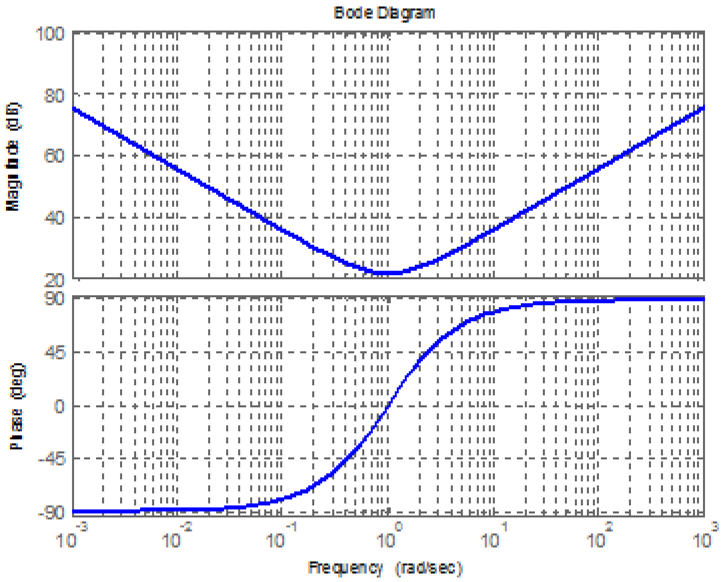
$\tau_I=\frac{k_P}{k_I}$: Temps d'action intégrale.



Lieu de Bode :

$$C(p)=3\left(\frac{1+2p+p^2}{0.5p}\right)$$

Lieu de Bode :



III. Compensation par avance/ retard de phase

1. Compensation par avance/ retard de phase

a. Principe

L'action dérivée n'est pas physiquement réalisable. Elle est approximée par une transmittance de la forme : $\dfrac{\tau_d p}{(1+\tau p)}$ avec $\tau \prec\prec \tau_d$

La transmittance d'un PD devient :

$$C(p) = k_p\left(1+\frac{\tau_d\, p}{1+\tau\, p}\right)$$

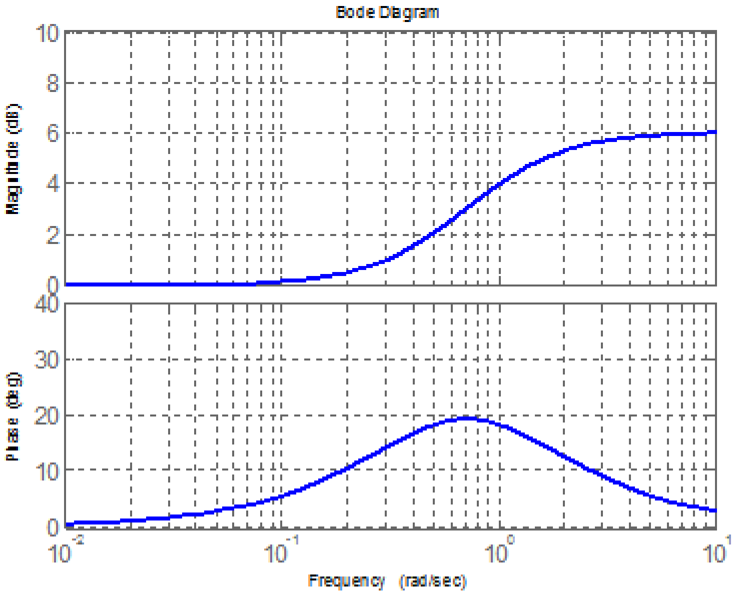
$$C(p) = k_p\left(\frac{1+\tau\, p+\tau_d\, p}{1+\tau\, p}\right)$$

$$C(p) = k_p\left(\frac{1+(\tau+\tau_d)\, p}{1+\tau\, p}\right)$$

$C(p) = k_p\left(\dfrac{1+a\tau\; p}{1+\tau\, p}\right)$Avec $a \succ 1$: facteur d'avance de phase

Exemple : $C(p) = \dfrac{1+2\; p}{1+p}$

b. Lieu de Bode :



Un tel correcteur élève la courbe de phase pour les basses et moyennes fréquences. Ce correcteur abaisse la courbe de gain pour les basses fréquences.