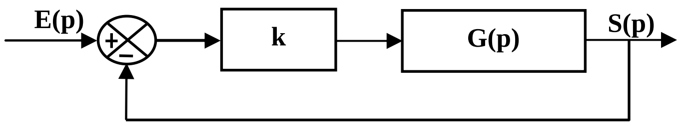
Chapitre 7 : Analyse et Synthèse des Systèmes Asservis Linéaires Continus par la méthode des Lieux de Pôles

I. Généralités

Soit le système asservi représenté par le schéma fonctionnel suivant :



La fonction de transfert du système en boucle ouverte T(p) : $T(p)=k.G(p)$

La fonction de transfert du système en boucle fermée H(p) : $H(p)=\dfrac{k.G(p)}{1+k.G(p)}$

Les pôles du système en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique : $1+kG(p)=0$.

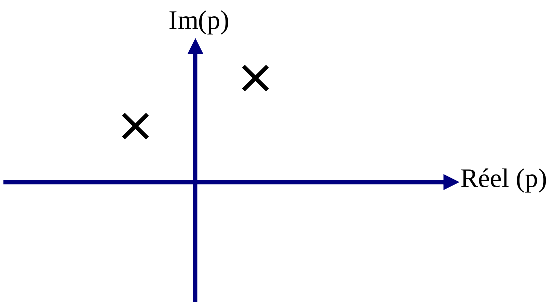
Soit $G(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$

Alors l'équation caractéristique devient : $1+k\dfrac{N(p)}{D(p)}=0$.

Ou bien : $D(p)+kN(p)=0$.

On constate que les pôles évoluent en fonction de k.

Alors : le lieu de pôles $=\{M(p)/1+kG(p)=0\}$, k varie de 0 à ∞



II. Règles du tracé du lieu de pôles

<u>Règle 1 : Les points de départ et les points d'arrivées</u>

Soit $G(p)=\dfrac{(p-z_1)(p-z_2)...(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)}$ avec $n \geq m$

Les zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte : $z_1, z_2, \ldots z_m$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte : $p_1, p_2, \ldots p_n$

L'E.C du système en boucle fermée: $D(p)+kN(p)=0 \Leftrightarrow \dfrac{N(p)}{D(p)}=-\dfrac{1}{k}$.

- Pour k=0, l'E.C devient : $D(p)=0 \Rightarrow (p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)=0$.

Les points de départ des branches sont les pôles de la fonction du transfert en boucle ouverte. On les représente par des croix.

- Pour $k \to \infty$, $N(p)=0 \Rightarrow (p-z_1)(p-z_2)...(p-z_m)=0$

Les points d'arrivées des branches sont les zéros de la fonction du transfert en boucle

ouverte. On les représente par des cercles.

<u>Règle 2 :</u>

On : a n pôles : n points de départ $\Rightarrow$ n branches.

Et m zéros : m points d'arrivées $\Rightarrow$ (n-m) arrivées à l'infini.

Le lieu de pôles possède n branches avec (n-m) directions asymptotiques.

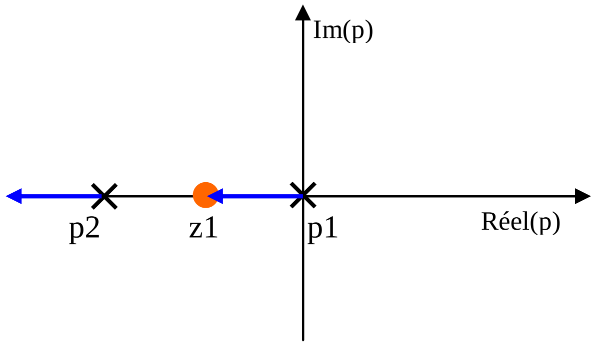
Exemple :

Soit la fonction de transfert du système en boucle ouverte : $G(p)=\frac{(p+1)}{p(p+2)}$

Les pôles du système en boucle ouverte : $p_1 = 0; p_2 = -3$ n=2 $\Rightarrow$ 2 branches.

Les zéros du système en boucle ouverte : $z_1 = -1;$ $\Rightarrow$ m=1

(n-m)=1 $\Rightarrow$ 1 direction asymptotique.



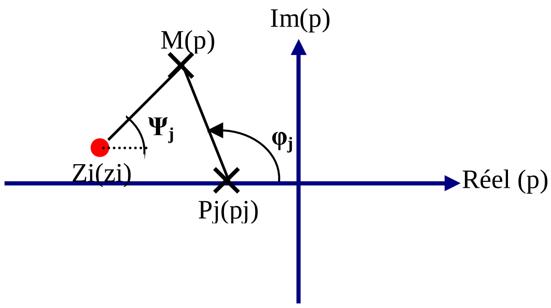
<u>Règle 3 :</u>

Le lieu de pôles est symétrique par rapport à l'axe des réels.

Si $\tilde{p}_i$ est une solution de l'E.C caractéristique alors $\bar{\tilde{p}}_i$ est aussi une solution.

<u>Règle 4: Condition sur les modules et les arguments :</u>

Soient les points M(p),Zi(zi) et Pj(pj)



$(p-p_j)=P_jMe^{j\varphi_j}$

$(p-z_i)=Z_iMe^{j\psi_i}$

Ona $G(p)=-\frac{1}{k}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(p-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(p-p_j)}$

Alors $Arg\left[G(p)\right]=(2\lambda+1)\pi=\sum_{i=1}^{m}arg(p-z_i)-\sum_{j=1}^{n}arg(p-p_j)$

D'où $\boxed{\operatorname{Arg}[G(p)]=\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j=(2\lambda+1)\pi}$

On a : $|G(p)|=\frac{1}{k}=\frac{\prod_{i=1}^{m} Z_iM}{\prod_{j=1}^{n} PM_j}$ D'où $\boxed{|G(p)|=\frac{1}{k}=\frac{\prod_{i=1}^{m} d_i}{\prod_{j=1}^{n} \rho_j}}$

Exemple :

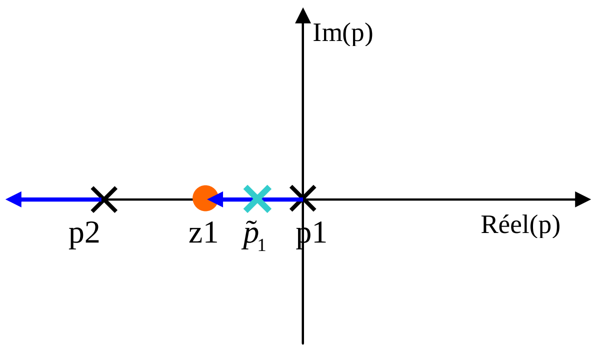
Soit la fonction de transfert du système en boucle ouverte : $G(p)=\frac{(p+1)}{p(p+2)}$

Les pôles du système en boucle ouverte : $p_1=0; p_2=-2$ n=2 $\Rightarrow$ 2 branches.

Les zéros du système en boucle ouverte : $z_1=-1;$ $\Rightarrow$ m=1

(n-m)=1 $\Rightarrow$ 1 direction asymptotique.

Déterminer k de façon à avoir un pole en boucle fermée $\tilde{p}_1=-0,5$



On a :

$$|G(p)|=\frac{d_1}{\rho_1\rho_2}=\frac{1}{k} \text{ C.à.d. } \frac{0,5}{0,5.1,5}=\frac{1}{k} \text{ alors } k=1,5.$$

Règle 5:

Les parties de lieu des pôles appartenant à l'axe des réels se trouvent à gauche d'un nombre impair de pôles et zéros.

Remarque : il faut tenir compte de l'ordre de multiplicité des poles et des zéros.

Règle 6:

Les directions asymptotiques sont données par la relation suivante :

$$\boxed{\theta_a=\frac{(2\lambda+1)\pi}{(n-m)};\ \lambda\in N}$$

Règle 7:

Les asymptotes concourent en un point de l'axe des réels d'abscisse x_a

$$x_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j - \sum_{i=1}^{m} Z_i}{n-m}$$

Diverses configurations d'asymptotes :