Cours de Traitement Du Signal - Signaux numériques / Echantillonnage

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

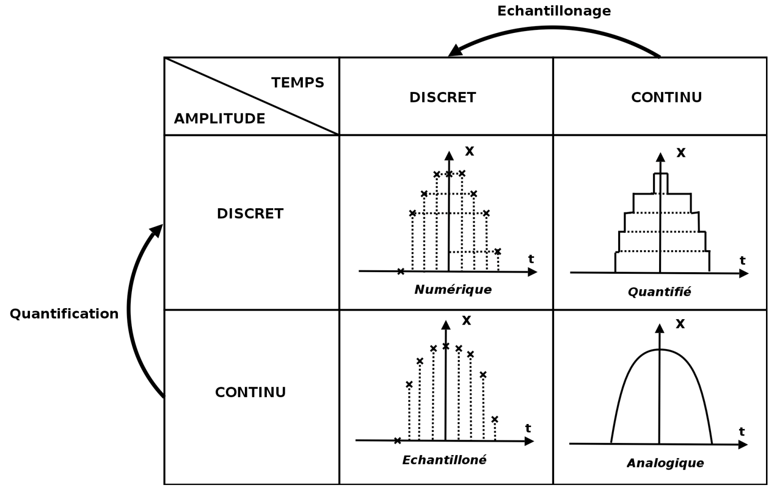
25 septembre 2007

Plan du cours

Traitement Numérique du Signal (DSP)

- Large diffusion des techniques de TDS
- Utilisation dans différents secteurs :
  - télécom
  - électronique grand public
  - automobile
  - spatial
  - militaire
  - industrie...
- Prédominance du numérique (DSP) depuis les années 80
  + performance / coût
  + reproductibilité des dispositifs
  + robustesse (parasites, vieillissement...)
  + paramétrage...

Continu / discret



Introduction

Problématique

- Traitement informatique ⇒ suite finie de nombres sur un intervalle fini.
- Echantillonnage : prélèvement d'échantillons sur un signal continu. En pratique, l'échantillonnage est effectué à période constante (fréquence d'échantillonage f_e).
- CAN et échantillonage ⇒ erreurs :
  - bruit de quantification
  - perte d'informations à l'échantillonage

Illustrations

- Réglage de la dynamique
- Réglage de la fréquence d'échantillonnage

Interprétation

Echantillonneur-bloqueur

- Echantillonneur = "horloge"
- Fréquence élevée (peu de limitation physique)
  - ⇒ reéchantillonnage : fréquence d'échantillonnage réelle
- bloqueur : maintenir la valeur échantillonée entre 2 échantillons
  - ⇒ nécessaire pour la conversion CAN

Modélisation

- Echantillonnage : prélèvement d'échantillons sur un signal continu $x(t)$ à une fréquence d'échantillonage f_e :

$$x_e(t) = x(t).\text{Ш}_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n.T_e).\delta(t - n.T_e)$$

Replement de spectre

Problèmatique

- Quel est l'effet de l'échantillonage sur le signal (spectral) ?
- Peut-on regénérer le signal analogique ?

Conséquences spectrales de l'échantillonages

- Transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n.T_e).\delta(t - n.T_e)$:

$$X_e(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_e}.\text{Ш}_{f_e}(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - n.f_e)$$

- Le spectre de x est "recopié" dans le domaine fréquentiel
  - ⇒ le spectre d'un signal échantillonné est périodique de période f_e

Replement de spectre

Conséquences

- Si x est à spectre borné ($-B < X(f) < B$) et $B < F_e/2$ pas de problème
- Si x est à spectre borné et $B \geq F_e/2$: recouvrement spectral
- Si x n'est pas à spectre borné ⇒ nécessité de borner le spectre (filtre anti-repliement)

Exemple simple

- Une petite applet...

Fenêtre d'observation

Problèmatique

- Traitement numérique $\Rightarrow$ mémorisation des échantillons
- Systèmes physiques réels $\Rightarrow$ mémoire finie $\Rightarrow$ nombre fini d'échantillons
- Modélisation d'une observation finie d'un phénomène éventuellement infini (périodique...) : produit du signal observé par une fonction "porte"

$$x_o(t) = x(t).\Pi_T(t)$$

Conséquences : distorsions fréquentielles

Convolution de la transformée de Fourier de x par un sinus cardinal :

$$X_o(f) = X(f) \otimes sinc(2.T.f)$$

Théorème de Shannon

Formulation

Un signal analogique $x(t)$ ayant un spectre de type passe-bas (borné) s'étendant jusqu'à f_{max} est entièrement décrit par la suite complète de ses valeurs instantanées $x(t_k)$ prélevées à intervalles réguliers de durée Te inférieure ou égale à $\frac{1}{2.f_{max}}$

Conséquences

- Choix judicieux de le fréquence d'échantillonnage : $f_e \geq 2.f_{max}$
- Placement d'un filtre analogique passe-bas anti-repliement avant l'échantillonneur ($f_c = f_e/2,56$)
- Ne pas utiliser de filtre numérique ! (repliement du gabarit)

Chaîne de traitement numérique

Capteur → **Conditionneur** → **Filtre passe-bas analogique (anti-repliement)** → **Echantillonneur** → **CNA**

Reconstruction d'un signal échantillonné

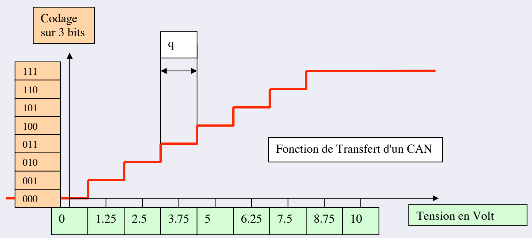
- Filtrage passe-bas idéal
- Multiplication par une porte fréquentielle
- Convolution par un sinus cardinal dans le domaine temporel :

$$x_r(t) = \sum_{n \in Z} x_e(n.T_e).sinc(f_e(t - n.T_e))$$

Définition

- Coder des seuils analogiques issus du bloqueur
- Permettre le stockage informatique de données binaires
- Caractérisation par fonction de transfert (non linéaire)
- Quantum : $q = \frac{A}{2^n}$

Illustration



Bruit de quantification

- Arrondis pour atteindre le seuil de numérisation
- Perte d'information
- Modélisation par un *bruit de quantification* :

$$P_{err} = \sigma_e^2 = E(e^2(k.T)) = \frac{q^2}{12}$$

Illustration