Cours
Electronique Générale

Pr L. Temimi

Faculté de Physique

Année 2019 / 2020

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
    1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),
  3. lois de Kirchhoff.

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),
  3. lois de Kirchhoff.
  4. Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : méthode des mailles et des noeuds, application à la notation matricielle.

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :

1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
2. relations tensions –courant (R, L, C),
3. lois de Kirchhoff.
4. Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : méthode des mailles et des noeuds, application à la notation matricielle.
5. Théorèmes fondamentaux (superposition, théorèmes de Thevenin et Norton, réciprocité), équivalence entre Thevenin et Norton.

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),
  3. lois de Kirchhoff.
  4. Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : méthode des mailles et des noeuds, application à la notation matricielle.
  5. Théorèmes fondamentaux (superposition, théorèmes de Thevenin et Norton, réciprocité), équivalence entre Thevenin et Norton.
- Régime variable :

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),
  3. lois de Kirchhoff.
  4. Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : méthode des mailles et des noeuds, application à la notation matricielle.
  5. Théorèmes fondamentaux (superposition, théorèmes de Thevenin et Norton, réciprocité), équivalence entre Thevenin et Norton.
- Régime variable :
  1. Circuits et signaux en régime variable,

Sommaire

- Introduction (Grandeurs Electriques)
- Courant continu :
  1. Définition, générateurs de tension et de courant (idéal, réel),
  2. relations tensions –courant (R, L, C),
  3. lois de Kirchhoff.
  4. Méthodes d'analyse des réseaux linéaires : méthode des mailles et des noeuds, application à la notation matricielle.
  5. Théorèmes fondamentaux (superposition, théorèmes de Thevenin et Norton, réciprocité), équivalence entre Thevenin et Norton.
- Régime variable :
  1. Circuits et signaux en régime variable,
  2. application du calcul variationnel (transformée de Laplace, exemple impédance symbolique et circuits à un signal échelon ou à signal impulsion).

Sommaire

- Régime sinusoïdal

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,

Sommaire

- Régime sinusoïdal

  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.

- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :

  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,

Sommaire

- Régime sinusoïdal

  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.

- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :

  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,
  5. unités logarithmiques.

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,
  5. unités logarithmiques.
- Étude des circuits RLC en régime libre :

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,
  5. unités logarithmiques.
- Étude des circuits RLC en régime libre :
  1. les différents régimes,

Sommaire

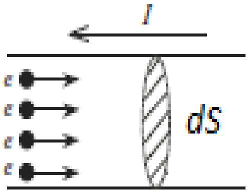
- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,
  5. unités logarithmiques.
- Étude des circuits RLC en régime libre :
  1. les différents régimes,
  2. conditions initiales.

Sommaire

- Régime sinusoïdal
  1. représentation des signaux en notations complexes,
  2. impédance électriques
  3. adaptation d'un générateur sinusoïdal.
  4. méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal et théorèmes fondamentaux, application aux circuits RC, RL.
- Étude des circuits résonnants série et parallèle, régime forcé :
  1. réponses en fréquence,
  2. coefficients de qualité,
  3. bande passante,
  4. sélectivité,
  5. unités logarithmiques.
- Étude des circuits RLC en régime libre :
  1. les différents régimes,
  2. conditions initiales.
  3. Circuits RC et RL (énergie maximale dans C et L).

Definition

L'électricité est une forme d'énergie produite par la circulation de charges électriques dans un corps conducteur ou semi-conducteur. Certains corps, en particulier les métaux (aluminium, cuivre...) sont de très bons conducteurs parce qu'ils possèdent des électrons qui peuvent se libérer de l'attraction du noyau de l'atome pour participer à la conduction électrique. Dans d'autres matériaux appelés isolants, les charges électriques ne peuvent pas circuler.



- La charge élémentaire $-q$ est celle de l'électron exprimée en coulomb (C)

$$-q = 1.6 \times 10^{-19}\, C$$

- La charge élémentaire $-q$ est celle de l'électron exprimée en coulomb (C)

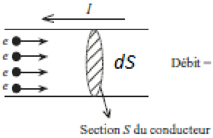
$$-q = 1.6 \times 10^{-19} C$$

- Les charges peuvent aussi être positives (Semi-conducteurs, Solutions chimique)

- La charge élémentaire $-q$ est celle de l'électron exprimée en coulomb (C)

$$-q = 1.6 \times 10^{-19}\, C$$

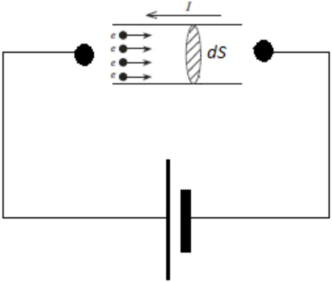
- Les charges peuvent aussi être positives (Semi-conducteurs, Solutions chimique)
- Soit un conducteur de section dS contenant des porteurs de charges mobiles



$$\text{Débit} = \frac{\text{nombre de charges traversant la section } S}{\text{intervalle de temps d'observation}}$$

- Les collisions que subissent ces porteurs de charges sur les imperfections du réseau cristallin du conducteur qui sont du à l'agitation thermique, leur communiquent un mouvement désordonné dont la résultante du point de vue de transport de l'électricité, est nulle.

- Les collisions que subissent ces porteurs de charges sur les imperfections du réseau cristallin du conducteur qui sont du à l'agitation thermique, leur communiquent un mouvement désordonné dont la résultante du point de vue de transport de l'électricité, est nulle.
- Si on relie les deux extrémités du conducteur à un générateur de tension



- Le générateur est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\vec{E}$ qui permet le déplacement **ordonné** des charges électriques avec une vitesse $\vec{v}$ proportionnelle à $\vec{E}$

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (\mu : \text{ est la mobilité des charges})$$

- Le générateur est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ qui permet le déplacement **ordonné** des charges électriques avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ proportionnelle à $\overrightarrow{E}$

$$\overrightarrow{v} = \mu \overrightarrow{E} \quad (\mu : \text{ est la mobilité des charges})$$

- $$[\mu] = \left[m^2 V^{-1} s^{-1}\right]$$

- Le générateur est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ qui permet le déplacement **ordonné** des charges électriques avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ proportionnelle à $\overrightarrow{E}$

$$\overrightarrow{v} = \mu \overrightarrow{E} \quad (\mu : \text{est la mobilité des charges})$$

- $$[\mu] = \left[m^2 V^{-1} s^{-1}\right]$$

- si n étant la densité des charges, c'est-à-dire le nombre de porteurs de charge par unité de volume, on a

$$N = \overrightarrow{v}\, n d\overrightarrow{S} dt$$

- Le générateur est à l'origine de l'établissement d'un champ électrique $\vec{E}$ qui permet le déplacement **ordonné** des charges électriques avec une vitesse $\vec{v}$ proportionnelle à $\vec{E}$

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (\mu : \text{ est la mobilité des charges})$$

-

$$[\mu] = \left[m^2 V^{-1} s^{-1}\right]$$

- si n étant la densité des charges, c'est-à-dire le nombre de porteurs de charge par unité de volume, on a

$$N = \vec{v} n \vec{dS} dt$$

- N est nombre de charges traversant la surface $\vec{dS}$ pendant l'intervale de temps dt

- La charge électrique qui traverse la section $\overrightarrow{dS}$

$$dQ = qN = q\overrightarrow{v}n\overrightarrow{dS}dt$$

- La charge électrique qui traverse la section $\overrightarrow{dS}$

$$dQ = qN = q\overrightarrow{v}n\overrightarrow{dS}dt$$

- dQ représente la quantité de charges (en coulomb) traversant la section $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt (en seconde).

- La charge électrique qui traverse la section $\overrightarrow{dS}$

$$dQ = qN = q\overrightarrow{v}n\overrightarrow{dS}dt$$

- dQ représente la quantité de charges (en coulomb) traversant la section $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt (en seconde).
- Le flux d'électrons qui circule dans le conducteur est appelé courant électrique I.

$$I = \frac{dQ}{dt} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

- La charge électrique qui traverse la section $\overrightarrow{dS}$

$$dQ = qN = q\overrightarrow{v}n\overrightarrow{dS}dt$$

- dQ représente la quantité de charges (en coulomb) traversant la section $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt (en seconde).
- Le flux d'électrons qui circule dans le conducteur est appelé courant électrique I.

$$I = \frac{dQ}{dt} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

- $\overrightarrow{j}$ représente le vecteur densité de courant exprimé en Am^{-2}

- La densité du courant est liée à la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charges ainsi qu'à leur de densité ρ_v volumique de charges locale

$$\vec{j} = \rho_v \vec{v}$$

- La densité du courant est liée à la vitesse $\overrightarrow{v}$ des porteurs de charges ainsi qu'à leur de densité ρ_v volumique de charges locale

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \overrightarrow{v}$$

- En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \mu \overrightarrow{E} = \sigma \overrightarrow{E}$$

- La densité du courant est liée à la vitesse $\overrightarrow{v}$ des porteurs de charges ainsi qu'à leur de densité ρ_v volumique de charges locale

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \overrightarrow{v}$$

- En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \mu \overrightarrow{E} = \sigma \overrightarrow{E}$$

- σ représente la conductivité électrique du conducteur, exprimée en siemens par mètre $(S.m^{-1})$.

- La densité du courant est liée à la vitesse $\overrightarrow{v}$ des porteurs de charges ainsi qu'à leur de densité ρ_v volumique de charges locale

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \overrightarrow{v}$$

- En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \mu \overrightarrow{E} = \sigma \overrightarrow{E}$$

- σ représente la conductivité électrique du conducteur, exprimée en siemens par mètre $(S.m^{-1})$.
- Cette expression représente la forme locale de la loi d'Ohm.

- La densité du courant est liée à la vitesse $\overrightarrow{v}$ des porteurs de charges ainsi qu'à leur de densité ρ_v volumique de charges locale

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \overrightarrow{v}$$

- En remplaçant la vitesse par son expression, nous obtenons

$$\overrightarrow{j} = \rho_v \mu \overrightarrow{E} = \sigma \overrightarrow{E}$$

- σ représente la conductivité électrique du conducteur, exprimée en siemens par mètre $(S.m^{-1})$.
- Cette expression représente la forme locale de la loi d'Ohm.
- Nous utilisons aussi couramment l'inverse de la conductivité qui est appelée la résistivité du conducteur.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \text{ exprimé en Ohm.m } (\Omega \cdot m)$$

Definition

Dans le cas particulier d'un conducteur cylindrique à section constante S , nous pouvons déterminer la résistance R ou la conductance G d'un tronçon du conducteur de longueur l

$$R = \rho \frac{l}{S} \text{ exprimée en Ohm et } \quad G = \sigma \frac{S}{l} \text{ exprimée en Siemens ou } \quad \Omega^{-1}$$

- La résistance, notée souvent R, transforme ainsi l'énergie électrique reçue en énergie thermique par dégagement de chaleur. Ce phénomène est connu sous le nom *d'effet Joule*.

- **Potentiel électrique**

- **Potentiel électrique**
- Comme dans tous les domaines de la physique, le déplacement d'un objet quelconque est dû à un apport d'énergie caractérisé par un travail

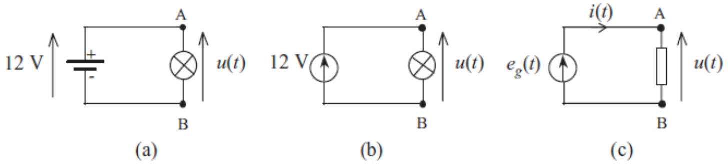
- **Potentiel électrique**
- Comme dans tous les domaines de la physique, le déplacement d'un objet quelconque est dû à un apport d'énergie caractérisé par un travail
- En électricité, le générateur joue le rôle d'une pompe où l'eau est remplacée par des charges électriques.

- **Potentiel électrique**
- Comme dans tous les domaines de la physique, le déplacement d'un objet quelconque est dû à un apport d'énergie caractérisé par un travail
- En électricité, le générateur joue le rôle d'une pompe où l'eau est remplacée par des charges électriques.
- La différence d'état électrique est appelée différence de potentiel ou tension électrique.

- **Potentiel électrique**
- Comme dans tous les domaines de la physique, le déplacement d'un objet quelconque est dû à un apport d'énergie caractérisé par un travail
- En électricité, le générateur joue le rôle d'une pompe où l'eau est remplacée par des charges électriques.
- La différence d'état électrique est appelée différence de potentiel ou tension électrique.
- $$W = Q\left(U_A - U_B\right) = QU \quad \text{en joule (J)}$$

- La quantité$U = U_A - U_B$ est appelée la différence entre le potentiel du point A et le potentiel du point B exprimée en « volt »

- La quantité $U = U_A - U_B$ est appelée la différence entre le potentiel du point A et le potentiel du point B exprimée en « volt »



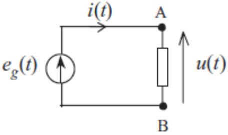
Représentation d'un générateur (12 V) et d'un récepteur constitué, soit d'une ampoule électrique (a) et (b), soit d'une résistance (c).

-

- **Énergie et puissance électrique**

- **Énergie et puissance électrique**
- Dans un conducteur, les porteurs de charges soumis à un champ électrique se trouvent en mouvement, ce qui leur procure une certaine énergie cinétique. Ils cèdent cette énergie au cours de collisions multiples qu'ils subissent durant leur trajet. Le conducteur s'échauffe et nous parlons dans ce cas d'échauffement par *effet Joule*. L'échauffement traduit la quantité d'énergie dissipée par le conducteur.

- **Énergie et puissance électrique**
- Dans un conducteur, les porteurs de charges soumis à un champ électrique se trouvent en mouvement, ce qui leur procure une certaine énergie cinétique. Ils cèdent cette énergie au cours de collisions multiples qu'ils subissent durant leur trajet. Le conducteur s'échauffe et nous parlons dans ce cas d'échauffement par *effet Joule*. L'échauffement traduit la quantité d'énergie dissipée par le conducteur.



(c)

- Soit $u(t)$ la différence de potentiel entre le point A et le point B à un instant déterminé et soit $i(t)$ le courant qui circule entre A et B au même moment. Nous parlons dans ce cas de grandeurs électriques instantanées. La puissance instantanée est donnée par :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad \text{exprimée en watt } (W)$$

- Soit $u(t)$ la différence de potentiel entre le point A et le point B à un instant déterminé et soit $i(t)$ le courant qui circule entre A et B au même moment. Nous parlons dans ce cas de grandeurs électriques instantanées. La puissance instantanée est donnée par :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad \text{exprimée en watt } (W)$$

- Cette puissance représente le taux (en joule par seconde) selon lequel l'énergie est transférée.

- Soit $u(t)$ la différence de potentiel entre le point A et le point B à un instant déterminé et soit $i(t)$ le courant qui circule entre A et B au même moment. Nous parlons dans ce cas de grandeurs électriques instantanées. La puissance instantanée est donnée par :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad \text{exprimée en watt } (W)$$

- Cette puissance représente le taux (en joule par seconde) selon lequel l'énergie est transférée.
- Il est donc possible de déterminer, pendant un intervalle de temps Δt, la quantité d'énergie dissipée.

$$W = \int_0^{\Delta t} p(t)dt = \int_0^{\Delta t} u(t) \cdot i(t)dt \quad \text{en Joule (J)}$$

- La connaissance de l'énergie dissipée pendant l'intervalle du temps Δt permet de calculer la puissance moyenne.

$$P_{moyenne} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} p(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} u(t)\cdot i(t)dt \quad \text{en watt}$$

Definition

D'une manière générale, un circuit électrique linéaire peut être décrit par les éléments passifs (résistances, condensateurs et inductances) qui le constituent, et par les générateurs de tension et de courant qui l'alimentent.

- **Remarque** : Dans les générateurs, nous pouvons distinguer *les sources continues et les sources alternatives, sinusoïdales ou non.*

- Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés *dipôle électrique* ainsi que le courant qui le traverse.

- Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés *dipôle électrique* ainsi que le courant qui le traverse.
- Il ya deux convention, la convention récepteur et la convention générateur :

- Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés *dipôle électrique* ainsi que le courant qui le traverse.
- Il ya deux convention, la convention récepteur et la convention générateur :

Convention générateur (a) et convention récepteur (b).

- Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés *dipôle électrique* ainsi que le courant qui le traverse.
- Il ya deux convention, la convention récepteur et la convention générateur :

Convention générateur (a) et convention récepteur (b).

-
  - **Convention récepteur** : les flèches du courant et de la tension sont en sens inverse

- Dans un circuit, nous souhaitons souvent déterminer la tension entre deux points appelés *dipôle électrique* ainsi que le courant qui le traverse.
- Il ya deux convention, la convention récepteur et la convention générateur :

Convention générateur (a) et convention récepteur (b).

-
    - **Convention récepteur** : les flèches du courant et de la tension sont en sens inverse
    - **Convention générateur** : les flèches du courant et celle de la tension sont dans le même sens.

- Il est commode d'utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature *connue ou présumée* du dipôle. Mais il arrive souvent qu'après avoir fini le calcul, l'une ou l'autre des quantités déterminées soit négative.

- Il est commode d'utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature *connue ou présumée* du dipôle. Mais il arrive souvent qu'après avoir fini le calcul, l'une ou l'autre des quantités déterminées soit négative.
- Nous pouvons alors nous référer au tableau suivant :

- Il est commode d'utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature *connue ou présumée* du dipôle. Mais il arrive souvent qu'après avoir fini le calcul, l'une ou l'autre des quantités déterminées soit négative.
- Nous pouvons alors nous référer au tableau suivant :
- Nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des conventions selon la nature **connue ou présumée** du dipôle

U	+	–	+	–
I	+	+	–	–
Convention récepteur	Le dipôle réel est un récepteur	Le dipôle réel est un générateur	Le dipôle réel est un générateur	Le dipôle réel est un récepteur
Convention générateur	Le dipôle réel est un générateur	Le dipôle réel est un récepteur	Le dipôle réel est un récepteur	Le dipôle réel est un générateur

Tableau récapitulatif des conventions.

Definition

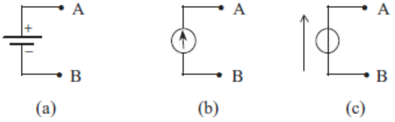
Un générateur (source) de tension continue supposé idéal est un générateur qui fournit, entre ses bornes, une différence de potentiel constante, quelle que soit l'intensité du courant qui le traverse, ou en d'autres termes quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas nulle.

- La source de tension idéale, est aussi appellée une force électromotrice U désignée par l'abréviation $(f.é.m)$. On trouve souvent dans la documentation trois types de notation :

Definition

Un générateur (source) de tension continue supposé idéal est un générateur qui fournit, entre ses bornes, une différence de potentiel constante, quelle que soit l'intensité du courant qui le traverse, ou en d'autres termes quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas nulle.

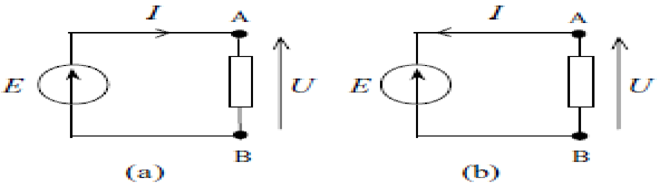
- La source de tension idéale, est aussi appellée une force électromotrice U désignée par l'abréviation ($f.é.m$). On trouve souvent dans la documentation trois types de notation :



Différents symboles pour une source de tension.

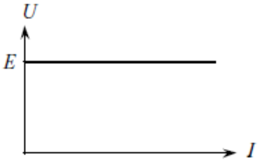
Dans la convention récepteur représentée sur la figure ci-dessous,

$$\begin{aligned} \text{si } U \cdot I &> 0 \quad \text{le générateur reçoit de l'énergie} \\ \text{si } U \cdot I &< 0 \quad \text{le générateur fournit de l'énergie} \end{aligned}$$



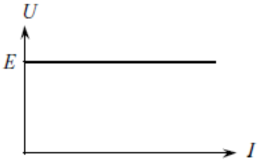
Source de tension
(a) la convention récepteur (b) la convention générateur

- Supposons q'un générateur idéal de tension U fournit à une charge quelconque un courant I. Nous pouvons tracer l'évolution de la tension en fonction du courant : $U = f(I)$ aux bornes de la charge.



courbe $U = f(I)$

- Supposons q'un générateur idéal de tension U fournit à une charge quelconque un courant I. Nous pouvons tracer l'évolution de la tension en fonction du courant : $U = f(I)$ aux bornes de la charge.



courbe $U = f(I)$

- La caractéristique présentée sur la figure ci-dessus se réduit à une droite parallèle à l'axe des courants à l'origine égale à E, ce qui représente la valeur de la tension fournie par la source.

- La puissance P_f fournie par le générateur est égale à la puissance dissipée par la charge. Cette puissance varie proportionnellement avec l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

$$
\begin{aligned}
\text{Sachant que } U &= U_A - U_B = \text{constant} \\
P_f &= P_{déssipée} = U \cdot I = E \cdot I
\end{aligned}
$$

- La puissance P_f fournie par le générateur est égale à la puissance dissipée par la charge. Cette puissance varie proportionnellement avec l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

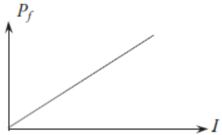
$$\begin{aligned} \text{Sachant que } U &= U_A - U_B = \text{constant} \\ P_f &= P_{déssipée} = U \cdot I = E \cdot I \end{aligned}$$

- La courbe représentant la variation de la puissance fournie par une source idéale de tension en fonction du courant débité est donnée à la figure ci-dessous.

- La puissance P_f fournie par le générateur est égale à la puissance dissipée par la charge. Cette puissance varie proportionnellement avec l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

$$\begin{aligned} \text{Sachant que } U &= U_A - U_B = \text{constant} \\ P_f &= P_{déssipée} = U \cdot I = E \cdot I \end{aligned}$$

- La courbe représentant la variation de la puissance fournie par une source idéale de tension en fonction du courant débité est donnée à la figure ci-dessous.



Variation de la puissance fournie en fonction du courant débité.

Definition

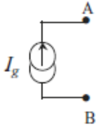
Un générateur (source) de courant continu supposé idéal est un générateur dont l'intensité du courant électrique I_g qui le traverse est constante quelle que soit la différence de potentiel U à ses bornes.

- Autrement dit quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas infinie. Le courant ainsi débité est aussi appelé courant de court-circuit.

Definition

Un générateur (source) de courant continu supposé idéal est un générateur dont l'intensité du courant électrique I_g qui le traverse est constante quelle que soit la différence de potentiel U à ses bornes.

- Autrement dit quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas infinie. Le courant ainsi débité est aussi appelé courant de court-circuit.



source de courant.

- Comme pour le générateur de tension, en utilisant la convention récepteur,

$$\begin{array}{lll} \text{si } U \cdot I & > & 0 \quad \text{le générateur reçoit de l'énergie} \\ \text{si } U \cdot I & < & 0 \quad \text{le générateur fournit de l'énergie} \end{array}$$

- Comme pour le générateur de tension, en utilisant la convention récepteur,

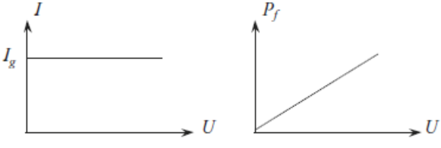
$$\begin{array}{lll} \text{si } U \cdot I & > & 0 \quad \text{le générateur reçoit de l'énergie} \\ \text{si } U \cdot I & < & 0 \quad \text{le générateur fournit de l'énergie} \end{array}$$

- La figure ci-dessous donne le courant débité I en fonction de U et la puissance fournie P_f en fonction de la tension U aux bornes du générateur de courant.

- Comme pour le générateur de tension, en utilisant la convention récepteur,

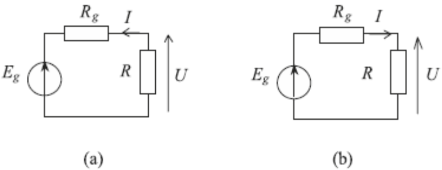
$$\begin{aligned} \text{si } U \cdot I &> 0 \quad \text{le générateur reçoit de l'énergie} \\ \text{si } U \cdot I &< 0 \quad \text{le générateur fournit de l'énergie} \end{aligned}$$

- La figure ci-dessous donne le courant débité I en fonction de U et la puissance fournie P_f en fonction de la tension U aux bornes du générateur de courant.



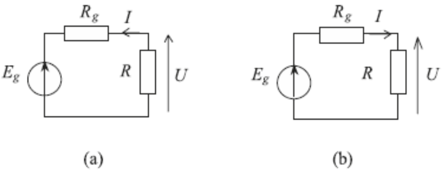
(a) Variations du courant I en fonction de U.

(b) la puissance fournie P_f en fonction de U.



Générateur réel de tension chargé par une résistance *R*.

- Un générateur réel de tension possède une résistance interne R_g placée en série avec le générateur idéal de tension E_g.



Générateur réel de tension chargé par une résistance *R*.

- Un générateur réel de tension possède une résistance interne R_g placée en série avec le générateur idéal de tension E_g.
- La tension qui apparaît entre les deux bornes du dipôle est égale à la somme algébrique de la tension fournie par le générateur E_g et de la chute de tension produite par le passage du courant I circulant dans la résistance interne.

- Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
U &= E_g + R_g I \qquad \text{Figure (a)} \\
U &= E_g - R_g I \qquad \text{Figure (b)}
\end{aligned}
$$

- Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= E_g + R_g I \qquad \text{Figure (a)} \\ U &= E_g - R_g I \qquad \text{Figure (b)} \end{aligned}$$

- La caractéristique courant-tension du générateur réel s'obtient par la somme algébrique de

- Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= E_g + R_g I \qquad \text{Figure (a)} \\ U &= E_g - R_g I \qquad \text{Figure (b)} \end{aligned}$$

- La caractéristique courant-tension du générateur réel s'obtient par la somme algébrique de
  - la caractéristique courant-tension du générateur idéal $U = Eg$

- Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= E_g + R_g I \qquad \text{Figure (a)} \\ U &= E_g - R_g I \qquad \text{Figure (b)} \end{aligned}$$

- La caractéristique courant-tension du générateur réel s'obtient par la somme algébrique de
  - la caractéristique courant-tension du générateur idéal $U = Eg$
  - et la caractéristique de la résistance interne $Rg \cdot I$

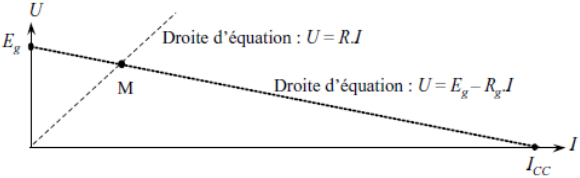
- Selon le choix arbitraire du sens du courant, le dipôle ainsi constitué a pour équation l'une des deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= E_g + R_g I \qquad \text{Figure (a)} \\ U &= E_g - R_g I \qquad \text{Figure (b)} \end{aligned}$$

- La caractéristique courant-tension du générateur réel s'obtient par la somme algébrique de
  - la caractéristique courant-tension du générateur idéal $U = Eg$
  - et la caractéristique de la résistance interne $Rg \cdot I$
- Si nous choisissons la convention générateur (b) de la figure ci-dessus, la caractéristique est représentée sur la figure ci-dessosu

par la droite d'équation :

$$U = E_g - R_g I$$



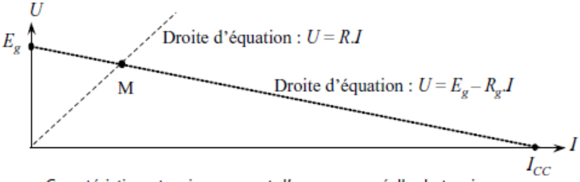
Caractéristique tension-courant d'une source réelle de tension.

- La droite $U = E_g - R_g I$ passe par deux points dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} \text{pour } U = 0 \text{ on a } I = I_{cc} = \frac{E_g}{R_g} \\ \text{pour } U = E_g \text{ on a } I = 0 \end{cases}$$

par la droite d'équation :

$$U = E_g - R_g I$$



Caractéristique tension-courant d'une source réelle de tension.

- La droite $U = E_g - R_g I$ passe par deux points dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} \text{pour } U = 0 \text{ on a } I = I_{cc} = \frac{E_g}{R_g} \\ \text{pour } U = E_g \text{ on a } I = 0 \end{cases}$$

- I_{cc} est appelé le courant de court-circuit de la source (générateur).

- Dans figure (b) ci-dessus,

- Dans figure (b) ci-dessus,
  - si nous utilisons la convention générateur pour la source

- Dans figure (b) ci-dessus,
  - si nous utilisons la convention générateur pour la source
  - la convention récepteur pour la résistance,

- Dans figure (b) ci-dessus,
  - si nous utilisons la convention générateur pour la source
  - la convention récepteur pour la résistance,
- lorsqu'une source réelle de tension est chargée par une résistance R, la tension U et le courant I doivent vérifier :

$$U = E_g - R_g I \qquad \text{et} \qquad U = RI$$

- Dans figure (b) ci-dessus,
  - si nous utilisons la convention générateur pour la source
  - la convention récepteur pour la résistance,
- lorsqu'une source réelle de tension est chargée par une résistance R, la tension U et le courant I doivent vérifier :

$$U = E_g - R_g I \qquad \text{et} \qquad U = RI$$

- Sur la figure ci-dessus point M de coordonnée (U, I) est représentatif de l'état du circuit. Il se trouve à l'intersection des deux droites d'équation :

$$U = E_g - R_g I \qquad \text{et} \qquad U = RI$$

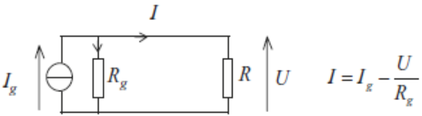
- Dans figure (b) ci-dessus,
  - si nous utilisons la convention générateur pour la source
  - la convention récepteur pour la résistance,
- lorsqu'une source réelle de tension est chargée par une résistance R, la tension U et le courant I doivent vérifier :

$$U = E_g - R_g I \qquad \text{et} \qquad U = RI$$

- Sur la figure ci-dessus point M de coordonnée (U, I) est représentatif de l'état du circuit. Il se trouve à l'intersection des deux droites d'équation :

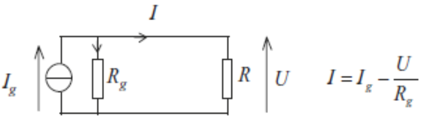
$$U = E_g - R_g I \qquad \text{et} \qquad U = RI$$

- Ce point est appelé point de *repos* ou point de *fonctionnement* du circuit



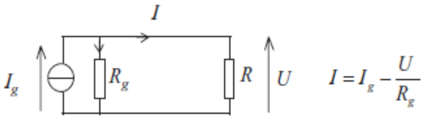
Source réelle de courant chargée par une résistance *R*.

- Un générateur réel de courant présente toujours une résistance interne de fuite de courant



Source réelle de courant chargée par une résistance *R*.

- Un générateur réel de courant présente toujours une résistance interne de fuite de courant
- Cette résistance R_g est montée en parallèle avec le générateur idéal



Source réelle de courant chargée par une résistance *R*.

- Un générateur réel de courant présente toujours une résistance interne de fuite de courant
- Cette résistance R_g est montée en parallèle avec le générateur idéal
- Le courant total I qui traverse le dipôle est égal à la somme algébrique du courant dans la résistance interne R_g et du courant I_g fourni par le générateur.

- Lorsque la source est utilisée pour alimenter une résistance R, le point M représentatif de l'état du circuit (point de fonctionnement) de coordonnées (U, I) se trouve à l'intersection de :

- Lorsque la source est utilisée pour alimenter une résistance R, le point M représentatif de l'état du circuit (point de fonctionnement) de coordonnées (U, I) se trouve à l'intersection de :
- la caractéristique de la source dont l'équation est :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g}$$

- Lorsque la source est utilisée pour alimenter une résistance R, le point M représentatif de l'état du circuit (point de fonctionnement) de coordonnées (U, I) se trouve à l'intersection de :
- la caractéristique de la source dont l'équation est :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g}$$

- de la caractéristique de charge d'équation :

$$I = \frac{U}{R}$$

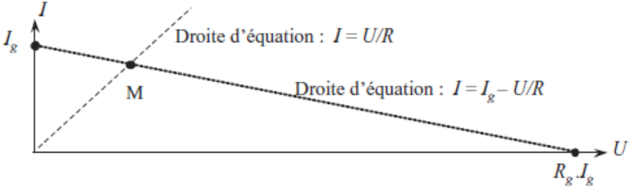
- Lorsque la source est utilisée pour alimenter une résistance R, le point M représentatif de l'état du circuit (point de fonctionnement) de coordonnées (U, I) se trouve à l'intersection de :
- la caractéristique de la source dont l'équation est :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g}$$

- de la caractéristique de charge d'équation :

$$I = \frac{U}{R}$$

- Le point d'intersection de la caractéristique de la source avec l'axe des abscisses, donne une tension notée $U_V = R_g \cdot I_g$ qui représente la tension à vide de la source de courant.



Variation du courant en fonction de la tension d'une source réelle de courant.

Definition

Un signal $u(t)$ou $i(t)$est périodique, de période « T » si, quel que soit l'instant t, nous avons :

$$u(t) = u(t+T) ou \quad i(t) = i(t+T)$$

- T est la période du signal exprimée en seconde (s) ; qui représente le temps qui sépare deux passages successifs par la même valeur avec le même sens de variation.

Definition

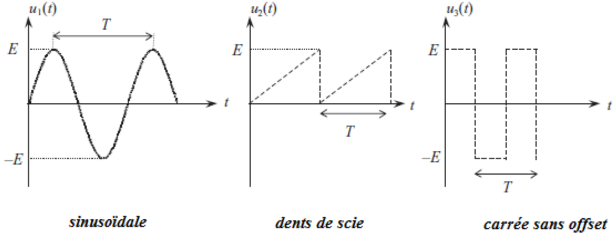
Un signal $u(t)$ou $i(t)$est périodique, de période « T » si, quel que soit l'instant t, nous avons :

$$u(t) = u(t+T) ou \quad i(t) = i(t+T)$$

- T est la période du signal exprimée en seconde (s) ; qui représente le temps qui sépare deux passages successifs par la même valeur avec le même sens de variation.
- La fréquence « f » qui est exprimée en hertz (Hz) donne le nombre de périodes par seconde.

$$f = \frac{1}{T}$$

- représente trois cas particuliers de fonctions périodiques, à savoir :



Exemples de fonctions périodiques de période T.

Definition

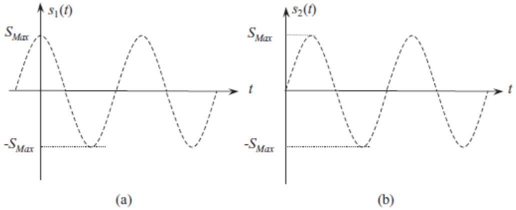
On dit qu'un réseau linéaire fonctionne en régime sinusoïdal ou régime harmonique si ses tensions et courants ont pour expressions algébriques :

$$s(t) = S_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = S_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

- **Remarque:** Pour des raisons de commodité, en vue de ce qui va suivre (*représentation de Fresnelet représentation complexe*), nous préférons définir le signal sinusoïdal par la première expression qui correspond à une cosinusoïde.

- La variable temps t est supposée varier de $-\infty$ à $+\infty$, $s(t)$ est la valeur (ou amplitude) instantanée exprimée en volt ou en ampère.

- La variable temps t est supposée varier de $-\infty$ à $+\infty$, $s(t)$ est la valeur (ou amplitude) instantanée exprimée en volt ou en ampère.



Représentation temporelle (cartésienne)

- signal cosinusoïdal (a) signal sinusoïdal (b).

- $2S_{Max}$: la valeur crête à crête de $s(t)$;

- $2S_{Max}$: la valeur crête à crête de $s(t)$;
- S_{Max} : valeur maximale ou crête du signal $s(t)$;

- $2S_{Max}$: la valeur crête à crête de $s(t)$;
- S_{Max} : valeur maximale ou crête du signal $s(t)$;
- ω : pulsation (vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence f et à la période T par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(radian par seconde)}$$

- $2S_{Max}$: la valeur crête à crête de $s(t)$;
- S_{Max} : valeur maximale ou crête du signal $s(t)$;
- ω : pulsation (vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence f et à la période T par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(radian par seconde)}$$

- $\omega t + \phi$: phase instantanée ou phase instantanée, (radian ou degré) ;

- $2S_{Max}$: la valeur crête à crête de $s(t)$;
- S_{Max} : valeur maximale ou crête du signal $s(t)$;
- ω : pulsation (vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence f et à la période T par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(radian par seconde)}$$

- $\omega t + \phi$: phase instantanée ou phase instantanée, (radian ou degré) ;
- ϕ : phase à l'origine (radian ou degré)

Soit un courant (ou une tension) sinusoïdal :

$$s(t) = S_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

En passant dans un circuit électrique le courant de sortie est notée :

$$s'(t) = S'_{\max} \cos(\omega t + \phi')$$

Soient les phases instantanées

$$\theta = \omega t + \phi \quad \text{et } \theta' = \omega t + \phi'$$

Nous appelons différence de phase (ou déphasage) instantanée entre $s(t)$ et $s'(t)$ la quantité :

$$\theta - \theta' = \omega t + \phi - \omega t - \phi' = \phi - \phi'$$

- La différence de phase $\Delta\theta = \theta - \theta'$ est une constante. Nous pouvons alors écrire

  $$s'(t) = S'_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{\text{max}} \cos(\omega (t - \frac{(\phi - \phi')}{\omega}) + \phi)$$

- La différence de phase $\Delta\theta = \theta - \theta'$ est une constante. Nous pouvons alors écrire

$$s'(t) = S'_{\max} \cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{\max} \cos(\omega(t - \frac{(\phi - \phi')}{\omega}) + \phi)$$

- L'expression ci-dessus montre que $s'(t)$ à l'instant t_1 se trouve dans la même situation que $s(t)$ à l'instant : $t_2 = t_1 - (\phi - \phi')/\omega$.

- La différence de phase $\Delta\theta = \theta - \theta'$ est une constante. Nous pouvons alors écrire

$$s'(t) = S'_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{\text{max}} \cos(\omega(t - \frac{(\phi - \phi')}{\omega}) + \phi)$$

- L'expression ci-dessus montre que $s'(t)$ à l'instant t_1 se trouve dans la même situation que $s(t)$ à l'instant : $t_2 = t_1 - (\phi - \phi')/\omega$.
- Deux cas se présentent :

- La différence de phase $\Delta\theta = \theta - \theta'$ est une constante. Nous pouvons alors écrire

$$s'(t) = S'_{\max}\cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{\max}\cos(\omega(t - \frac{(\phi - \phi')}{\omega}) + \phi)$$

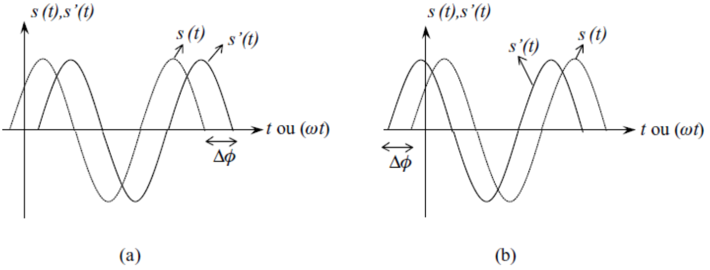
- L'expression ci-dessus montre que $s'(t)$ à l'instant t_1 se trouve dans la même situation que $s(t)$ à l'instant : $t_2 = t_1 - (\phi - \phi')/\omega$.
- Deux cas se présentent :
  - $$\text{si } \phi > \phi' \Rightarrow t_2 < t_1$$

    le signal $s'(t)$ est en retard de phase sur $s(t)$. C'est le cas représenté en (a) de la figure ci-dessous

- La différence de phase $\Delta\theta = \theta - \theta'$ est une constante. Nous pouvons alors écrire

$$s'(t) = S'_{\max}\cos(\omega t + \phi' + \phi - \phi) = S'_{\max}\cos(\omega(t - \frac{(\phi - \phi')}{\omega}) + \phi)$$

- L'expression ci-dessus montre que $s'(t)$ à l'instant t_1 se trouve dans la même situation que $s(t)$ à l'instant : $t_2 = t_1 - (\phi - \phi')/\omega$.
- Deux cas se présentent :
    - $$\text{si} \;\; \phi > \phi' \Rightarrow t_2 < t_1$$
      le signal $s'(t)$ est en retard de phase sur $s(t)$. C'est le cas représenté en (a) de la figure ci-dessous
    - $$\text{si} \;\; \phi > \phi' \Rightarrow t_2 > t_1$$
      le signal $s'(t)$ est en avance de phase sur $s(t)$. C'est le cas représenté en (b) de la figure ci-dessous



Représentation du déphasage entre $s(t)$ et $s'(t)$

Remarque : On parle de déphasage entre deux signaux de même fréquence.

Remarque : nous pouvons tracer $s(t)$ et $s'(t)$ en fonction du temps ou en fonction de ωt. Dans ce dernier cas, nous pouvons lire directement le déphasage sur l'axe des abscisses.

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale $s(t) = S_{\max}\cos(\omega t + \phi)$ est :

$$
\begin{aligned}
S_{moyenne} &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T S_{\max}\cos(\omega t + \phi)dt \\
S_{moyenne} &= \frac{S_{\max}}{\omega T}\left[\cos(\omega t + \phi\right]_0^T = 0
\end{aligned}
$$

Remarque : La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale pure étant nulle, en électricité la notion de la valeur maximale S_{Max} d'une fonction périodique est rarement utilisée.

On préfere utilider une grandeur plus significative, appelée valeur efficace,

Definition

Soit le cas particulier d'un signal sinusoïdal $s(t)$ tel que :

$$s(t) = S_{\max}\cos(\omega t + \phi)$$

la valeur efficace est donnée par :

$$\begin{aligned}
S_{eff}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_{\max}^2 \sin^2(\omega t)dt \\
S_{eff}^2 &= \frac{S_{\max}^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{S_{\max}^2}{2T}\left[1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} \\
S_{eff}^2 &= \frac{S_{\max}^2}{2} \Longrightarrow S_{eff} = \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

- Les forces électromotrices, les tensions et les courants d'un circuit électrique en régime sinusoïdal ont pour expression la forme suivante

$$s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\cos(\omega t + \phi)$$

- Les forces électromotrices, les tensions et les courants d'un circuit électrique en régime sinusoïdal ont pour expression la forme suivante

$$s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\cos(\omega t + \phi)$$

- **Remarque** : Les grandeurs de ces variables sont toujours données (ou lues), sur la plupart des appareils de mesures , en valeurs efficaces.

- Les forces électromotrices, les tensions et les courants d'un circuit électrique en régime sinusoïdal ont pour expression la forme suivante

$$s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\sin(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sqrt{2}S_{eff}\cos(\omega t + \phi)$$

- **Remarque** : Les grandeurs de ces variables sont toujours données (ou lues), sur la plupart des appareils de mesures , en valeurs efficaces.
- **Remarque :** Une tension alternative dite de 220 volts, varie entre $\pm 220\sqrt{2}$ soit ± 310 volts en changeant de sens deux fois par période

Tensions et courants périodiques

Récapitulatifs

GRANDEUR	SYMBOLE DE LA GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOLE DE L'UNITÉ
Tension (ddp)	U (ou V)	volt	V
Force électromotrice	E	volt	V
Intensité	I	ampère	A
Résistance	R	ohm	Ω
Impédance	Z	ohm	Ω
Capacité	C	farad	F
Inductance	L	henry	H
Période	T	seconde	s
Fréquence	f	hertz	Hz
Energie	W	joule	J
Puissance	P	watt	W
Puissance apparente	S	volt-ampère	VA
Température	θ (ou T)	degré kelvin	K
Force	F	newton	N
Quantité d'électricité	Q	coulomb	C

Résumé des grandeurs, unités et symboles.

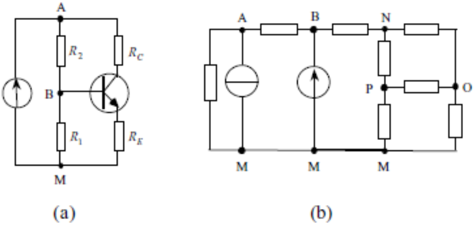
- L'objectif de cette section consiste à présenter les notions fondamentales sur les réseaux électriques avant de donner les principales méthodes de calcul.

- L'objectif de cette section consiste à présenter les notions fondamentales sur les réseaux électriques avant de donner les principales méthodes de calcul.
- Nous nous limiterons au régime statique dans lequel les sources fournissent des tensions et des courants sont indépendants du temps.

- L'objectif de cette section consiste à présenter les notions fondamentales sur les réseaux électriques avant de donner les principales méthodes de calcul.
- Nous nous limiterons au régime statique dans lequel les sources fournissent des tensions et des courants sont indépendants du temps.
- En régime statique les condensateurs sont considérés comme des circuits ouverts et les bobines comme des court-circuits. Seules les résistances sont prises en compte.

- L'objectif de cette section consiste à présenter les notions fondamentales sur les réseaux électriques avant de donner les principales méthodes de calcul.
- Nous nous limiterons au régime statique dans lequel les sources fournissent des tensions et des courants sont indépendants du temps.
- En régime statique les condensateurs sont considérés comme des circuits ouverts et les bobines comme des court-circuits. Seules les résistances sont prises en compte.
- L'étude se généralisera au régime sinusoïdal dans la section suivante.

Réseau électrique : Un réseau ou un circuit électrique est constitué d'un ensemble de composants (ou éléments) interconnectés. Il doit comporter au moins une source de tension ou de courant, des résistances et éventuellement un ou plusieurs composants actifs.



Exemples de réseaux électriques.

- **Dipôle :** Le dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre.

- **Dipôle :** Le dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre.
- **Noeud :** Un noeud est un point de raccordement entre plusieurs **éléments**. Ceci revient à trouver au moins trois fils électriques qui viennent se raccorder au même point.

- **Dipôle :** Le dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre.
- **Noeud :** Un noeud est un point de raccordement entre plusieurs **éléments**. Ceci revient à trouver au moins trois fils électriques qui viennent se raccorder au même point.
- **Branche d'un circuit électrique :** Une branche est une portion d'un réseau limitée par deux **noeuds** qui en sont les extrémités.

- **Dipôle :** Le dipôle un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre.
- **Noeud :** Un noeud est un point de raccordement entre plusieurs **éléments**. Ceci revient à trouver au moins trois fils électriques qui viennent se raccorder au même point.
- **Branche d'un circuit électrique :** Une branche est une portion d'un réseau limitée par deux **noeuds** qui en sont les extrémités.
- **Maille :** Une maille est un contour fermé constitué par une succession de **branches**, mais ne comportant jamais deux fois la même branche

Nous pouvons distinguer deux types d'éléments:

- **Elément linéaire :** Un élément est dit linéaire si la relation qui relie la différence de potentiel U à ses bornes, au courant I qui le parcourt, est linéaire au sens mathématique du terme.

$$I = k \cdot U \qquad \text{une droite qui passe par l'origine}$$

Nous pouvons distinguer deux types d'éléments:

- **Elément linéaire :** Un élément est dit linéaire si la relation qui relie la différence de potentiel U à ses bornes, au courant I qui le parcourt, est linéaire au sens mathématique du terme.

$$I = k \cdot U \qquad \text{une droite qui passe par l'origine}$$

- Deux conséquences essentielles découlent de la linéarité :

Nous pouvons distinguer deux types d'éléments:

- **Elément linéaire :** Un élément est dit linéaire si la relation qui relie la différence de potentiel U à ses bornes, au courant I qui le parcourt, est linéaire au sens mathématique du terme.

$$I = k \cdot U \qquad \text{une droite qui passe par l'origine}$$

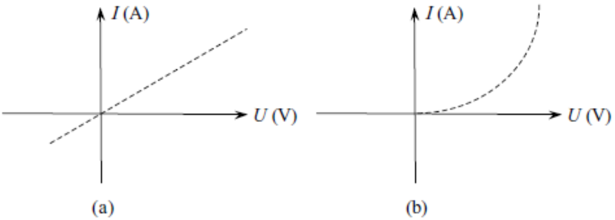
- Deux conséquences essentielles découlent de la linéarité :
  1. La stationnarité qui est l'invariance dans le temps

Nous pouvons distinguer deux types d'éléments:

- **Elément linéaire :** Un élément est dit linéaire si la relation qui relie la différence de potentiel U à ses bornes, au courant I qui le parcourt, est linéaire au sens mathématique du terme.

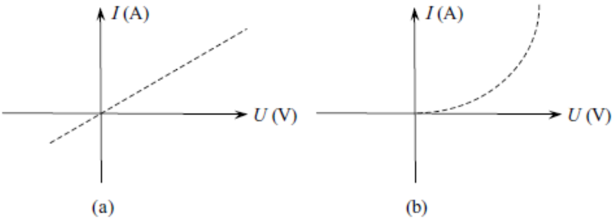
$$I = k \cdot U \qquad \text{une droite qui passe par l'origine}$$

- Deux conséquences essentielles découlent de la linéarité :
  1. La stationnarité qui est l'invariance dans le temps
  2. La proportionnalité des effets aux causes. Le principe de la superposition est applicable.



Caractéristiques d'un élément linéaire (a) et non linéaire (b).

- **Elément non linéaire :** Une résistance *CTP*, *CTN* ou une ampoule représentent des éléments non linéaires, La variation de l'intensité du courant provoque une modification de la résistance, due à une modification de la température.



Caractéristiques d'un élément linéaire (a) et non linéaire (b).

- **Elément non linéaire :** Une résistance *CTP*, *CTN* ou une ampoule représentent des éléments non linéaires, La variation de l'intensité du courant provoque une modification de la résistance, due à une modification de la température.
- Un réseau est dit linéaire si tous les éléments qui le composent sont linéaires.

- **Loi de Kirchhof des noeuds :** La loi des noeuds reflète la conservation du nombre de charges

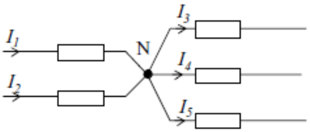
Definition

La somme algébrique des intensités des courants arrivant à un noeud est nulle. Ceci est vrai si nous prenons la convention selon laquelle tout courant entrant au noeud est positif et tout courant sortant est négatif ou bien la convention inverse ce qui se traduit par:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

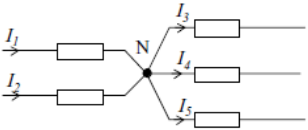
ou

$$\sum_{e=1}^{n_1} I_e = \sum_{s=1}^{n_2} I_s$$



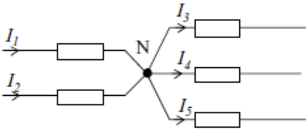
Loi des nœuds appliquée à un exemple de circuit.

- **Exemple :**



Loi des nœuds appliquée à un exemple de circuit.

- **Exemple :**



Loi des nœuds appliquée à un exemple de circuit.

-

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 &= 0 \\
&\text{ou} \\
I_1 + I_2 &= I_3 + I_4 + I_5
\end{aligned}
$$

- **Loi de Kirchhof des mailles :**

Definition

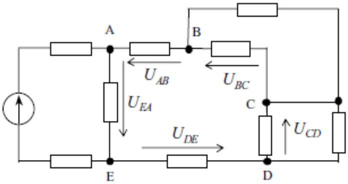
La somme algébrique des différences de potentiel le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle. Parmi ces tensions, certaines sont produites par des sources, d'autres sont produites par le passage d'un courant dans des dipôles passifs. Dans ce dernier cas, nous parlons de chutes de tensions.

- **Loi de Kirchhof des mailles :**

Definition

La somme algébrique des différences de potentiel le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle. Parmi ces tensions, certaines sont produites par des sources, d'autres sont produites par le passage d'un courant dans des dipôles passifs. Dans ce dernier cas, nous parlons de chutes de tensions.

- **Exemple :**



Loi des mailles appliquée à un exemple de circuit.

- Si nous prenons le cas de la figure ci-dessus nous pouvons utiliser par exemple la maille *ABCDEA*. nous pouvons écrire:

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = U_{AA} = 0$$

- Si nous prenons le cas de la figure ci-dessus nous pouvons utiliser par exemple la maille $ABCDEA$. nous pouvons écrire:

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = U_{AA} = 0$$

- où U_{ij} est la différence de potentiel entre les noeuds i et j.

- Si nous prenons le cas de la figure ci-dessus nous pouvons utiliser par exemple la maille $ABCDEA$. nous pouvons écrire:

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = U_{AA} = 0$$

- où U_{ij} est la différence de potentiel entre les noeuds i et j.
- Dans le cas général, si nous supposons une maille qui est un contour fermé, constitué de n branches, et si nous notons ΔU_k la différence de potentiel aux bornes de la branche numéro k, la loi des mailles s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = 0 \quad \text{où } \Delta U_k \text{ est une grandeur algébrique}$$

- Soit un réseau linéaire comportant n branches. Définir l'état de ce réseau revient à calculer les intensités des courants électriques qui circulent dans chaque branche ainsi que la différence de potentiel entre deux noeuds constituant la branche.

- Soit un réseau linéaire comportant n branches. Définir l'état de ce réseau revient à calculer les intensités des courants électriques qui circulent dans chaque branche ainsi que la différence de potentiel entre deux noeuds constituant la branche.
- Il y a donc à calculer n intensités de branches ou n tensions de branches.

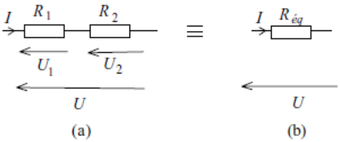
- Soit un réseau linéaire comportant n branches. Définir l'état de ce réseau revient à calculer les intensités des courants électriques qui circulent dans chaque branche ainsi que la différence de potentiel entre deux noeuds constituant la branche.
- Il y a donc à calculer n intensités de branches ou n tensions de branches.
- Nous nous trouvons avec un système de n équations à n inconnues de la forme :

$$Ax = b$$

avec

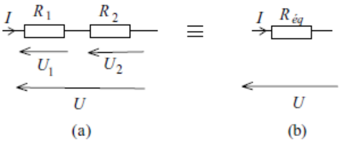
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **Association de résistances en série :**



Association en série de deux résistances.

- **Association de résistances en série :**

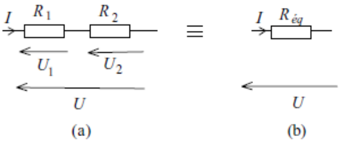


Association en série de deux résistances.

- Pour le dipôle de la figure (a), la somme des tensions le long de la branche est :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U_1 &= R_1 I \quad \text{et} \quad U_2 = R_2 I \\ U &= (R_1 + R_2) I = R_{eq} I \end{aligned}$$

- **Association de résistances en série :**



Association en série de deux résistances.

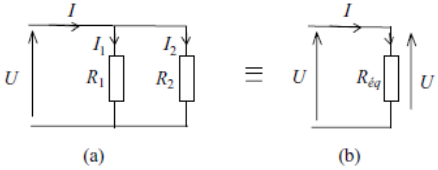
- Pour le dipôle de la figure (a), la somme des tensions le long de la branche est :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U_1 &= R_1 I \quad \text{et} \quad U_2 = R_2 I \\ U &= (R_1 + R_2) I = R_{eq} I \end{aligned}$$

- Dans le cas général:

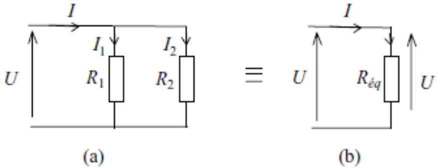
$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

- **Association de résistances en parallèle :**



Association en parallèle de deux résistances.

- **Association de résistances en parallèle :**

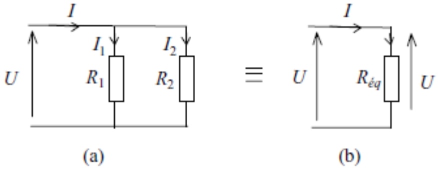


Association en parallèle de deux résistances.

- Le courant I se partage en deux courants I_1 et I_2 avec :

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \text{ et } I_2 = \frac{U}{R_2}, \text{ avec } I = I_1 + I_2$$

- **Association de résistances en parallèle :**



Association en parallèle de deux résistances.

- Le courant I se partage en deux courants I_1 et I_2 avec :

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \text{ et } \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \text{ avec } \quad I = I_1 + I_2$$

- Pour le dipôle équivalent, nous avons:

$$U = R_{eq} I_k$$

- donc

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- donc

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- en général:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = G_{eq}$$

- donc

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- en général:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = G_{eq}$$

- avec

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

- donc

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{d'où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- en général:

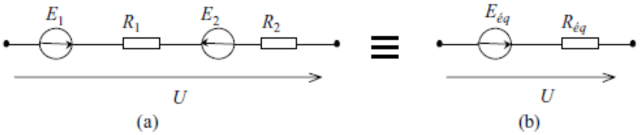
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = G_{eq}$$

- avec

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

- G représente la conductance

- **Association de deux générateurs de tension en série :**

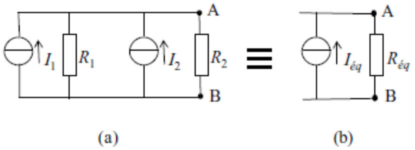


Association en série de deux sources de tensions.

Considérons les deux dipôles de la figure (a) ci-dessus, constitués par la mise en série de deux générateurs de tension. En appliquant la deuxième loi de Kirchhoff, calculons le dipôle équivalent de la figure (b) : représenté par $E_{eq},\ R_{eq},$

$$E_{eq}, = \sum_{k=1}^{n} E_k, \qquad R_{eq}, = \sum_{k=1}^{n} R_k,$$

Association de deux générateurs de courant en parallèle :



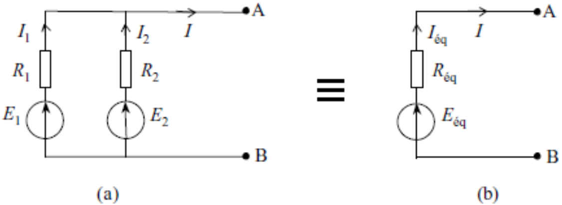
Association en parallèle de deux sources de courants.

- Considérons la figure (a) ci-dessus constitués par la mise en parallèle de deux générateurs de courant (I_1, R_1) et (I_2, R_2). Calculons le dipôle équivalent (Ieq, R_{eq}) de la figure (b). En appliquant la première loi de Kirchhoff :

$$I_{eq} = \sum_{k=1}^{n} I_k, \qquad G_{eq}, = \sum_{k=1}^{n} G_k,$$

Association de deux générateurs de tension en parallèle :

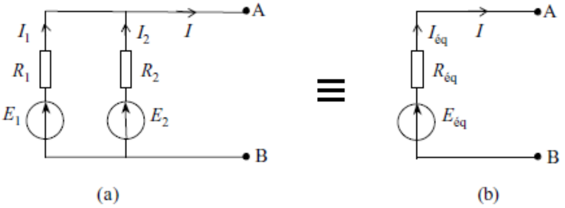
- Supposons les deux générateurs réels de tensions de la figure (a) ci-dessou que nous branchons en parallèle



Association en parallèle de deux sources de tensions.

Association de deux générateurs de tension en parallèle :

- Supposons les deux générateurs réels de tensions de la figure (a) ci-dessou que nous branchons en parallèle



Association en parallèle de deux sources de tensions.

- En pratique, exceptionnellement, nous n'associons en parallèle que des générateurs identiques d'amplitude E et de résistance interne R

- En charge

$$U_{AB} = E - R_1 I = E - R_2 I \quad \text{et} \quad U_{AB} = E_{eq} - R_{eq} I_{eq} =_{eq} - R_{eq} I$$

- En charge

$$U_{AB} = E - R_1 I = E - R_2 I \quad \text{et} \quad U_{AB} = E_{eq} - R_{eq} I_{eq} =_{eq} -R_{eq} I$$

- A vide $I = 0$

- En charge

$$U_{AB} = E - R_1 I = E - R_2 I \quad \text{et} \quad U_{AB} = E_{eq} - R_{eq} I_{eq} =_{eq} -R_{eq} I$$

- A vide $I = 0$
- Puisque les deux générateurs sont identiques, ils sont traversés par le même courant :

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \quad \text{et} \quad U_{AB} = E - R \cdot \frac{I}{2}$$

- En charge

$$U_{AB} = E - R_1 I = E - R_2 I \quad \text{et} \quad U_{AB} = E_{eq} - R_{eq} I_{eq} =_{eq} - R_{eq} I$$

- A vide $I = 0$
- Puisque les deux générateurs sont identiques, ils sont traversés par le même courant :

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \quad \text{et} \quad U_{AB} = E - R \cdot \frac{I}{2}$$

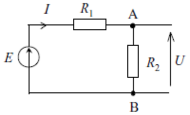
- Nous déduisons donc le générateur équivalent de la figure (b) ci-dessus :

$$E_{eq} = E \qquad \text{et} \qquad R_{eq} = \frac{R}{2}$$

Problem

Nous allons présenter quelques théorèmes généraux permettant de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques en régime statique. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

- **Pont diviseur de tension :** Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure ci-dessous



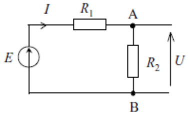
$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Schéma du pont diviseur de tension.

Problem

Nous allons présenter quelques théorèmes généraux permettant de réduire ou de simplifier les calculs sur les circuits électriques en régime statique. Ces théorèmes et méthodes d'étude ne sont valables que pour des réseaux linéaires.

- **Pont diviseur de tension :** Le schéma d'un pont diviseur de tension est donné à la figure ci-dessous



$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Schéma du pont diviseur de tension.

- C'est une application directe de la mise en série de deux résistances

$$E = R_1 I + R_2 I \Rightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

- La tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse d'où

$$U = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La tension ainsi obtenue $U < E$, d'où le nom donné à ce montage.

- La tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse d'où

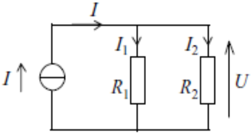
$$U = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La tension ainsi obtenue $U < E$, d'où le nom donné à ce montage.

- Dans le cas général, la tension aux bornes d'une résistance placée dans un circuit série comportant n résistances, alimenté par une source de tension E est :

$$U_i = E \cdot \frac{R_i}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$$

- **Pont diviseur de courant :** Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure ci-dessous



$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$$

Schéma du pont diviseur de courant.

- **Pont diviseur de courant :** Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure ci-dessous

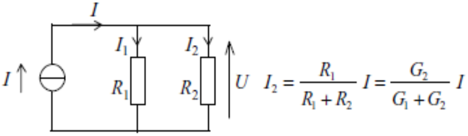


Schéma du pont diviseur de courant.

- $$U = R_2 I_2 = I \cdot (R_1 // R_2) = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{d'où} \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- **Pont diviseur de courant :** Le schéma d'un pont diviseur de courant est donné à la figure ci-dessous

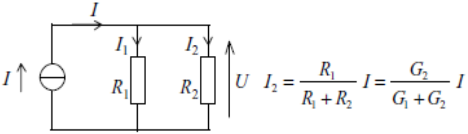


Schéma du pont diviseur de courant.

- $$U = R_2 I_2 = I \cdot (R_1 // R_2) = I \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{d'où} \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R_1 R_2$, nous obtenons la relation suivante

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{R_1}{R_1 R_2}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = I \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

- Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R_1 R_2$, nous obtenons la relation suivante

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{R_1}{R_1 R_2}}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = I \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Cette relation est maintenant sous une forme comparable à celle trouvée pour le diviseur de tension.

- Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par le produit $R_1 R_2$, nous obtenons la relation suivante

$$I_2 = I \cdot \frac{\frac{R_1}{R_1 R_2}}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} = I \cdot \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = I \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Cette relation est maintenant sous une forme comparable à celle trouvée pour le diviseur de tension.

- Dans le cas général, le courant traversant une résistance R_i placée dans un circuit parallèle comportant n résistances, alimenté par une source idéale de courant I, est :

$$I_i = I \cdot \frac{G_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k}$$

- Ce théorème découle directement des propriétés de linéarité. Il s'applique aux réseaux comportant plusieurs générateurs.

Theorem

Soit un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : $S_1, S_2, ..., S_n$, *et une grandeur à calculer, comme par exemple* I_K *le courant dans la branche* K. *Appelons* $I_{K1}, I_{K2}, ..., I_{Kn}$, *les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées. On a :*

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + ... + I_{Kn}$$

- Ce théorème découle directement des propriétés de linéarité. Il s'applique aux réseaux comportant plusieurs générateurs.

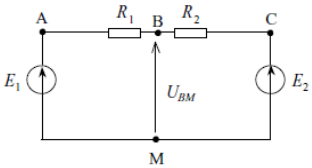
Theorem

Soit un réseau linéaire comportant n sources indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : $S_1, S_2, ..., S_n$, *et une grandeur à calculer, comme par exemple* I_K *le courant dans la branche* K. *Appelons* $I_{K1}, I_{K2}, ..., I_{Kn}$, *les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées. On a :*

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + ... + I_{Kn}$$

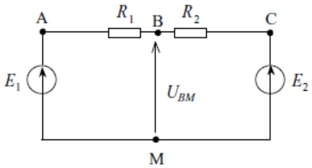
- **Remarque** : Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à *court-circuiter* les sources de tension et à *ouvrir* les sources de courant

- **Exemple :** Prenons par exemple le montage de la figure ci-desous, dans lequel on cherche à calculer la tension U_{BM}.



Exemple d'application du théorème de superposition.

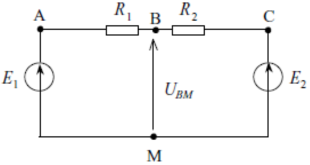
- **Exemple :** Prenons par exemple le montage de la figure ci-desous, dans lequel on cherche à calculer la tension U_{BM}.



Exemple d'application du théorème de superposition.

- $$\text{Si} \quad E_2 = 0, \quad U_{BM} = U_1 = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2}$$
$$\text{Si} \quad E_1 = 0, \quad U_{BM} = U_2 = E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

- **Exemple :** Prenons par exemple le montage de la figure ci-desous, dans lequel on cherche à calculer la tension U_{BM}.

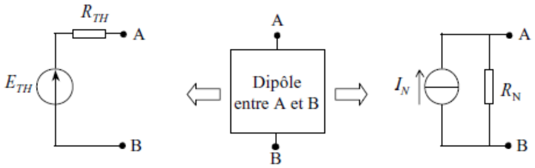


Exemple d'application du théorème de superposition.

- $$\begin{array}{l} \text{Si} \quad E_2 = 0, \quad U_{BM} = U_1 = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} \\ \text{Si} \quad E_1 = 0, \quad U_{BM} = U_2 = E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2} \end{array}$$

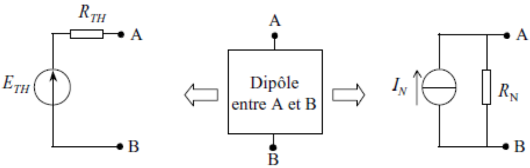
- En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



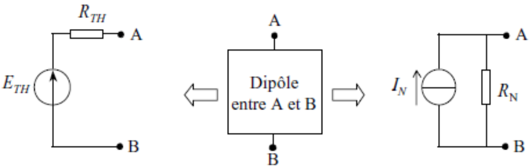
Équivalence Thévenin et Norton d'un dipôle.

- Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (**calcul de la tension et du courant de sortie**), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :



Équivalence Thévenin et Norton d'un dipôle.

- Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (**calcul de la tension et du courant de sortie**), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :
  1. soit sous la forme d'une source réelle de tension : **c'est le modèle de Thévenin**,



Équivalence Thévenin et Norton d'un dipôle.

- Pour analyser le comportement d'un réseau électrique à plusieurs éléments pour différentes charges (**calcul de la tension et du courant de sortie**), il est préférable de recourir à un modèle simple sans la charge qui se met :
  1. soit sous la forme d'une source réelle de tension : **c'est le modèle de Thévenin**,
  2. soit sous la forme d'une source réelle de courant : **c'est le modèle de Norton**.

Theorem

- *Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vu d'un élément placé entre A et B, le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de* **Thévenin** *de force électromotrice* E_{TH} *et de résistance interne* $R_{TH.}$.

Theorem

- *Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vu d'un élément placé entre A et B, le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de* **Thévenin** *de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne $R_{TH.}$.*

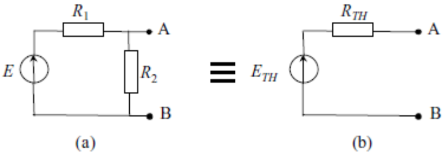
- La valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).

Theorem

- *Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. Vu d'un élément placé entre A et B, le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de* **Thévenin** *de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne $R_{TH.}$.*

- La valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- La résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées

Prenons par exemple le montage de la figure (a) ci-dessous :



Exemple d'application du théorème de Thévenin.

La tension de Thévenin E_{TH} est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur.

La résistance de Thévenin $R_{TH.}$ est obtenue en passivant la source de tension E.

$$E_{TH} = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad R_{TH.} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur de Thévenin équivalent est donné à la figure (b) ci-dessus.

Theorem

- *Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N.*

Theorem

- *Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N.*

- La valeur I_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).

Theorem

- *Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N.*

- La valeur I_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- La résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

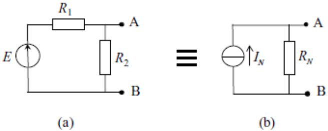
Theorem

- *Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N et de résistance interne R_N.*

- La valeur I_N du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- La résistance interne R_N correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.
- Le passage du modèle d'un générateur de **Thévenin** à celui d'un générateur de **Norton** conduit à trouver

$$R_N = R_{TH}, \qquad I_N = \frac{E_{TH}}{(R_N = R_{TH})}$$

Soit par exemple le montage de la figure (a) : cidessous :

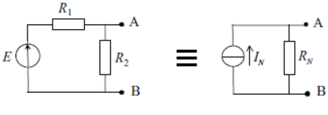


Exemple d'application du théorème de Norton.

- Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2.

$$I_N = \frac{E}{R_1}$$

Soit par exemple le montage de la figure (a) : cidessous :



(a) (b)

Exemple d'application du théorème de Norton.

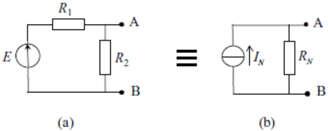
- Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2.

$$I_N = \frac{E}{R_1}$$

- La résistance R_N est obtenue en passivant la source de tension E.

$$R_{N.} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Soit par exemple le montage de la figure (a) : cidessous :



Exemple d'application du théorème de Norton.

- Le courant I_N est le courant obtenu en court-circuitant la résistance R_2.

$$I_N = \frac{E}{R_1}$$

- La résistance R_N est obtenue en passivant la source de tension E.

$$R_{N.} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Le générateur de courant équivalent de Norton est donné à la figure (b) ci-dessus.

Les schémas de **Thévenin** et de **Norton** sont des schémas équivalents, les deux dipôles présentent :

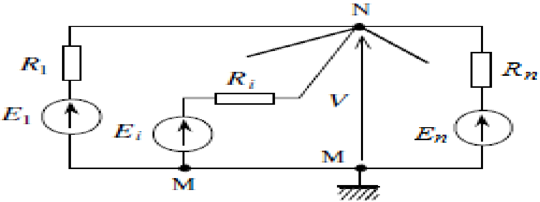
- la même tension à vide,

Les schémas de **Thévenin** et de **Norton** sont des schémas équivalents, les deux dipôles présentent :

- la même tension à vide,
- le même courant de court-circuit,

Les schémas de **Thévenin** et de **Norton** sont des schémas équivalents, les deux dipôles présentent :

- la même tension à vide,
- le même courant de court-circuit,
- la même résistance interne.



Principe du théorème de Millman.

Problem

- *Soit M un noeud du circuit choisi comme référence des potentiels ($V_M = 0$). Supposons n branches connectées à un noeud N. Chaque branche constitue un dipôle vu entre le noeud N et M, ce qui permet de remplacer la branche réelle par son modèle équivalent de Thévenin.*

- Le théorème de Millman est une généralisation du théorème de superposition.

- Le théorème de Millman est une généralisation du théorème de superposition.
- Ce théorème permet de calculer le potentiel du noeud N par rapport à un noeud de référence M.

- Le théorème de Millman est une généralisation du théorème de superposition.
- Ce théorème permet de calculer le potentiel du noeud N par rapport à un noeud de référence M .
- Si on court-circuite le noeud N et le noeud de référence M, le courant de court-circuit (*courant de Norton*) est égal à la somme des courants fourni par chaque source.

$$I_N = I_{CC} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_n}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} E_i G_i$$

- Le théorème de Millman est une généralisation du théorème de superposition.
- Ce théorème permet de calculer le potentiel du noeud N par rapport à un noeud de référence M .
- Si on court-circuite le noeud N et le noeud de référence M, le courant de court-circuit (*courant de Norton*) est égal à la somme des courants fourni par chaque source.

$$I_N = I_{CC} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \cdots + \frac{E_n}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} E_i G_i$$

- La passivisation de toutes de tension, toutes les résistances se trouvent en parallèle et la conductance équivalente sera

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

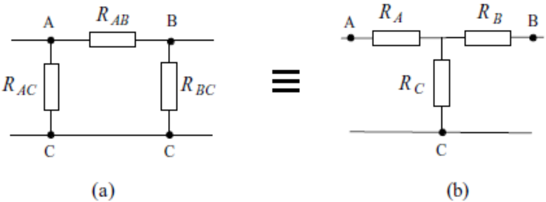
Le théorème de Millman s'énonce de la manière suivante :

Theorem

la tension mesurée au noeud N est égale au produit de la résistance équivalente par la valeur de la source de courant, soit :

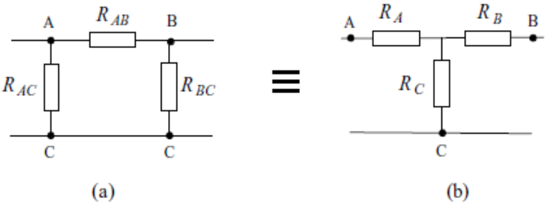
$$V_N = \frac{\sum_{i=i}^{n} E_i G_i}{\sum_{i=i}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=i}^{n} \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=i}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

- Ce théorème permet de transformer le schéma d'un réseau en « π » en un schéma en « T » qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation triangle-étoile.



Transformation triangle-étoile et vice versa.

- Ce théorème permet de transformer le schéma d'un réseau en « π » en un schéma en « T » qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée aussi transformation triangle-étoile.



Transformation triangle-étoile et vice versa.

- Pour que les deux structures (a) et (b) de la figure ci-dessus soient équivalentes, elles doivent présenter la même réponse pour la même excitation, autrement dit elles doivent présenter la même résistance.

- Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre les deux structure étoile et triangle.

- Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre les deux structure étoile et triangle.
- L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points $A-B$, $A-C$ et $B-C$.

- Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre les deux structure étoile et triangle.
- L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points $A - B$, $A - C$ et $B - C$.
- Si nous court-circuitons les points B et C, la résistance vue entre A et B est :

- Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre les deux structure étoile et triangle.
- L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points $A-B$, $A-C$ et $B-C$.
- Si nous court-circuitons les points B et C, la résistance vue entre A et B est :
  1. dans le montage triangle : R_{AC} en parallèle à R_{AB},

- Plusieurs méthodes peuvent être appliquées pour trouver les équivalences entre les deux structure étoile et triangle.
- L'une de ces méthodes consiste à calculer pour chaque structure les résistances vues entre les points $A-B$, $A-C$ et $B-C$.
- Si nous court-circuitons les points B et C, la résistance vue entre A et B est :
  1. dans le montage triangle : R_{AC} en parallèle à R_{AB},
  2. dans le montage étoile : R_A en série avec l'ensemble R_B et R_C en parallèle,

L'équivalence entre les deux montages s'écrit donc :

$$R_{AC}//R_{AB} = R_A + (R_C//R_B)$$

en passant aux conductances pour le montage en π :

$$G_{AC} + G_{AB} = \frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

en court-circuitant les bornes A et C, nous obtenons :

$$G_{AB} + G_{BC} = \frac{R_A + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Et enfin en court-circuitant les bornes A et B, nous obtenons :

$$G_{AC} + G_{BC} = \frac{R_A + R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

En combinant les trois précédentes relations et en revenant aux résistances, nous obtenons :

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C}$$
$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$
$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

- Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC et AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

- Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC et AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

1. Entre B et C

$$R_{BC}//(R_{AC}+R_{AB}) = R_C + R_B$$

- Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC et AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

1. Entre B et C

$$R_{BC}//(R_{AC}+R_{AB}) = R_C + R_B$$

2. Entre A et C

$$R_{AC}//(R_{BC}+R_{AB}) = R_A + R_C$$

- Si maintenant, nous exprimons la résistance vue de deux bornes BC, AC et AB avec, à chaque fois, la troisième borne en circuit ouvert, nous obtenons :

  1. Entre B et C
  $$R_{BC}//(R_{AC}+R_{AB}) = R_C + R_B$$
  2. Entre A et C
  $$R_{AC}//(R_{BC}+R_{AB}) = R_A + R_C$$
  3. Entre A et B
  $$R_{AB}//(R_{AC}+R_{BC}) = R_A + R_B$$

En combinant ces trois équations, nous obtenons :

- $$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

En combinant ces trois équations, nous obtenons :

- $$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

- $$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

En combinant ces trois équations, nous obtenons :

- $$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
- $$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
- $$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
  1. la loi d'Ohm,

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
    1. la loi d'Ohm,
    2. la loi des noeuds,
    3. la loi des mailles,

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :

  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,
  3. la loi des mailles,
  4. les autres théorèmes simples cités plus haut (Thévenin, Norton, Millman, Kennelly)

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,
  3. la loi des mailles,
  4. les autres théorèmes simples cités plus haut (Thévenin, Norton, Millman, Kennelly)
- Mais dès que le réseau est un peu compliqué, il est parfois difficile d'appliquer ces théorèmes. Plusieurs méthodes d'analyse facilitent alors la résolution du problème :

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,
  3. la loi des mailles,
  4. les autres théorèmes simples cités plus haut (Thévenin, Norton, Millman, Kennelly)
- Mais dès que le réseau est un peu compliqué, il est parfois difficile d'appliquer ces théorèmes. Plusieurs méthodes d'analyse facilitent alors la résolution du problème :
  1. la méthode générale des mailles et des courants,

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :
  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,
  3. la loi des mailles,
  4. les autres théorèmes simples cités plus haut (Thévenin, Norton, Millman, Kennelly)
- Mais dès que le réseau est un peu compliqué, il est parfois difficile d'appliquer ces théorèmes. Plusieurs méthodes d'analyse facilitent alors la résolution du problème :
  1. la méthode générale des mailles et des courants,
  2. la méthode des mailles indépendantes,

- D'après ce qui précède, une fois précisés les sens des courants et des tensions, nous disposons des lois et théorèmes suivants :

  1. la loi d'Ohm,
  2. la loi des noeuds,
  3. la loi des mailles,
  4. les autres théorèmes simples cités plus haut (Thévenin, Norton, Millman, Kennelly)

- Mais dès que le réseau est un peu compliqué, il est parfois difficile d'appliquer ces théorèmes. Plusieurs méthodes d'analyse facilitent alors la résolution du problème :

  1. la méthode générale des mailles et des courants,
  2. la méthode des mailles indépendantes,
  3. la méthode des noeuds.

Soit un système de n équations à n inconnues. (pour $n = 2$.) on a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad x_2 = -\frac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

- Pour qu'un réseau électrique à n branches soit parfaitement déterminé, si à tout instant on doit connaître :

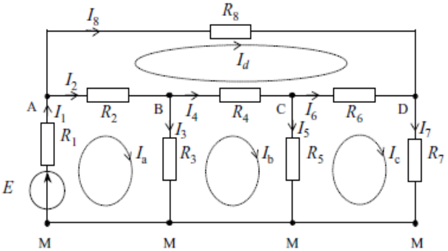
- Pour qu'un réseau électrique à n branches soit parfaitement déterminé, si à tout instant on doit connaître :
    1. les n courants qui circulent dans les branches,

- Pour qu'un réseau électrique à n branches soit parfaitement déterminé, si à tout instant on doit connaître :
  1. les n courants qui circulent dans les branches,
  2. les n tensions aux bornes de ces branches.

- Pour qu'un réseau électrique à n branches soit parfaitement déterminé, si à tout instant on doit connaître :
  1. les n courants qui circulent dans les branches,
  2. les n tensions aux bornes de ces branches.
- L'analyse d'un réseau électrique consiste donc à déterminer $2n$ grandeurs électriques

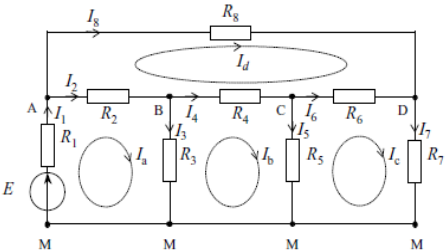
- Pour qu'un réseau électrique à n branches soit parfaitement déterminé, si à tout instant on doit connaître :
  1. les n courants qui circulent dans les branches,
  2. les n tensions aux bornes de ces branches.
- L'analyse d'un réseau électrique consiste donc à déterminer $2n$ grandeurs électriques
- Les $2n$ grandeurs sont liées par la loi d'Ohm, ce qui revient à déterminer n grandeurs

- Soit le circuit linéaire suivant:



Exemple d'un circuit complexe avec courants virtuels.

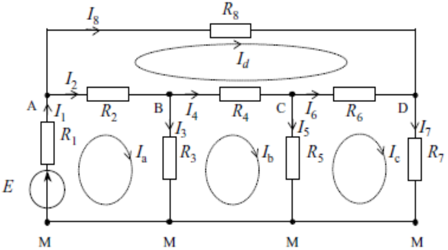
- Soit le circuit linéaire suivant:



Exemple d'un circuit complexe avec courants virtuels.

- Les n grandeurs étant choisies, le comportement du réseau est décrit par un système de n équations linéaires.

- Soit le circuit linéaire suivant:



Exemple d'un circuit complexe avec courants virtuels.

- Les n grandeurs étant choisies, le comportement du réseau est décrit par un système de n équations linéaires.
- Pour cette méthode nous appliquons les lois de Kirchhoff autant de fois qu'il est nécessaire pour relier les n inconnues aux n équations.

- Dans le circuit ci-dessus le réseau comporte 8 branches.

- Dans le circuit ci-dessus le réseau comporte 8 branches.
- Il est donc décrit par un système de 8 équations à 8 inconnues.

- Dans le circuit ci-dessus le réseau comporte 8 branches.
- Il est donc décrit par un système de 8 équations à 8 inconnues.
- Le système peut être réduit à un système de 4 équations à 4 inconnues on appliquant

- Dans le circuit ci-dessus le réseau comporte 8 branches.
- Il est donc décrit par un système de 8 équations à 8 inconnues.
- Le système peut être réduit à un système de 4 équations à 4 inconnues on appliquant
    1. la méthodes des mailles adjacentes

- Dans le circuit ci-dessus le réseau comporte 8 branches.
- Il est donc décrit par un système de 8 équations à 8 inconnues.
- Le système peut être réduit à un système de 4 équations à 4 inconnues on appliquant
  1. la méthodes des mailles adjacentes
  2. et la notion de courant virtuels (courants de mailles)

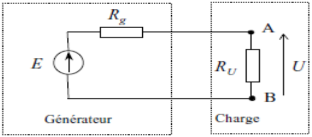
Une fois les courants de mailles étant définis, nous pouvons exprimer tous les courants de branches en fonction de courants des mailles, comme représenté dans le tableau ci-dessous:

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
I_a	+1	+1	+1					
I_b			−1	+1	+1			
I_c					−1	+1	+1	
I_d		−1		−1		−1		+1

Tableau récapitulatif des correspondances entre les courants.

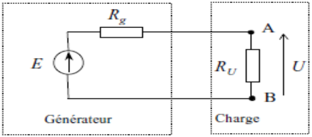
- Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur.

- Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur.
- Soit le réseau élémentaire constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_U.



Source de tension chargée par une résistance R_U.

- Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur.
- Soit le réseau élémentaire constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_U.

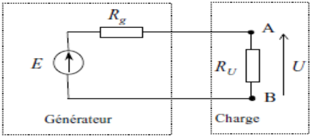


Source de tension chargée par une résistance R_U.

- Suivant le principe de la conservation de l'énergie, la puissance fournie par le générateur qu'on note P_f est égale à la somme des puissances dissipées par toutes les résistances du circuit.

$$P_f = E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R_U \cdot I^2 = (R_g + R_U)I^2 = P_g + P_U$$

- Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur.
- Soit le réseau élémentaire constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_U.



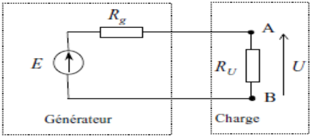
Source de tension chargée par une résistance R_U.

- Suivant le principe de la conservation de l'énergie, la puissance fournie par le générateur qu'on note P_f est égale à la somme des puissances dissipées par toutes les résistances du circuit.

$$P_f = E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R_U \cdot I^2 = (R_g + R_U)I^2 = P_g + P_U$$

1. P_g : puissance perdue dans la résistance interne du générateur.

- Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur.
- Soit le réseau élémentaire constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_U.



Source de tension chargée par une résistance R_U.

- Suivant le principe de la conservation de l'énergie, la puissance fournie par le générateur qu'on note P_f est égale à la somme des puissances dissipées par toutes les résistances du circuit.

$$P_f = E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R_U \cdot I^2 = (R_g + R_U)I^2 = P_g + P_U$$

1. P_g : puissance perdue dans la résistance interne du générateur.
2. P_U : puissance utile dissipée par la charge R_U

- Comment faut-il choisir R_U par rapport à R_g pour que la puissance transmise soit maximale ?

- Comment faut-il choisir R_U par rapport à R_g pour que la puissance transmise soit maximale ?
- Pour cela, calculons la puissance P_U en fonction de R_g

$$P_U = R_U I^2 = R_U \left(\frac{E}{R_U + R_g} \right)^2$$

- Comment faut-il choisir R_U par rapport à R_g pour que la puissance transmise soit maximale ?
- Pour cela, calculons la puissance P_U en fonction de R_g

$$P_U = R_U I^2 = R_U \left(\frac{E}{R_U + R_g} \right)^2$$

- Pour avoir la puissance optimale, on calcule la dérivé de P_U en fonction de R_U

$$\begin{aligned} \frac{dP_U}{dR_U} &= \frac{E^2 (R_U + R_g)^2 - 4E^2 R_U (R_U + R_g)^2}{(R_U + R_g)^4} \\ &= \frac{E^2 (R_U + R_g) \cdot (R_g - R_U)}{(R_U + R_g)^4} \end{aligned}$$

- Comment faut-il choisir R_U par rapport à R_g pour que la puissance transmise soit maximale ?
- Pour cela, calculons la puissance P_U en fonction de R_g

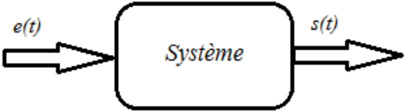
$$P_U = R_U I^2 = R_U \left(\frac{E}{R_U + R_g} \right)^2$$

- Pour avoir la puissance optimale, on calcule la dérivé de P_U en fonction de R_U

$$\frac{dP_U}{dR_U} = \frac{E^2 (R_U + R_g)^2 - 4E^2 R_U (R_U + R_g)^2}{(R_U + R_g)^4}$$
$$= \frac{E^2 (R_U + R_g) \cdot (R_g - R_U)}{(R_U + R_g)^4}$$

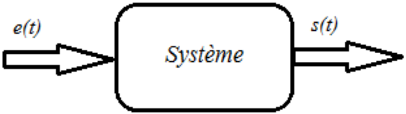
- La puissance transmise est maximale

$$P_{U(\max)} = \frac{E^2 R_U}{(R_U + R_g)^2} \quad \text{si} \quad \frac{dP_U}{dR_U} = 0 \Rightarrow R_U = R_g$$



Definition

- Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.



Definition

- Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

- La forme générale de cette équation differentielle est:

$$\alpha_0 s(t) + \alpha_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + \alpha_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = \beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + \beta_m \frac{d^m e}{dt}$$

- Ces systèmes linèaires sont :

- Ces systèmes linèaires sont :
  1. homogènes

$$s(k, e) = k \cdot s(e),$$

- Ces systèmes linèaires sont :
  1. homogènes

$$s(k,e) = k \cdot s(e),$$

  2. Additifs

$$s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$$

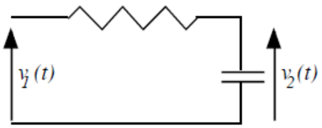
- Ces systèmes linèaires sont :
  1. homogènes
  $$s(k,e) = k \cdot s(e),$$
  2. Additifs
  $$s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$$

- On appelle l'ordre n de l'équation ci-dessue, l'ordre du système linéaire.

- Ces systèmes linèaires sont :
  1. homogènes
  $$s(k,e) = k \cdot s(e),$$
  2. Additifs
  $$s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$$

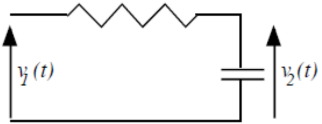
- On appelle l'ordre n de l'équation ci-dessue, l'ordre du système linéaire.
- Seuls les systèmes pour lesquels $m \leq n$ se rencontrent dans la pratique

- Soit le circuit *RC* dans la figure ci-dessus.



Circuit RC

- Soit le circuit RC dans la figure ci-dessus.

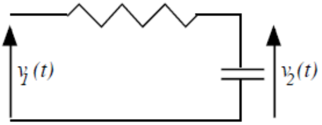


Circuit RC

- Les équations électriques sont :

$$v_1(t) = R \cdot i(t) + v_2(t) \qquad v_2(t) = \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\,\frac{dv_2(t)}{dt}$$

- Soit le circuit RC dans la figure ci-dessus.



Circuit RC

- Les équations électriques sont :

$$v_1(t) = R \cdot i(t) + v_2(t) \qquad v_2(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\cdot dt \;\Rightarrow\; i(t) = C\,\frac{dv_2(t)}{dt}$$

- D'après la loi des mailles nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie v_2 et l'entrée v_1

$$v_1(t) = RC\,\frac{dv_2(t)}{dt} + v_2(t)$$

Definition

La transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ non nulle pour $t > 0$ seulement est donnée par :

$$\begin{aligned} L(f(t) &= \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \\ L(f(t) &= F(p) \end{aligned} \tag{4.1}$$

- On notera par des lettres minuscules les fonctions originales (fonction du temps) et par des lettres majuscules les fonctions images (les fonction de la variable p).

Definition

La transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ non nulle pour $t > 0$ seulement est donnée par :

$$\begin{array}{l} L(f(t) = \int_0^\infty f(t)\exp(-pt)dt \\ L(f(t) = F(p) \end{array} \qquad (4.1)$$

- On notera par des lettres minuscules les fonctions originales (fonction du temps) et par des lettres majuscules les fonctions images (les fonction de la variable p).
- On peut utiliser la définition ci-dessus pour déterminer les tranfomées de **Laplace** des fonctions élémentaires

Definition

La transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ non nulle pour $t > 0$ seulement est donnée par :

$$\begin{aligned} L(f(t) &= \int_0^\infty f(t)\exp(-pt)dt \\ L(f(t) &= F(p) \end{aligned} \tag{4.1}$$

- On notera par des lettres minuscules les fonctions originales (fonction du temps) et par des lettres majuscules les fonctions images (les fonction de la variable p).
- On peut utiliser la définition ci-dessus pour déterminer les tranfomées de **Laplace** des fonctions élémentaires
- En pratique, pour les cas les plus compliqués, on utilise une approche qui fait intervenir la définition ci-dessus et les propriété qui en découlent ainsi que une table de transformé.

Definition

La transformée de **Laplace** inverse L^{-1} de $F(p)$ est définie de sorte que

$$L^{-1}(L(f(t)) = f(t) \tag{4.2}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered} L(f(t) = F(p) \\ \Leftrightarrow \\ L^{-1}(F(p)) = f(t) \end{gathered} \tag{4.3}$$

- **Remraque** : La définition mathématique rigoureuse de la transformée de **Laplace** inverse repose sur une intégrale de contour dans le plan complexe.

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent
  - La transformée inverse de $F(p)$ est directement dans la table

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent
  - La transformée inverse de $F(p)$ est directement dans la table
  - Il faut exprimer ou décomposé $F(p)$ en un somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent
  - La transformée inverse de $F(p)$ est directement dans la table
  - Il faut exprimer ou décomposé $F(p)$ en un somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table
  - il faut utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent
  - La transformée inverse de $F(p)$ est directement dans la table
  - Il faut exprimer ou décomposé $F(p)$ en un somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table
  - il faut utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- **Remarque** Il faut toutefois noter qu'il existe des fonction $F(p)$ pour lesquelles le calcul de la transformée inverse nécessite l'utilisation de la définition mathématique de la transformée inverse de **Laplace**

- En pratique, pour obtenir la transformée inverse, les trois cas suivants se présentent
  - La transformée inverse de $F(p)$ est directement dans la table
  - Il faut exprimer ou décomposé $F(p)$ en un somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table
  - il faut utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- **Remarque** Il faut toutefois noter qu'il existe des fonction $F(p)$ pour lesquelles le calcul de la transformée inverse nécessite l'utilisation de la définition mathématique de la transformée inverse de **Laplace**

Theorem

Deux fonction égales presque partout pout t>0 ont la même transformée de **Laplace**

- Dans chaqu'une des propriétés qui suivent, $L(f(t)) = F(p)$, $L(g(t)) = G(p)$, a et b sont des constantes

- Dans chaqu'une des propriétés qui suivent, $L(f(t)) = F(p)$, $L(g(t)) = G(p)$, a et b sont des constantes
- **Linéarité** :

$$\begin{aligned} L(af(t) + bg(t)) = aF(p) + bG(p) \\ L^{-1}(aF(p) + bG(p)) = af(t) + bg(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Dans chaqu'une des propriétés qui suivent, $L(f(t)) = F(p)$, $L(g(t)) = G(p)$, a et b sont des constantes
- **Linéarité** :

$$\begin{aligned} L(af(t) + bg(t)) &= aF(p) + bG(p) \\ L^{-1}(aF(p) + bG(p)) &= af(t) + bg(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

- **Exemple**

$$\begin{aligned} L(2t^3 + 3\exp(-5t)) = 2L(t^3) + 3L(\exp(-5t)) = 2\frac{6}{p^4} + 3\frac{1}{p+5} \\ L^{-1}(2\frac{6}{p^4} + 3\frac{1}{p+5}) = 2L^{-1}(\frac{6}{p^4}) + 3L^{-1}(\frac{1}{p+5}) = 2t^3 + 3\exp(-5t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

- **Modulation**

$$
\begin{aligned}
L(\exp(-at)f(t)) &= F(p+a) \\
L^{-1}(F(p+a)) &= \exp(-at)f(t)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

- **Modulation**

$$L(\exp(-at)f(t)) = F(p+a)$$
$$L^{-1}(F(p+a)) = \exp(-at)f(t) \tag{4.6}$$

- **Exemple**

$$L(\exp(-3t)\cos(4t)) = \frac{p+3}{(p+3)^2+(4)^2} = \frac{p+3}{p^2+6p+25} \tag{4.7}$$

- **Changement d'échelle** : On suppose que $a > 0$

$$\begin{aligned} L(f(at)) &= \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \\ L^{-1}\left(F\left(\frac{p}{a}\right)\right) &= af(at) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cette propriété a son utilité en traitement de signaux.

- **Changement d'échelle** : On suppose que $a > 0$

$$\begin{array}{l} L(f(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}) \\ L^{-1}(F(\frac{p}{a})) = af(at) \end{array} \tag{4.8}$$

Cette propriété a son utilité en traitement de signaux.

- **Exemple** La transformée de $\cos(4t)$ est dans la table:

$$L(\cos(4t)) = \frac{p}{p^2+16} \tag{4.9}$$

Avec la propriété :

$$L(\cos(t)) = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow L(\cos(4t)) = \frac{1}{4}\frac{\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}+1} = \frac{p}{p^2+16} \tag{4.10}$$

- **Différentiation** : Il faut distinguer les deux cas suivants:

- **Différentiation** : Il faut distinguer les deux cas suivants:
  - **Dérivée par rapport à** t

$$\begin{aligned} L(f'(t)) &= pF(p) - f(0^+) \\ L(f''(t)) &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\ &\vdots \\ L(f^{(n)}(t) &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned} \tag{4.11}$$

- **Différentiation** : Il faut distinguer les deux cas suivants:
  - **Dérivée par rapport à** t

$$\begin{gathered} L(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) \\ L(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\ \vdots \\ L(f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+) \end{gathered} \tag{4.11}$$

  - **Dérivée par rapport à** p

$$\begin{gathered} L(tf'(t)) = -\frac{dF(p)}{dp} \\ L(t^2f'(t)) = \frac{d^2F(p)}{dp^2} \\ \vdots \\ L(t^nf'(t)) = \frac{d^nF(p)}{dp^n} \end{gathered} \tag{4.12}$$

- **Remarque :** Cette dernière propriété a été utilisée pour compléter la table des transformées de **Laplace.**

- **Remarque :** Cette dernière propriété a été utilisée pour compléter la table des transformées de **Laplace.**
  - **Exemple :**

$$L(\sin(2t)) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow L(t\sin(2t)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{2p}{(p^2+4)^2} \tag{4.13}$$

- **Remarque :** Cette dernière propriété a été utilisée pour compléter la table des transformées de **Laplace.**
    - **Exemple :**

$$L(\sin(2t)) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow L(t\sin(2t)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{2p}{(p^2+4)^2} \tag{4.13}$$

- **Remarque :** La propriété (4.11) permet :

- **Remarque :** Cette dernière propriété a été utilisée pour compléter la table des transformées de **Laplace.**
  - **Exemple :**

$$L(\sin(2t)) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow L(t\sin(2t)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{2p}{(p^2+4)^2} \tag{4.13}$$

- **Remarque :** La propriété (4.11) permet :
  - La résolution d'équation différentielles

- **Remarque :** Cette dernière propriété a été utilisée pour compléter la table des transformées de **Laplace.**
  - **Exemple :**

$$L(\sin(2t)) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow L(t\sin(2t)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{2p}{(p^2+4)^2} \tag{4.13}$$

- **Remarque :** La propriété (4.11) permet :
  - La résolution d'équation différentielles
  - d'intégrer les conditions initiales directement dans la solution

- **Décomposition d'un quotient de polynôme en fraction partielles:** soit le quotient

$$\frac{P(p)}{Q(p)}$$

- **Décomposition d'un quotient de polynôme en fraction partielles:** soit le quotient

$$\frac{P(p)}{Q(p)}$$

- Lorsque le degré du polynôme $P(p)$ est supérieur à celui de $Q(p)$, il faut en premier lieu effectuer la division de $P(p)$ par $Q(p)$, On obient alors

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = D(p) + \frac{R(p)}{Q(p)}$$

- **Décomposition d'un quotient de polynôme en fraction partielles:** soit le quotient

$$\frac{P(p)}{Q(p)}$$

- Lorsque le degré du polynôme $P(p)$ est supérieur à celui de $Q(p)$, il faut en premier lieu effectuer la division de $P(p)$ par $Q(p)$, On obient alors

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = D(p) + \frac{R(p)}{Q(p)}$$

- La décomposition en fraction partielle s'effectue alors sur le quotient

$$\frac{R(p)}{Q(p)}$$

- **Règles de Décomposition**

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p + \alpha)(p + \beta)(p + \gamma)$

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\gamma)}$$

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\gamma)}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire dont l'un est répété 2 tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)^2$

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\gamma)}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire dont l'un est répété 2 tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)^2$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)^2} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\beta)^2}$$

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\gamma)}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire dont l'un est répété 2 tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)^2$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)^2} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\beta)^2}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de deux facteurs non répété, l'un quadratique et l'autre linéaire $Q(p) = (p+\alpha)(p^2+\beta^2)$

- **Règles de Décomposition**
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire non répétés, on aura la décomposition comme dans le cas suivantpour lequel $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\gamma)}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de facteurs linéaire dont l'un est répété 2 tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p+\beta)^2$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p+\beta)^2} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{B}{(p+\beta)} + \frac{C}{(p+\beta)^2}$$
  - Si $Q(p)$ est un produit de deux facteurs non répété, l'un quadratique et l'autre linéaire $Q(p) = (p+\alpha)(p^2+\beta^2)$
  - $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p^2+\beta^2)} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{Bp+C}{(p^2+\beta^2)}$$

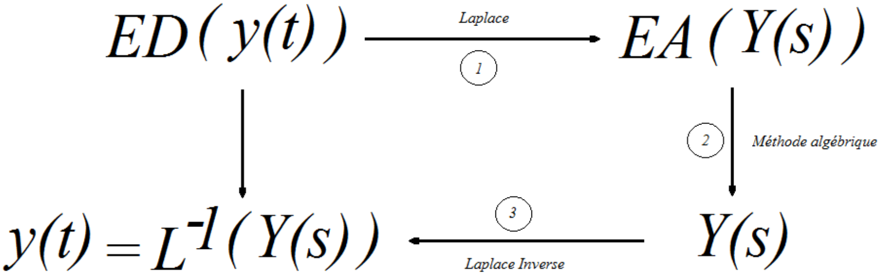
- Si $Q(p)$ comporte un facteur facteurs quadratique répété tel que $Q(p) = (p + \alpha)(p^2 + \beta^2)^2$

- Si $Q(p)$ comporte un facteur facteurs quadratique répété tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p^2+\beta^2)^2$
-
$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p^2+\beta^2)^2} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{Bp+C}{(p^2+\beta^2)} + \frac{Dp+E}{(p^2+\beta^2)^2}$$

- Si $Q(p)$ comporte un facteur facteurs quadratique répété tel que $Q(p) = (p+\alpha)(p^2+\beta^2)^2$
- $$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p)}{(p+\alpha)(p^2+\beta^2)^2} = \frac{A}{(p+\alpha)} + \frac{Bp+C}{(p^2+\beta^2)} + \frac{Dp+E}{(p^2+\beta^2)^2}$$

- **Exemple :**

$$\frac{2p-1}{(p+2)(p^2+1)^2} = \frac{A}{(p+2)} + \frac{Bp+C}{(p^2+1)} + \frac{Dp+E}{(p^2+1)^2}$$
$$\frac{2p-1}{(p+2)(p^2+1)^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{(p+2)} + \frac{1}{5}\frac{1}{(p^2+1)} + \frac{p}{(p^2+1)^2}$$



ED (y(t))
Laplace
1
EA (Y(s))
2
Méthode algébrique
Y(s)
3
Laplace Inverse
y(t) = L-1 (Y(s))

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y" + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

- On trouve

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_G = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(-2t)$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y" + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

- On trouve

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_G = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(-2t)$$

- Solution particulière

$$y_p = C_3 \exp(-4t) \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}\exp(-4t)$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

- On trouve

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_G = C_1\exp(-t) + C_2\exp(-2t)$$

- Solution particulière

$$y_p = C_3\exp(-4t) \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}\exp(-4t)$$

- $$y = y_G + y_p = 4\exp(-t) - \frac{5}{2}\exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-4t)$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y" + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y" + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- **Remarque :** Résolution avec la méthode de **Laplace** implique trois étapes indiquées dans la figure ci-dessus. La dernière ou la troisième étape exige habituellement plus de calcul.

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- **Remarque :** Résolution avec la méthode de **Laplace** implique trois étapes indiquées dans la figure ci-dessus. La dernière ou la troisième étape exige habituellement plus de calcul.
- **Etape 1:** Transformée de Laplace de l'équation différentielle

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- **Remarque :** Résolution avec la méthode de **Laplace** implique trois étapes indiquées dans la figure ci-dessus. La dernière ou la troisième étape exige habituellement plus de calcul.
- **Etape 1:** Transformée de Laplace de l'équation différentielle
  - de la table nous avons

$$\begin{aligned} L(3\exp(-4t)) &= \frac{3}{p+4} \\ L(y') &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 2 \\ Ly(y'') &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1 \end{aligned}$$

- Soit l'équation différentielle suivante

$$y" + 3y' + 2y = 3\exp(-4t), \qquad \text{avec} \quad y(o) = 2, \quad y'(0) = -1$$

- **Remarque :** Résolution avec la méthode de **Laplace** implique trois étapes indiquées dans la figure ci-dessus. La dernière ou la troisième étape exige habituellement plus de calcul.
- **Etape 1:** Transformée de Laplace de l'équation différentielle
  - de la table nous avons

$$\begin{aligned} L(3\exp(-4t)) &= \frac{3}{p+4} \\ L(y') &= pY(p) - y(0) = pY(p) - 2 \\ Ly(y") &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1 \end{aligned}$$

  -

$$p^2Y(p) - 2p + 1 + 3(pY(p) - 2) + 2Y(p) = \frac{3}{p+4}$$

- **Etape 2:** Isoler $Y(p)$

- **Etape 2:** Isoler $Y(p)$
  - $$(p^2+3p+2)Y(p)=\frac{3}{p+4}+2p-5$$

- **Etape 2:** Isoler $Y(p)$
  - $$(p^2+3p+2)Y(p)=\frac{3}{p+4}+2p-5$$
  - Après quelques transformations, on trouve

$$Y(p)=\frac{3}{(p+1)(p+2)(p+4)}+\frac{2p+5}{(p+1)(p+2)}$$

- **Etape 3 :** $y(t) = L^{-1}(Y(p))$

- **Etape 3 :** $y(t) = L^{-1}(Y(p))$
  - Décomposition en fractions partielles

$$\begin{aligned}\frac{3}{(p+1)(p+2)(p+4)} &= \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+4)} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+4}\right)\end{aligned}$$

- **Etape 3 :** $y(t) = L^{-1}(Y(p))$
  - Décomposition en fractions partielles

$$\begin{aligned}\frac{3}{(p+1)(p+2)(p+4)} &= \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+4)} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{3}{2}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{p+4})\end{aligned}$$

  - $$\frac{2p+5}{(p+1)(p+2)} = \frac{D}{(p+1)} + \frac{E}{(p+2)} = \frac{3}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)}$$

- **Etape 3 :** $y(t) = L^{-1}(Y(p))$
  - Décomposition en fractions partielles

$$\begin{aligned}\frac{3}{(p+1)(p+2)(p+4)} &= \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+4)} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+4}\right)\end{aligned}$$

  - $$\frac{2p+5}{(p+1)(p+2)} = \frac{D}{(p+1)} + \frac{E}{(p+2)} = \frac{3}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)}$$

  - $$Y(p) = \frac{4}{(p+1)} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{(p+2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+4}\right)$$

- Avec la table, on détermine l'expression de $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}(Y(p)) = 4\exp(-t) - \frac{5}{2}\exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-4t)$$

- Avec la table, on détermine l'expression de $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}(Y(p)) = 4\exp(-t) - \frac{5}{2}\exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-4t)$$

- Cette solution vérifie la condition initiale

$$y(0) = 2$$

- **Définition d'une fonction périodique**

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- La transformée d'une fonction périodique $f(t)$ de période P

$$L(f(t)) = \frac{\int_0^P f(t)\exp(-pt)dt}{1-\exp(-p)}$$

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- La transformée d'une fonction périodique $f(t)$ de période P

$$L(f(t)) = \frac{\int_0^P f(t)\exp(-pt)dt}{1-\exp(-p)}$$

- **Remarque :** Dans ce qui va suivre, nous alons introduire de nouvelles notions tel que

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- La transformée d'une fonction périodique $f(t)$ de période P

$$L(f(t)) = \frac{\int_0^P f(t)\exp(-pt)dt}{1-\exp(-p)}$$

- **Remarque :** Dans ce qui va suivre, nous alons introduire de nouvelles notions tel que
  - Les fonctions de Heaviside

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- La transformée d'une fonction périodique $f(t)$ de période P

$$L(f(t)) = \frac{\int_0^P f(t)\exp(-pt)dt}{1-\exp(-p)}$$

- **Remarque :** Dans ce qui va suivre, nous alons introduire de nouvelles notions tel que
  - Les fonctions de Heaviside
  - Les fonctions de Dirac

- **Définition d'une fonction périodique**
  - Une fonction $f(t)$ est périodique de période P si

$$f(t+p) = f(t)$$

- La transformée d'une fonction périodique $f(t)$ de période P

$$L(f(t)) = \frac{\int_0^P f(t)\exp(-pt)dt}{1-\exp(-p)}$$

- **Remarque :** Dans ce qui va suivre, nous alons introduire de nouvelles notions tel que
  - Les fonctions de Heaviside
  - Les fonctions de Dirac
  - La notion de convolution

- Forme des équations à résoudre

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

- Forme des équations à résoudre

$$ay" + by' + cy = f(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

- **Technique de résolution**

- Forme des équations à résoudre

$$ay" + by' + cy = f(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

- **Technique de résolution**
  - Prendre la transformée de Laplace de l'ED

$$a\left(p^2 Y(p) - py_0 - y_1\right) + b\left(pY(p) - y_0\right) + cY(p) = F(p)$$

- Forme des équations à résoudre

$$ay" + by' + cy = f(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

- **Technique de résolution**
  - Prendre la transformée de Laplace de l'ED

$$a\left(p^2 Y(p) - py_0 - y_1\right) + b\left(pY(p) - y_0\right) + cY(p) = F(p)$$

  - Détermination de la ransformée de Laplace de la solution $Y(p)$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{ap^2 + bp + c} + \frac{apy_0 + ay_1 + by_0}{ap^2 + bp + c}$$

- Forme des équations à résoudre

$$ay" + by' + cy = f(t) \quad \text{avec} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

- **Technique de résolution**
  - Prendre la transformée de Laplace de l'ED

$$a\left(p^2Y(p) - py_0 - y_1\right) + b\left(pY(p) - y_0\right) + cY(p) = F(p)$$

  - Détermination de la ransformée de Laplace de la solution $Y(p)$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{ap^2 + bp + c} + \frac{apy_0 + ay_1 + by_0}{ap^2 + bp + c}$$

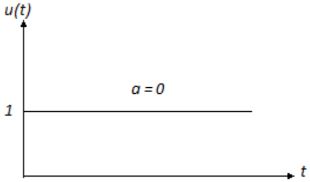
  - Calcul de la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$

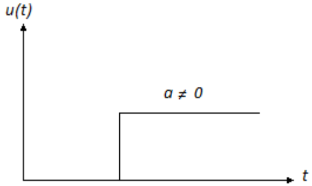
$$y(t) = L^{-1}(Y(p)) \Longleftrightarrow$$
$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{F(p)}{ap^2 + bp + c}\right) + L^{-1}\left(\frac{apy_0 + ay_1 + by_0}{ap^2 + bp + c}\right)$$

Definition

La fonction échelon unité est définie par

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq a \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases} \qquad \text{avec} \quad a \geq 0$$

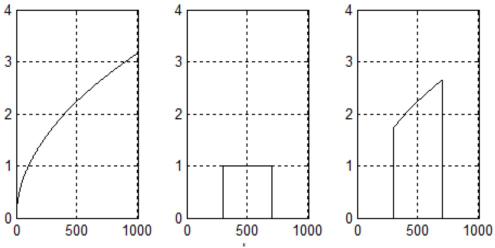




- On utilise la fonction de Heaviside pour exprimer les fonction continues par morceaux

- On utilise la fonction de Heaviside pour exprimer les fonction continues par morceaux
- La figure ci-dessous indique comment décrire une partie de la fonction $f(t) = \sqrt{x}$ à l'aide de la fonction de Heaviside

$$g(t) = f(t) \cdot (u(t-a) - u(t-b)) \quad \text{avec} \quad a < b$$



- soit la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ t-2 & \text{si} \quad 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- soit la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ t-2 & \text{si} \quad 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- on a donc

$$f(t) = (2-t)\left[u(t) - u(t-2)\right] + (t-2)\left[u(t-2) - u(t-3)\right] + u(t-3)$$

- soit la fonction

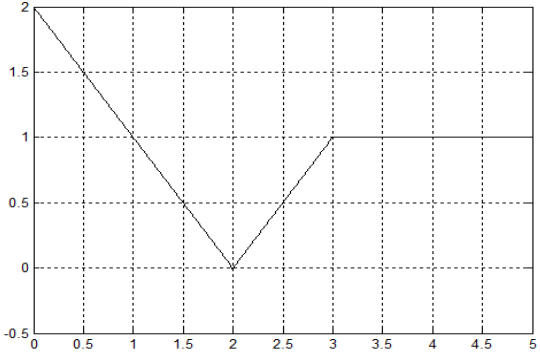
$$f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ t-2 & \text{si} \quad 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- on a donc

$$f(t) = (2-t)\left[u(t)-u(t-2)\right] + (t-2)\left[u(t-2)-u(t-3)\right] + u(t-3)$$

- Après regroupement des termes, on obtient

$$f(t) = 2 - t + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

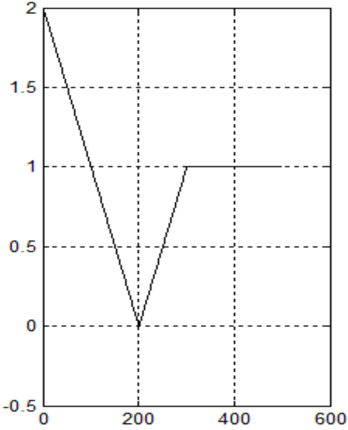
$$\begin{cases} L(u(t)) = \frac{1}{p} \\ L(u(t-a)) = \frac{\exp(-ap)}{p} \end{cases}$$

- Propriétés associées à la fonction de Heaviside

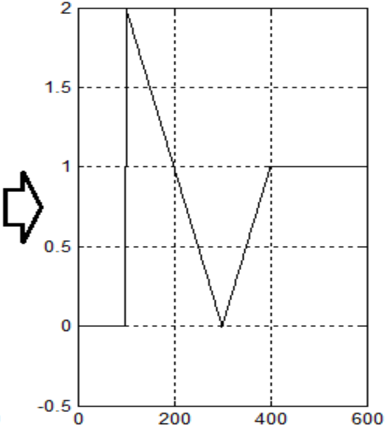
$$\begin{cases} L(u(t)) = \frac{1}{p} \\ L(u(t-a)) = \frac{\exp(-ap)}{p} \end{cases}$$

- Propriétés associées à la fonction de Heaviside
  - **Propriété de translation sur la fonction** $f(t)$ **:** La figure ci-dessous illustre une fonction $f(t)$ et celle-ci translatée de a unités vers la droite

$$\begin{cases} L(f(t)) = F(p) \\ \Rightarrow \\ L(f(t-a)u(t-a)) = \exp(-ap)F(p) \\ L^{-1}(\exp(-ap)F(p)) = f(t-a)u(t-a) \end{cases}$$



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
200
400
600



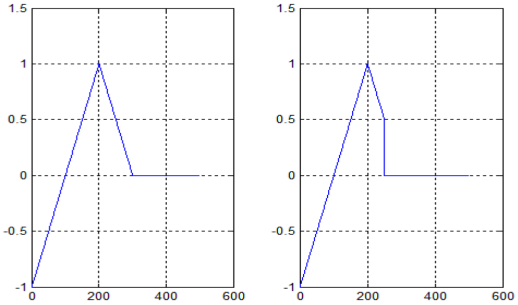
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
200
400
600

- **Propriété de coupure :**

$$L(f(t)u(t-a)) = \exp(-ap)L(f(t+a))$$

- **Propriété de coupure :**

$$L(f(t)u(t-a)) = \exp(-ap)L(f(t+a))$$



- **Exemple :** Dans le cas de la fonction de l'exemple précédent, on a déterminé son expression à laide de la fonction de Heaviside

$$f(t) = 2 - t + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$

- **Exemple :** Dans le cas de la fonction de l'exemple précédent, on a déterminé son expression à laide de la fonction de Heaviside

$$f(t) = 2 - t + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$

- La propriétyé de translation s'applique au $2^{ième}$ et au $3^{ième}$ terme et on obtient donc

$$L(f(t)) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \exp(-2p)\left(\frac{2}{p^2}\right) - \exp(-3p)\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

- On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_0 s(t) + \alpha_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + \alpha_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}}{\beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + \beta_n \frac{d^n e(t)}{dt^n}}$$

- On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_0 s(t) + \alpha_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + \alpha_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}}{\beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + \beta_n \frac{d^n e(t)}{dt^n}}$$

- C'est une fonction rationnelle.

- On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_0 s(t) + \alpha_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + \alpha_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}}{\beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + \beta_n \frac{d^n e(t)}{dt^n}}$$

- C'est une fonction rationnelle.
- L'ordre du système (qui est l'ordre de l'équation différentielle) est le degré du dénominateur de $T(p)$.

Circuits et signaux en régime variable

Fonction de transfert d'un système linéaire (Définition)

- On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un système linéaire le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie sur celle de l'entrée

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_0 s(t) + \alpha_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + \alpha_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}}{\beta_0 e(t) + \beta_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + \beta_n \frac{d^n e(t)}{dt^n}}$$

- C'est une fonction rationnelle.
- L'ordre du système (qui est l'ordre de l'équation différentielle) est le degré du dénominateur de $T(p)$.
- Pour exprimer l'équation précédente, on utilise généralement le schéma fonctionnel ci-desous

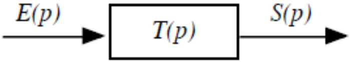
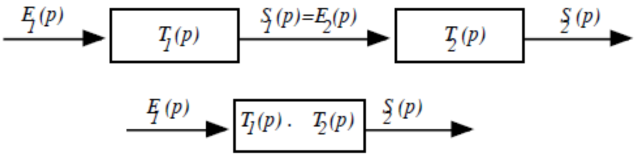


Schéma fonctionnel d'une fonction de transfert

La mise en cascade de deux systèmes dont les fonctions de transfert sont $T_1(p)$ et $T_2(p)$ est equivalent à un seul système dont la fonction de transfert serait $T_1(p) \cdot T_2(p)$



Les fonctions de transfert en cascade se multiplient

Le régime sinusoïdal (régime harmonique) est très important en électronique linéaire pour les raisons suivante :

- La forme du signal sinusoïdal est la seule qui se conserve à la traversée d'un système linéaire. Car l'intégrale ou la dérivée d'une sinusoïde reste toujours une sinusoïde avec une amplitude et une phase qui peuvent varier.

Le régime sinusoïdal (régime harmonique) est très important en électronique linéaire pour les raisons suivante :

- La forme du signal sinusoïdal est la seule qui se conserve à la traversée d'un système linéaire. Car l'intégrale ou la dérivée d'une sinusoïde reste toujours une sinusoïde avec une amplitude et une phase qui peuvent varier.
- La théorie de Josef Fourier montre que tout signal peut être décomposé en une somme infinie de signaux sinusoïdaux. Nous pouvons donc prévoir la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque connaissant sa réponse harmonique.

Le régime sinusoïdal (régime harmonique) est très important en électronique linéaire pour les raisons suivante :

- La forme du signal sinusoïdal est la seule qui se conserve à la traversée d'un système linéaire. Car l'intégrale ou la dérivée d'une sinusoïde reste toujours une sinusoïde avec une amplitude et une phase qui peuvent varier.
- La théorie de Josef Fourier montre que tout signal peut être décomposé en une somme infinie de signaux sinusoïdaux. Nous pouvons donc prévoir la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque connaissant sa réponse harmonique.
- Le signal sinusoïdal est très répandu parce qu'il est facile à produire.

La représentation cartésienne d'une fonction sinusoïdale c'est la plus courante, mais elle souffre d'un certain nombre de limites

1 - Représentation de Fresnel :

Definition

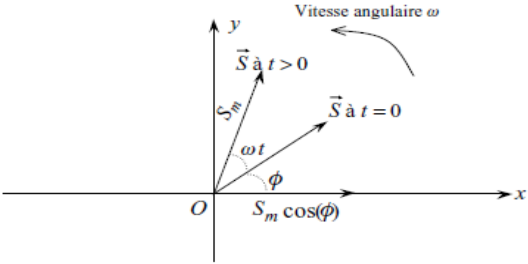
Appelée aussi représentation vectorielle ou cinématique, dans la représentation de Fresnel, le signal

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$$

est considéré comme étant la projection, sur l'axe des abcisses d'un repère orthonormé d'un vecteur $\vec{S}$, de module S_m, tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω, et confondu avec l'axe des abcisses aux instants :

$$t = -\frac{\phi}{\omega} + 2k\frac{\pi}{\omega}$$

La figure ci-dessous donne une illustration lorsque $\cos(\phi)$ est positif.



Représentation de Fresnel pour $\cos(\phi)$ positif.

2 - Opérations linéaires sur les vecteurs de Fresnel :

- La représentation de Fresnel est une image des différentes grandeurs électriques à un instant donné, l'image de chaque grandeur tourne à la vitesse v autour de l'origine.

2 - Opérations linéaires sur les vecteurs de Fresnel :

- La représentation de Fresnel est une image des différentes grandeurs électriques à un instant donné, l'image de chaque grandeur tourne à la vitesse v autour de l'origine.
- Pour simplifier la représentation, les vecteurs sont dessinés dans leurs positions à l'instan $t = 0$ et l'ensemble du dessin est supposé tourner à la vitesse v.

2 - Opérations linéaires sur les vecteurs de Fresnel :

- La représentation de Fresnel est une image des différentes grandeurs électriques à un instant donné, l'image de chaque grandeur tourne à la vitesse v autour de l'origine.
- Pour simplifier la représentation, les vecteurs sont dessinés dans leurs positions à l'instan $t = 0$ et l'ensemble du dessin est supposé tourner à la vitesse v.
- Ayant la même pulsation, les vecteurs représentatifs gardent la même position relative les uns par rapport aux autres au cours de la rotation.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Représentons par exemple deux vecteurs tensions $\overrightarrow{u_1(t)}$ et $\overrightarrow{u_2(t)}$ à l'instant $t = 0$:

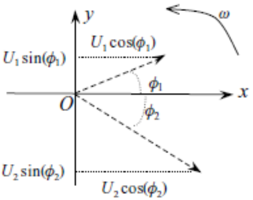
$$\overrightarrow{u_1(t)} = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad et \quad \overrightarrow{u_2(t)} = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Représentons par exemple deux vecteurs tensions $\overrightarrow{u_1}(t)$ et $\overrightarrow{u_2}(t)$ à l'instant $t = 0$:

$$\overrightarrow{u_1}(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad et \quad \overrightarrow{u_2}(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

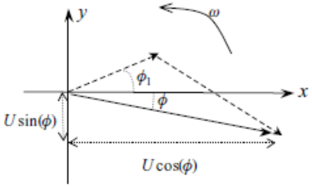
- La représentation graphique (diagramme de Fresnel) des vecteurs ci-dessus est donnée par :



Représentation de Fresnel de deux vecteurs tensions.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

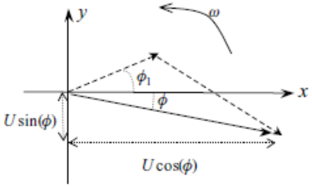
- Le vecteur somme a comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second.



Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

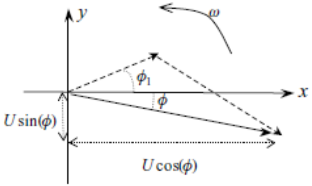
- Le vecteur somme a comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second.
- La figure ci-dessous montre la construction de ce vecteur somme.



Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

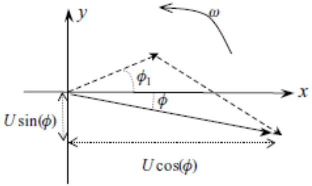
- Le vecteur somme a comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second.
- La figure ci-dessous montre la construction de ce vecteur somme.
- Cette figure n'est représentative de la tension $u = U\cos(\omega t + \phi)$ qu'à l'instant $t = 0$.



Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Le vecteur somme a comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second.
- La figure ci-dessous montre la construction de ce vecteur somme.
- Cette figure n'est représentative de la tension $u = U\cos(\omega t + \phi)$ qu'à l'instant $t = 0$.
- Pour obtenir les différentes valeurs temporelles, il suffit de faire tourner le plan constitué pla les trois vecteurs à la vitesse angulaire ω autour de l'origine.



Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Les composantes du vecteur somme sont :

$$U\cos(\phi) = U_1\cos(\phi_1) + U_2\cos(\phi_2)$$
$$U\sin(\phi) = U_1\sin(\phi_1) + U_2\sin(\phi_2)$$

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Les composantes du vecteur somme sont :

$$U\cos(\phi) = U_1\cos(\phi_1) + U_2\cos(\phi_2)$$
$$U\sin(\phi) = U_1\sin(\phi_1) + U_2\sin(\phi_2)$$

- Pour obtenir le module, appelé aussi amplitude du vecteur somme, nous appliquons le théorème de Pythagore

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

2.1 - **Somme de deux vecteurs de même pulsation :**

- Les composantes du vecteur somme sont :

$$U\cos(\phi) = U_1\cos(\phi_1) + U_2\cos(\phi_2)$$
$$U\sin(\phi) = U_1\sin(\phi_1) + U_2\sin(\phi_2)$$

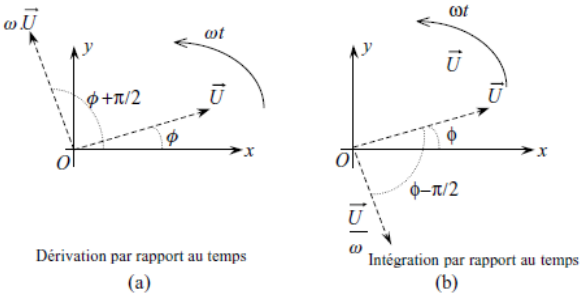
- Pour obtenir le module, appelé aussi amplitude du vecteur somme, nous appliquons le théorème de Pythagore

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

- La tangente de la phase à l'origine est obtenue en faisant le rapport des composantes :

$$\tan(\phi) = \frac{U_1\sin(\phi_1) + U_2\sin(\phi_2)}{U_1\cos(\phi_1) + U_2\cos(\phi_2)}$$

2.2 - **Dérivation et intégration par rapport au temps :**



Effet de la dérivation et de l'intégration.

2.2 - **Dérivation et intégration par rapport au temps :**

- $$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\phi) = -\omega\sin(\omega t+\phi) = \omega\cos(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})$$

2.2 - **Dérivation et intégration par rapport au temps :**

- $$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\phi) = -\omega \sin(\omega t+\phi) = \omega \cos(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})$$
- La dérivation se traduit en représentation de Fresnel par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et une multiplication du module du vecteur par la quantité ω.

2.2 - **Dérivation et intégration par rapport au temps :**

- $$\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\phi) = -\omega\sin(\omega t+\phi) = \omega\cos(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})$$
- La dérivation se traduit en représentation de Fresnel par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et une multiplication du module du vecteur par la quantité ω.
- Inversement, l'intégration se traduit par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ et une division du module par la quantité ω.

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**
- Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**
- Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :
  1. la forme classique : $Z = a + jb$,

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**
- Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :
  1. la forme classique : $Z = a + jb$,
  2. la forme trigonométrique : $Z = |Z|\left(\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right)$,

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**
- Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :
  1. la forme classique : $Z = a + jb$,
  2. la forme trigonométrique : $Z = |Z| \left(\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right)$,
  3. la forme exponentielle : $Z = |Z| \exp(j\phi)$, où $|Z||$ est le module et ϕ est l'argument :

- La représentation complexe découle directement de la représentation de Fresnel et permet plus de précision dans les résultats.
- **1 - Rappels mathématiques :**
- Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :
  1. la forme classique : $Z = a + jb$,
  2. la forme trigonométrique : $Z = |Z|\left(\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right)$,
  3. la forme exponentielle : $Z = |Z|\exp(j\phi)$, où $|Z||$ est le module et ϕ est l'argument :
-

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z \cdot Z^*} \qquad \text{et} \qquad \phi = \arctan(\frac{b}{a})$$

- Le plan orthonormé complexe possède :

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.
- L'opérateur j permet d'effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à un vecteur.

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.
- L'opérateur j permet d'effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à un vecteur.
- **Exemple** :

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.
- L'opérateur j permet d'effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à un vecteur.
- **Exemple** :
  1. Si nous faisons subir au vecteur $\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, il devient $j\overrightarrow{u}$

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.
- L'opérateur j permet d'effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à un vecteur.
- **Exemple** :
  1. Si nous faisons subir au vecteur $\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, il devient $j\overrightarrow{u}$
  2. Si nous faisons subir au vecteur $j\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, il devient $j\, j\overrightarrow{u} = j^2\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$

- Le plan orthonormé complexe possède :
  1. l'axe Ox comme axe des réels
  2. l'axe Oy comme axe des imaginaires.
- L'opérateur j permet d'effectuer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à un vecteur.
- **Exemple** :
  1. Si nous faisons subir au vecteur $\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, il devient $j\overrightarrow{u}$
  2. Si nous faisons subir au vecteur $j\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, il devient $j\,j\overrightarrow{u} = j^2\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$
  3. Comme si nous avons fais subir à $\overrightarrow{u}$ une rotation de $+\pi$

Représentation complexe	Représentation de Fresnel
Nombre complexe : $S_{Max}\ e^{j(\omega t+\phi)}$	Vecteur de Fresnel de module S_{Max} et de phase instantanée $\omega t + \phi$
Amplitude complexe : $\underline{S} = S_{Max} e^{j\phi}$	Vecteur de Fresnel à $t = 0$
Signal sinusoïdal réel $s(t)$ $s(t) = \Re\left(S_{Max} e^{j(\omega t+\phi)}\right)$	Projection du vecteur de Fresnel sur l'axe des abscisses Ox
Signal sinusoïdal réel déphasé de $\pi/2$ $S'(t) =$ Imaginaire de $S_{Max} e^{j(\omega t+\phi)}$	Projection du vecteur de Fresnel sur l'axe des ordonnées Oy

Correspondance entre représentation de fresnel et représentation complexe

- Soit un réseau électrique en régime sinusoïdal permanent. Considérons un dipôle de ce réseau. En régime sinusoïdal, la tension et le courant sont notés :

$$u(t) = U_{Max} \cos(\omega t + \phi) \quad , \quad i(t) = I_{Max} \cos(\omega t + \psi)$$

- Soit un réseau électrique en régime sinusoïdal permanent. Considérons un dipôle de ce réseau. En régime sinusoïdal, la tension et le courant sont notés :

$$u(t) = U_{Max}\cos(\omega t + \phi) \quad , \quad i(t) = I_{Max}\cos(\omega t + \psi)$$

- on sait ausssi que la tension et le courant sont représentés par des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \Re(U_{Max}\exp(j(\omega t + \phi))) = \Re(U_{Max}\exp(j\phi)\cdot\exp(j\omega t)) \\
&= \Re(\underline{U}\exp(j\omega t)) \\
i(t) &= \Re(I_{Max}\exp(j(\omega t + \psi))) = \Re(I_{Max}\exp(j\psi)\cdot\exp(j\omega t)) \\
&= \Re(\underline{I}\exp(j\omega t))
\end{aligned}$$

- L'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie comme étant le rapport de l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ sur l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{Max}\exp(j\phi)}{I_{Max}\exp(j\psi)} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}}\exp(j(\phi-\psi)) \\
&= Z\exp(\theta) \\
\text{avec} \quad Z &= \frac{U_{Max}}{I_{Max}} \quad \text{et} \quad \theta = \phi - \psi
\end{aligned}$$

- L'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie comme étant le rapport de l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ sur l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{Max}\exp(j\phi)}{I_{Max}\exp(j\psi)} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}}\exp(j(\phi-\psi)) \\ &= Z\exp(\theta) \\ \text{avec} \quad Z &= \frac{U_{Max}}{I_{Max}} \quad \text{et} \quad \theta = \phi - \psi\end{aligned}$$

- Cette quantité ne dépend plus du temps mais seulement de la nature des éléments constituant le dipôle

- L'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie comme étant le rapport de l'amplitude complexe de la tension $\underline{U}$ sur l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{Max}\exp(j\phi)}{I_{Max}\exp(j\psi)} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}}\exp(j(\phi-\psi)) \\ &= Z\exp(\theta) \\ \text{avec} \quad Z &= \frac{U_{Max}}{I_{Max}} \quad \text{et} \quad \theta = \phi - \psi\end{aligned}$$

- Cette quantité ne dépend plus du temps mais seulement de la nature des éléments constituant le dipôle
- L'impédance est donc un nombre complexe qui est le quotient de deux amplitudes complexes.

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.
- L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance $\underline{Y}$.

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.
- L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance $\underline{Y}$.
- Nous pouvons aussi noter $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ sous forme cartésienne:

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \text{et} \qquad \underline{Y} = G + jB$$

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.
- L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance $\underline{Y}$.
- Nous pouvons aussi noter $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ sous forme cartésienne:

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \text{et} \qquad \underline{Y} = G + jB$$

- L'impédance comporte donc deux termes, l'un réel, l'autre imaginaire.

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.
- L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance $\underline{Y}$.
- Nous pouvons aussi noter $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ sous forme cartésienne:

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \text{et} \qquad \underline{Y} = G + jB$$

- L'impédance comporte donc deux termes, l'un réel, l'autre imaginaire.
- La conformité avec le régime statique impose que la partie réelle soit la résistance R.

- Le module de $\underline{Z}$, est le rapport des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant,
- l'argument est égal à la différence des phases à l'origine.
- L'inverse de l'impédance s'appelle l'admittance $\underline{Y}$.
- Nous pouvons aussi noter $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ sous forme cartésienne:

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \text{et} \qquad \underline{Y} = G + jB$$

- L'impédance comporte donc deux termes, l'un réel, l'autre imaginaire.
- La conformité avec le régime statique impose que la partie réelle soit la résistance R.
- La partie imaginaire X est appelée la réactance. Elles s'expriment toutes les deux en Ohm (Ω).

- Le même résonnement est appliqué l'admittance ou

G : représente la conductance

B :représente la susceptance

- Le même résonnement est appliqué l'admittance ou

G : représente la conductance

B :représente la susceptance

- Le tableau ci-dessous, en résume les principales relations de passage

$Z = R + jX = \lvert Z\rvert\, e^{j\theta} = 1/Y$	$Y = G + jB = \lvert Y\rvert\, e^{j\chi} = 1/Z$
$R = \dfrac{G}{G^2 + B^2}$	$G = \dfrac{R}{R^2 + X^2}$
$X = -\dfrac{B}{G^2 + B^2}$	$B = -\dfrac{X}{R^2 + X^2}$
$\lvert Z\rvert = \dfrac{1}{\lvert Y\rvert} = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}}$	$\lvert Y\rvert = \dfrac{1}{\lvert Z\rvert} = \sqrt{G^2 + B^2} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$
$\tan(\theta) = \dfrac{X}{R} = -\dfrac{B}{G}$	$\tan(\chi) = \dfrac{B}{G} = -\dfrac{X}{R}$
$\theta = -\chi$	$\chi = -\theta$

Récapitulatif des relations de passage.

- En régime sinusoïdale, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.

- En régime sinusoïdale, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.
- **Cas d'une Résistance :** La loi d'Ohm en régime sinusoïdal s'écrit de la même manière

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- En régime sinusoïdale, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.
- **Cas d'une Résistance :** La loi d'Ohm en régime sinusoïdal s'écrit de la même manière

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- Sachant qu'en notation complexe le courant $i(t)$, et la tension $u(t)$.

$$\underline{I}(t) = |I_{Max}| \exp(j\psi) \quad , \quad \underline{U}(t) = |U_{Max}| \exp(j\theta)$$

- En régime sinusoïdale, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.
- **Cas d'une Résistance :** La loi d'Ohm en régime sinusoïdal s'écrit de la même manière
$$u(t) = R \cdot i(t)$$
- Sachant qu'en notation complexe le courant $i(t)$, et la tension $u(t)$.
$$\underline{I}(t) = |I_{Max}| \exp(j\psi) \qquad , \qquad \underline{U}(t) = |U_{Max}| \exp(j\theta)$$
- La tension aux bornes d'un dipole résistif est donnée par :
$$u(t) = \Re(R \cdot \underline{I} \exp(j\omega t)) = \Re(\underline{U} \exp(j\omega t)) \quad \text{avec} \quad \underline{U} = R \cdot \underline{I}$$

- ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\underline{U} &= R \cdot \underline{I} = R \cdot |I_{Max}| \exp(j\psi) = |R \cdot I_{Max}| \exp(j\psi) = |U_{Max}| \exp(j\theta) \\ &= |U_{Max}| \exp(j\theta)\end{aligned}$$

- ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \underline{U} &= R \cdot \underline{I} = R \cdot |I_{Max}| \exp(j\psi) = |R \cdot I_{Max}| \exp(j\psi) = |U_{Max}| \exp(j\theta) \\ &= |U_{Max}| \exp(j\theta) \end{aligned}$$

- On remarque que les deux arguments (angles) sont identiques

$$\psi = \theta$$

la tension $u(t)$ est de ce fait en phase avec le courant $i(t)$.

- ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \underline{U} &= R \cdot \underline{I} = R \cdot |I_{Max}| \exp(j\psi) = |R \cdot I_{Max}| \exp(j\psi) = |U_{Max}| \exp(j\theta) \\ &= |U_{Max}| \exp(j\theta) \end{aligned}$$

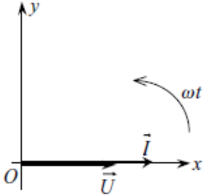
- On remarque que les deux arguments (angles) sont identiques

$$\psi = \theta$$

la tension $u(t)$ est de ce fait en phase avec le courant $i(t)$.

- L'impédance et l'admittance se réduisent à des *réels purs* qui représentent une résistance et une conductance.

- La figure ci-dessous indique représentation de Fresnel du courant et de la tension pour un dipôle résistif



Déphasage entre courant et tension pour une résistance

- **Cas d'une Inductance pure :** Nous connaissons que la relation qui lie la tension $u(t)$ au courant $i(t)$ qui passe dans la bobine est donnée par :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

- **Cas d'une Inductance pure :** Nous connaissons que la relation qui lie la tension $u(t)$ au courant $i(t)$ qui passe dans la bobine est donnée par :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

- ce qui nous donne en notation complexe

$$\underline{U} = jL\omega\,\underline{I} = jX_L\,\underline{I} = Z\,\underline{I}$$

- **Cas d'une Inductance pure :** Nous connaissons que la relation qui lie la tension $u(t)$ au courant $i(t)$ qui passe dans la bobine est donnée par :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

- ce qui nous donne en notation complexe

$$\underline{U} = jL\omega\,\underline{I} = jX_L\,\underline{I} = Z\,\underline{I}$$

- Nous pouvons aussi retrouver le résultat ci-dessus par un autre biais, puisqu'en régime sinusoïdale, si une inductance L est traversée par une intensité

$$i(t) = I_{Max}\cos(\omega t)$$

nous connaissons la dérivée du courant $i(t)$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\omega I_{Max}\sin(\omega t) = j\omega I_{Max}\cos(\omega t) = j\omega i(t)$$

- L'impédance Z d'une inductance pure devient :

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{jL\omega I_{Max}\cos(\omega t)}{I_{Max}\cos(\omega t)} = jL\omega = jX_L$$

- L'impédance Z d'une inductance pure devient :

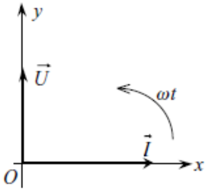
$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{jL\omega I_{Max}\cos(\omega t)}{I_{Max}\cos(\omega t)} = jL\omega = jX_L$$

- Dans une inductance, $i(t)$ et $u(t)$ sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$, la tension $u(t)$ est en avance de phase par rapport au courant $i(t)$, ce qui se vérifie puisque l'impédance est un *imaginaire pur positif*.

- L'impédance Z d'une inductance pure devient :

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{jL\omega I_{Max}\cos(\omega t)}{I_{Max}\cos(\omega t)} = jL\omega = jX_L$$

- Dans une inductance, $i(t)$ et $u(t)$ sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$, la tension $u(t)$ est en avance de phase par rapport au courant $i(t)$, ce qui se vérifie puisque l'impédance est un *imaginaire pur positif*.
- La figure ci-dessous indique représentation de Fresnel du courant et de la tension pour un dipôle inductif parfait.



Déphasage entre courant et tension pour une inductance

- **Cas d'un condensateur parfait :**on sais que pour le le régime variable

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_{Max}\cos(\omega t) \\
u(t) &= \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \\
\frac{du(t)}{dt} &= -\omega U_{Max}\sin(\omega t) = j\omega U_{Max}\cos(\omega t) = j\omega u(t)
\end{aligned}
$$

- **Cas d'un condensateur parfait :** on sais que pour le le régime variable

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_{Max}\cos(\omega t) \\
u(t) &= \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \\
\frac{du(t)}{dt} &= -\omega U_{Max}\sin(\omega t) = j\omega U_{Max}\cos(\omega t) = j\omega u(t)
\end{aligned}
$$

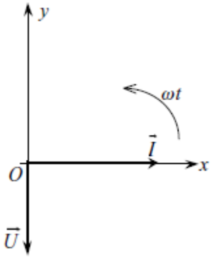
- L'impédance d'un condensateur parfait devient donc :

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_{Max}\cos(\omega t)}{jC\omega U_{Max}\cos(\omega t)} = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega} = -jX_C$$

- Dans un condensateur, le courant $i(t)$ est en avance de phase par rapport à la tension $u(t)$.

- Dans un condensateur, le courant $i(t)$ est en avance de phase par rapport à la tension $u(t)$.
- Le déphasage est de $-\frac{\pi}{2}$ ce qui se vérifie dans l'expression de l'impédance puisque Zest un imaginaire pur négatif.

- Dans un condensateur, le courant $i(t)$ est en avance de phase par rapport à la tension $u(t)$.
- Le déphasage est de $-\frac{\pi}{2}$ ce qui se vérifie dans l'expression de l'impédance puisque Zest un imaginaire pur négatif.
- La figure ci-dessous indique la représentation de **Fresnel** du courant et de la tension pour un dipôle capacitif parfait.



Déphasage entre courant et tension pour un condensateur.

- En régime sinusoïdale les impédances complexes s'associent comme les résistances

- En régime sinusoïdale les impédances complexes s'associent comme les résistances
  1. L'association d'impédances en série nous donne

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

- En régime sinusoïdale les impédances complexes s'associent comme les résistances
  1. L'association d'impédances en série nous donne
  $$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$
  2. L'association d'impédances en parallèle nous donne
  $$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

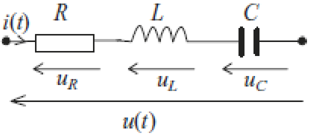
- En régime sinusoïdale les impédances complexes s'associent comme les résistances
  1. L'association d'impédances en série nous donne
  $$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$
  2. L'association d'impédances en parallèle nous donne
  $$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

- Le tableau ci-dessous résume le principes d'associations de plusieurs inductances ou de plusieurs condensateurs

	Association en série	Association en parallèle
Inductances	$L_{éq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$	$\frac{1}{L_{éq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n}$
Condensateurs	$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$	$C_{éq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$

Association des condensateurs et des selfs parfaits

L'association en série des trois éléments de bases à savoir une *résistance*, une *inductance* et un *condensateur* .permet d'avoir le même courant $i(t)$ qui circule dans les trois éléments



Association en série de *R*, *L* et *C*.

La tension $u(t)$ est la somme **vectorielle** de $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$ telle que:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

- Le traitement étant régime sinusoïdal permanent, les bornes d'intégration ainsi que la condition initiale sur la tension aux bornes du condensateur n'auront aucune importance.

- Le traitement étant régime sinusoïdal permanent, les bornes d'intégration ainsi que la condition initiale sur la tension aux bornes du condensateur n'auront aucune importance.
- Nous aboutissons donc à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut être résolut par la méthode de Laplace.

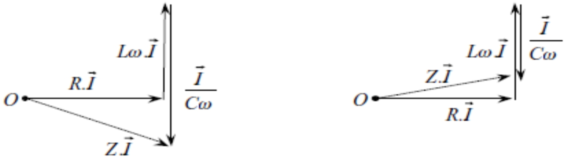
- Le traitement étant régime sinusoïdal permanent, les bornes d'intégration ainsi que la condition initiale sur la tension aux bornes du condensateur n'auront aucune importance.
- Nous aboutissons donc à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut être résolut par la méthode de Laplace.
- équation différentielle du second ordre à coefficients constants étant linéaire, nous pouvons associer à $i(t)$ et $u(t)$ leurs notations complexes, ce qui nous donne :

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R \cdot \underline{I} + jL\omega \underline{I} + \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$$

- Le traitement étant régime sinusoïdal permanent, les bornes d'intégration ainsi que la condition initiale sur la tension aux bornes du condensateur n'auront aucune importance.
- Nous aboutissons donc à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut être résolut par la méthode de Laplace.
- équation différentielle du second ordre à coefficients constants étant linéaire, nous pouvons associer à $i(t)$ et $u(t)$ leurs notations complexes, ce qui nous donne :

$$\underline{U} = \underline{U_R} + \underline{U_L} + \underline{U_C} = R \cdot \underline{I} + jL\omega \underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$$

- $$\underline{U} = \left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) \cdot \underline{I} = Z \cdot \underline{I}$$

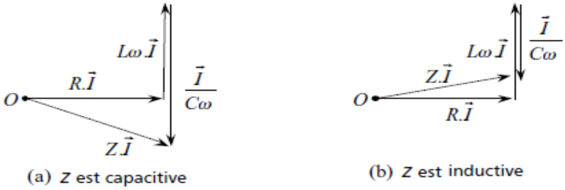


(a) Z est capacitive

(b) Z est inductive

Représentation de Fresnel

- Il s'agit de la loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal dont Z étant l'impédance complexe du dipôle RLC série. . La figure ci-dessus (représentation de Fresnel) permet de comprendre le comportement du circuit.



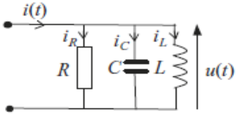
Représentation de Fresnel

- Il s'agit de la loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal dont Z étant l'impédance complexe du dipôle RLC série. . La figure ci-dessus (représentation de Fresnel) permet de comprendre le comportement du circuit.
- Suivant que $|L\omega|$ est supérieur ou inférieur à $\left|\frac{1}{C\omega}\right|$, la réactance de l'ensemble est positive ou négative ce qui revient à dire que l'impédance a un comportement *inductif* ou bien *capacitif*.

Circuits et signaux en régime sinusoïdal

Généralisation de la loi d'Ohm (Association de dipôles parfaits en parallèle)

L'association en parallèle des trois éléments de bases à savoir une *résistance*, une *inductance* et un *condensateur* permet d'avoir la même tension $u(t)$ commune au trois éléments



Association en parallèle de *R*, *L* et *C*.

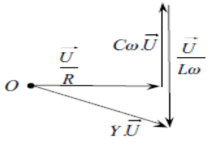
et le courant $i(t)$ devient :

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int u(t)dt + C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

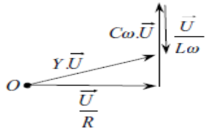
Y étant l'admittance complexe du dipôle RLC parallèle, en notation complexe on a :

$$i(t) = \left(\frac{1}{R}\underline{U}\right) + \left(\frac{1}{jL\omega}\underline{U}\right) + \left(jC\omega\underline{U}\right) = \left[\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]\underline{U} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$

Il s'agit de la loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal où Y étant l'impédance complexe du dipôle RLC parallèle. La figure ci-dessus (représentation de Fresnel) permet de comprendre le comportement du circuit.



(a) Y est inductive



(b) Y est capacitive

Représentation de Fresnel

Suivant que $\left|\frac{1}{L\omega}\right|$ est supérieur ou inférieur à $|C\omega|$, la susceptance de l'ensemble est positive ou négative ce qui revient à dire que l'admitance un comportement *inductif* ou bien *capacitif*.

Remarque : Dans deux exemples la solution *physique* est la partie réelle de la solution complexe

- Toutes les règles et théorèmes énoncés pour les réseaux en régime statique sont valables pour le régime sinusoïdale à condition de raisonner dans le domaine complexe.

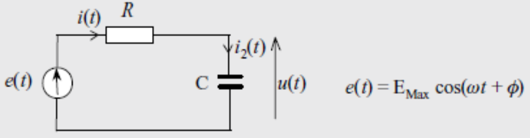
- Toutes les règles et théorèmes énoncés pour les réseaux en régime statique sont valables pour le régime sinusoïdale à condition de raisonner dans le domaine complexe.
- Généralement l'étude en régime sinusoïdal se rapporte à l'un des thèmes suivants :

- Toutes les règles et théorèmes énoncés pour les réseaux en régime statique sont valables pour le régime sinusoïdale à condition de raisonner dans le domaine complexe.
- Généralement l'étude en régime sinusoïdal se rapporte à l'un des thèmes suivants :
  1. **Étude à fréquence constante** : c'est le cas, par exemple, en régime triphasé avec une fréquence SONELGAZ fixé à 50 Hz. Nous pouvons chercher à calculer le courant et la tension dans d'une branche, nous pouvons nous intéresser à la puissance et aux problèmes d'adaptation par une cellule particulière du type LC.

- Toutes les règles et théorèmes énoncés pour les réseaux en régime statique sont valables pour le régime sinusoïdale à condition de raisonner dans le domaine complexe.
- Généralement l'étude en régime sinusoïdal se rapporte à l'un des thèmes suivants :
  1. **Étude à fréquence constante** : c'est le cas, par exemple, en régime triphasé avec une fréquence SONELGAZ fixé à 50 Hz. Nous pouvons chercher à calculer le courant et la tension dans d'une branche, nous pouvons nous intéresser à la puissance et aux problèmes d'adaptation par une cellule particulière du type LC.
  2. **Étude à fréquence variable** : dans ce cas, il s'agit souvent de tracer les *diagramma de Bode*. Pour résoudre ce genre de problème, nous faisons souvent appel à l'étude des quadripôles en régime sinusoïdal.

- Toutes les règles et théorèmes énoncés pour les réseaux en régime statique sont valables pour le régime sinusoïdale à condition de raisonner dans le domaine complexe.
- Généralement l'étude en régime sinusoïdal se rapporte à l'un des thèmes suivants :
  1. **Étude à fréquence constante** : c'est le cas, par exemple, en régime triphasé avec une fréquence SONELGAZ fixé à 50 Hz. Nous pouvons chercher à calculer le courant et la tension dans d'une branche, nous pouvons nous intéresser à la puissance et aux problèmes d'adaptation par une cellule particulière du type LC.
  2. **Étude à fréquence variable** : dans ce cas, il s'agit souvent de tracer les *diagramma de Bode*. Pour résoudre ce genre de problème, nous faisons souvent appel à l'étude des quadripôles en régime sinusoïdal.
  3. Étude pour connaître la réponse à une variation brusque de tension ou de courant (*réponse impultionnelle*). Nous pouvons aussi vérifier la stabilité du système en régime transitoire ou en régime quelconque.

Soit le circuit RC série en régime sinusoïdal permanent suivant :



circuit RC série.

Trouver l'expression de $i(t)$ ainsi que l'expression de $u(t)$

En appliquant la loi des maille l'équation du circuit est donnée par :

$$e(t) - R \cdot i(t) - \frac{1}{C}\int i(t)dt = 0 \quad , \quad u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (**)$$

L'équation ainsi obtenue étant linéaire, nous pouvons utiliser les notations complexes pour le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$

$$\begin{aligned} e(t) &= E_{Max} \exp j(\omega t + \phi) = \underline{E} \exp j(\omega t) \\ i(t) &= I_{Max} \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{I} \exp j(\omega t) \\ u(t) &= U_{Max} \exp j(\omega t + \psi) = \underline{U} \exp j(\omega t) \end{aligned}$$

par dérivation de l'équation $(**)$ on a

$$\frac{de(t)}{dt} - R \cdot \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t) = 0$$

En notation complexe on a

$$\begin{aligned}\left(j\omega \underline{E} \exp j(\omega t)\right) - \left(j\omega R \underline{I} \exp j(\omega t)\right) - \left(\frac{1}{C}\underline{I} \exp j(\omega t)\right) &= 0 \\ \left(j\omega \underline{E}\right) - \left(j\omega R \underline{I}\right) - \left(\frac{1}{C}\underline{I}\right) &= 0\end{aligned}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

- $\underline{I}$ étant un nombre complexe,

- $\underline{I}$ étant un nombre complexe,

1. l'amplitude du courant est donnée par le module du courant complexe

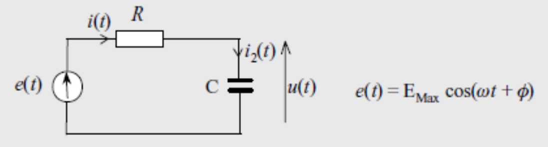
$$\left|\underline{I}\right| = |I_{Max} \exp j(\varphi)| = I_{Max} = \frac{E_{Max}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

- $\underline{I}$ étant un nombre complexe,
  1. l'amplitude du courant est donnée par le module du courant complexe

$$\left|\underline{I}\right| = \left|I_{Max} \exp j(\varphi)\right| = I_{Max} = \frac{E_{Max}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

  2. la phase à l'origine du courant φ est déterminée en utilisant l'égalité :

$$\begin{aligned} I_{Max} \exp(j\varphi) &= \frac{E_{Max} \exp(j\phi)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{E_{Max} \exp(j\phi)}{1 + j\omega RC}(j\omega C) \\ \varphi &= \phi + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC) \end{aligned}$$



circuit *RC* série.

Toujours en notation complexe la tension $u(t)$ est donnée par :

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \frac{1}{jC\omega} = \frac{\underline{E}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega}$$

L'amplitude de $u(t)$ ainsi que sa phase à l'origine sont données par :

$$\left|\underline{U}\right| = |U_{Max}\exp(j\psi)| = \frac{E_{Max}}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \Rightarrow \psi = \phi - \arctan(RC\omega)$$

$$u(t) = \frac{E_{Max}}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \phi - \arctan(RC\omega))$$

$$i(t) = \frac{E_{Max}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)\right)$$

- Quand un dipôle électrique est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$ une tension sinusoïdale $u(t)$ se crée à ses bornes, dans ces conditions nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

- Quand un dipôle électrique est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$ une tension sinusoïdale $u(t)$ se crée à ses bornes, dans ces conditions nous pouvons définir plusieurs types de puissances :
  1. La puissance instantanée

- Quand un dipôle électrique est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$ une tension sinusoïdale $u(t)$ se crée à ses bornes, dans ces conditions nous pouvons définir plusieurs types de puissances :
  1. La puissance instantanée
  2. La puissance moyenne

- Quand un dipôle électrique est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$ une tension sinusoïdale $u(t)$ se crée à ses bornes, dans ces conditions nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

    1. La puissance instantanée
    2. La puissance moyenne
    3. Puissance active et puissance réactive

Definition

La puissance instantanée $p(t)$ consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- $p(t)$: est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur

Definition

La puissance instantanée $p(t)$ consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- $p(t)$: est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur
- $p(t)$: est négatif, le dipôle consomme de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.

Definition

La puissance instantanée $p(t)$ consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- $p(t)$: est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur
- $p(t)$: est négatif, le dipôle consomme de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.
- En régime sinusoïdal permanent

$$i(t) = I_{Max} \cos(\omega t + \phi_1) \quad , \quad u(t) = U_{Max} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$p(t) = I_{Max} \cdot U_{Max} \cdot \cos(\omega t + \phi_1) \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$$

Definition

La puissance instantanée $p(t)$ consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en watt (W) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- $p(t)$: est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur
- $p(t)$: est négatif, le dipôle consomme de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.
- En régime sinusoïdal permanent

$$i(t) = I_{Max} \cos(\omega t + \phi_1) \quad , \quad u(t) = U_{Max} \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$p(t) = I_{Max} \cdot U_{Max} \cdot \cos(\omega t + \phi_1) \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$$

- Sachant que

- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]$$

- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$

- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- $$p(t) = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$

- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- $$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- $$p(t) = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$
- La relation $p(t)$ se compose d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.
- La puissance moyenne etant la puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active.

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.
- La puissance moyenne etant la puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active.
- Dans l'expression ci-dessus le terme constant représente la valeur moyenne

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.
- La puissance moyenne etant la puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active.
- Dans l'expression ci-dessus le terme constant représente la valeur moyenne
- La définition de la puissance moyenne est donnée par

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.
- La puissance moyenne etant la puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active.
- Dans l'expression ci-dessus le terme constant représente la valeur moyenne
- La définition de la puissance moyenne est donnée par
- $$p_{moyenne} = p_{active} = \bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

- Il est souvent plus intéressant de travailler avec la puissance moyenne sur une période T que de la puissance instantanée au cours du temps.
- La puissance moyenne etant la puissance effectivement consommée par la charge pendant une période est appelée puissance active.
- Dans l'expression ci-dessus le terme constant représente la valeur moyenne
- La définition de la puissance moyenne est donnée par
- $$p_{moyenne} = p_{active} = \bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$
- $$p_{active} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2}\left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right] dt$$

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2)dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2$$

$$p_{active} = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi)$$

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$

- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2) dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$p_{active} = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi)$$

- φ : représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2)dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$p_{active} = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi)$$

- φ : représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.
- La puissance moyenne est toujours positive ou nulle.

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2)dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$p_{active} = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi)$$

- φ : représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.
- La puissance moyenne est toujours positive ou nulle.
- La puissance active est maximale dans le cas particulier d'une charge purement résistive : $Z = R$. La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont donc en phase c'est-à-dire que **facteur de puissance** $\cos(\varphi) = 1$ ce qui nous donne

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2)dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2$$

$$p_{active} = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi)$$

- φ : représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.
- La puissance moyenne est toujours positive ou nulle.
- La puissance active est maximale dans le cas particulier d'une charge purement résistive : $Z = R$. La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont donc en phase c'est-à-dire que **facteur de puissance** $\cos(\varphi) = 1$ ce qui nous donne

- $$p_{active} = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) dt + \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi$$
- Le premier terme du second membre est nul
- Le puissance moyenne est donc

$$\begin{aligned} p_{active} &= \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2T} \int_0^T \cos(\phi_1 - \phi_2) dt = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2 \\ p_{active} &= I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

- φ : représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.
- La puissance moyenne est toujours positive ou nulle.
- La puissance active est maximale dans le cas particulier d'une charge purement résistive : $Z = R$. La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont donc en phase c'est-à-dire que **facteur de puissance** $\cos(\varphi) = 1$ ce qui nous donne

En notation complexe on a

$$u(t) = U_{Max}\Re(\exp(j(\omega t+\phi_2))) \quad , \quad i(t) = I_{Max}\Re(\exp(j(\omega t+\phi_1)))$$

Du moment la pulsation n'intervient pas dans le calcul de la puissance moyenne sur une période du signal sinusoïdal, les tensions $u(t)$ et $i(t)$ peuvent s'écrire :

$$u = U_{Max}\Re(\exp(j\phi_2)) \quad , \quad i = I_{Max}\Re(\exp(j\phi_1))$$

donc

$$p_{active} = \frac{I_{Max}\cdot U_{Max}}{2}\cos(\phi_1-\phi_2) = \frac{1}{2}\Re(u^* i) = \frac{1}{2}\Re(i^* u)$$

où i^* et u^* representent le courant est la tension conjuguée respectivement.

D'après la relation qui lie 'impédance, tension et courant (loi d'Ohm) et sachant que $Z = R + jX$:

$$p_{active} = \frac{1}{2}\Re(Zi^* i) = \frac{1}{2}i^2\Re(Z) = \frac{1}{2}Ri^2$$

- Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source.

- Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source.
- Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative.

- Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source.
- Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative.
- La puissance impliquée dans cet échange est désignée par la puissance réactive : $P_{réactive}$.

- Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source.
- Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative.
- La puissance impliquée dans cet échange est désignée par la puissance réactive : $P_{réactive}$.
- Sachant que la puissance instantanée est donnée par

$$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$

- Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobine) pour être ensuite restituée à la source.
- Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative.
- La puissance impliquée dans cet échange est désignée par la puissance réactive : $P_{réactive}$.
- Sachant que la puissance instantanée est donnée par

$$p(t) = \frac{I_{Max} \cdot U_{Max}}{2} \left[\cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$

- si on considère que $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = \Delta\phi$

$$p(t) = [I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot \cos(\Delta\phi)] + [I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot \cos(2\omega t + \Delta\phi)]$$

$$p(t) = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot \cos(\Delta\phi) + I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot [\cos(2\omega t)\cos(\Delta\phi) - \sin(2\omega t)\sin(\Delta$$

$$p(t) = I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot [1 + \cos(2\omega t)]\cos(\Delta\phi) - I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot [\sin(2\omega t)\sin(\Delta\phi)]$$

L'expression ci-dessus comporte deux termes :

$$\begin{aligned} p_{active} &= I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot [1 + \cos(2\omega t)]\cos(\Delta\phi) && \text{Puissance Active} \\ p_{réactive} &= I_{Eff} \cdot U_{Eff} \cdot [\sin(2\omega t)\sin(\Delta\phi)] && \text{Puissance Réactive} \end{aligned}$$

Toujours suivant la loi d'Ohm $\underline{U} = Z \cdot \underline{I}$ en notation complexe et en considérant la phase initiale nulle

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\left[R + jX\right] I_{Max} \left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] \\ &= \left[R \cdot I_{Max}\cos(\omega t)\right] - \left[X \cdot I_{Max}\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

La puissance instantanée devient :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left[R \cdot I_{Max}\cos(\omega t) - X \cdot I_{Max}\sin(\omega t\right] \left[I_{Max}\cos(\omega t)\right]$$

$$p(t) = \left[\frac{R \cdot I_{Max}^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))\right] - \left[\frac{X \cdot I_{Max}^2}{2}\sin(2\omega t)\right]$$

- Dans l'expression ci-dessus est composée de deux termes

Toujours suivant la loi d'Ohm $\underline{U} = Z \cdot \underline{I}$ en notation complexe et en considérant la phase initiale nulle

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\left[R + jX\right] I_{Max}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] \\ &= \left[R \cdot I_{Max}\cos(\omega t)\right] - \left[X \cdot I_{Max}\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

La puissance instantanée devient :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left[R \cdot I_{Max}\cos(\omega t) - X \cdot I_{Max}\sin(\omega t\right]\left[I_{Max}\cos(\omega t)\right]$$

$$p(t) = \left[\frac{R \cdot I_{Max}^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))\right] - \left[\frac{X \cdot I_{Max}^2}{2}\sin(2\omega t)\right]$$

- Dans l'expression ci-dessus est composée de deux termes
  1. Le premier est à la puissance **active** qui fait intervenir la partie résistive R de l'impédance Z.

$$p_{\ldots} = \frac{R \cdot I_{Max}^2}{\ldots}(1 + \cos(2\omega t))$$

Circuits et signaux en régime sinusoïdal

Puissance et Energie en Régime sinusoïdal(Puissance active et puissance réactive en notation complexe)

Toujours suivant la loi d'Ohm $\underline{U} = Z \cdot \underline{I}$ en notation complexe et en considérant la phase initiale nulle

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\left[R + jX\right] I_{Max} \left[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\right] \\ &= \left[R \cdot I_{Max} \cos(\omega t)\right] - \left[X \cdot I_{Max} \sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

La puissance instantanée devient :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left[R \cdot I_{Max} \cos(\omega t) - X \cdot I_{Max} \sin(\omega t\right] \left[I_{Max} \cos(\omega t)\right]$$

$$p(t) = \left[\frac{R \cdot I_{Max}^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))\right] - \left[\frac{X \cdot I_{Max}^2}{2} \sin(2\omega t)\right]$$

- Dans l'expression ci-dessus est composée de deux termes
  1. Le premier est à la puissance **active** qui fait intervenir la partie résistive R de l'impédance Z.

$$R \cdot I_{Max}^2 \,(1 + \cos(2\omega t))$$

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.
- En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance.

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.
- En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance.
- En électrotechnique nous n'utilisons que le terme de puissance active pour le calcul de la puissance moyenne.

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.
- En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance.
- En électrotechnique nous n'utilisons que le terme de puissance active pour le calcul de la puissance moyenne.
- La quantité $U_{Eff} I_{Eff} \sin(\varphi)$ appelée puissance **réactive**, ne prend en compte que l'échange de puissance dans le terme réactif de l'impédance.

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.
- En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance.
- En électrotechnique nous n'utilisons que le terme de puissance active pour le calcul de la puissance moyenne.
- La quantité $U_{Eff} I_{Eff} \sin(\varphi)$ appelée puissance **réactive**, ne prend en compte que l'échange de puissance dans le terme réactif de l'impédance.
- L'unité de puissance **réactive** est le *volt-ampère-réactif* (VAr).

- La puissance moyenne dissipée dans un élément d'impédance Z ne dépend que de sa partie réelle.
- En d'autres termes, nous dirons que seule la partie réelle d'une impédance dissipe de la puissance.
- En électrotechnique nous n'utilisons que le terme de puissance active pour le calcul de la puissance moyenne.
- La quantité $U_{Eff} I_{Eff} \sin(\varphi)$ appelée puissance **réactive**, ne prend en compte que l'échange de puissance dans le terme réactif de l'impédance.
- L'unité de puissance **réactive** est le *volt-ampère-réactif* (VAr).
- La puissance calculée en effectuant le produit de la tension par le courant sans tenir compte du déphasage entre la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ est appelée puissance **apparente** et elle s'exprime en *Volt-Ampère* (VA).