

Chapitre III

L' INDUCTION

*Toute généralisation suppose, dans une certaine mesure,
la croyance à l'unité et à la simplicité de la Nature.*
Henri Poincaré¹

1. L'INDUCTION.**1.1. L'induction en logique.**

C'est un procédé de raisonnement qui consiste à aller du particulier au général, on remonte à la cause à partir des effets. Ainsi, si une affirmation est vraie dans un certain nombre de cas observés, elle peut être généralisée à tous les cas similaires.

Mais un grand nombre d'observations, réalisées dans des contextes variés et jamais contredites, est-il suffisant pour affirmer que cette généralisation est légitime ? Voilà une des questions fondamentales de l'épistémologie. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

1. 2. L'induction en sciences.

Le scientifique observe les faits, procède à l'expérimentation, essaie d'expliquer le phénomène étudié et tente de découvrir les lois qui le régissent. Ces lois, auxquelles on aboutit, doivent être à chaque fois confrontées à l'expérience, ce qui n'est pas le cas des mathématiques. Jules Lachelier² définit l'induction comme :

“ l'opération par laquelle nous passons de la connaissance des faits à celle des lois qui les régissent. ”

C'est cette démarche que préconise Ampère³ :

“ Observer d'abord les faits, en varier les circonstances autant qu'il est possible, accompagner ce premier travail de mesures précises pour en déduire les lois générales, uniquement fondées sur l'expérience .

¹ POINCARÉ page 161.

² LACHELIER page 9. Jules Lachelier (1832-1918) : Philosophe français.

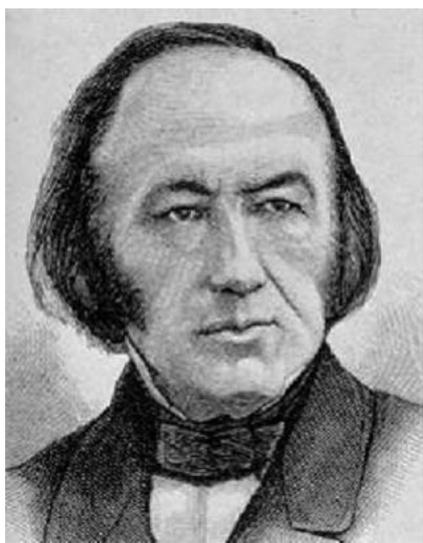
³ AMPERE page 176.

En effet, c'est grâce aux nombreuses observations de Tycho Brahé que Képler a pu énoncer les trois lois du mouvement des planètes. D'un autre coté, les expériences de Galilée ont abouti aux lois de la chute des corps. Toutes ces lois ont permis à Newton d'élaborer une théorie de la gravitation et d'exprimer mathématiquement la force qui est à l'origine ce phénomène. Ce sera l'objet du paragraphe 3.

Le raisonnement par induction est largement utilisé dans les sciences expérimentales : Claude Bernard⁴ a initié une méthodologie que les didacticiens du XX^{ème} siècle ont développée et désignée par le sigle : O.H.E.R.I.C⁵.

On part de l'observation (O) d'un phénomène naturel, on émet des hypothèses (H) sur son évolution ou sur sa nature. Celles-ci doivent être confirmées ou infirmées par l'expérience (E) dont les résultats (R) seront interprétés (I). L'interprétation aboutit à une conclusion (C) qui sera exprimée sous la forme d'une loi. Puis on regroupe plusieurs lois, ainsi obtenues, dans le cadre d'une théorie.

Cette méthode est largement utilisée par les savants en sciences expérimentales.



Claude BERNARD 1813 -1878

Le savant complet est celui qui embrasse à la fois la théorie et la pratique expérimentale : 1°) Il constate un fait 2°) à propos de ce fait, une idée naît dans son esprit 3°) en vue de cette idée, il raisonne, institue une expérience, en imagine et en réalise les conditions matérielles 4°) de cette expérience résultent de nouveaux phénomènes qu'il faut observer et ainsi de suite. L'esprit du savant se trouve en quelque sorte toujours placé entre deux observations : l'une qui sert de point de départ au raisonnement et l'autre qui lui sert de conclusion. (pages 43 & 44)

Claude Bernard
*Introduction à l'étude de
 la médecine expérimentale.*
 Ed. J.B. Baillères & Fils Paris 1865
 Bnf Gallica

Ce mode de raisonnement sera illustré, dans ce chapitre, par deux exemples le premier en mathématiques sur le raisonnement par récurrence et le second en physique sur la chute des corps et la gravitation.

⁴ Claude **Bernard** (1813-1878) médecin français. Il est considéré comme le fondateur de la médecine expérimentale.

⁵ ASTOLFI page 23.

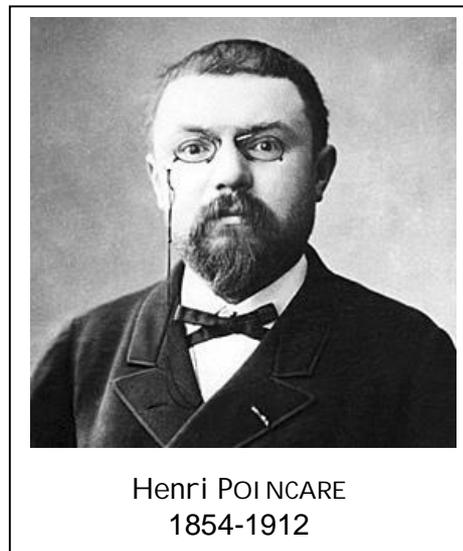
2. L'INDUCTION EN MATHÉMATIQUES

En mathématiques, la déduction est le mode de raisonnement qui s'est imposé dès l'antiquité et qui, depuis, n'a cessé d'être utilisé par les mathématiciens. Mais est-ce le seul mode qui convient à cette science ? Voici ce que nous dit Henri Poincaré, dans la science et l'hypothèse ⁶.

Quelle est la nature du raisonnement mathématique ? Est-il réellement déductif comme on le croit d'ordinaire ? Une analyse approfondie nous montre qu'il n'en est rien, qu'il participe dans une certaine mesure de la nature du raisonnement inductif et que c'est par là qu'il est fécond. Il n'en conserve pas moins son caractère de rigueur absolue.

Selon Poincaré le raisonnement par récurrence, méthode qu'il a développée, est une induction puisqu'on va du particulier au général. Ce procédé consiste à "établir qu'une proposition est vraie pour $n = 1$, ⁷ puis à montrer que si elle est vraie pour $n - 1$, elle l'est pour n . On généralise, alors, en concluant qu'elle est vraie pour tous les nombres entiers."

Ce procédé lui a permis de démontrer les règles de l'addition et de la multiplication : L'associativité, la distributivité et la commutativité.⁸



Exercice III. 1. Démontrer l'inégalité : $(1 + a)^n > 1 + n.a$ où a est un nombre positif et n un entier supérieur à 1 .

Solution : L'inégalité est vérifiée pour $n = 2$.

On montre que si elle est vraie pour $n - 1$, elle est vraie pour n :

Pour $n - 1$ on a :

$$(1 + a)^{(n-1)} > 1 + (n-1) a$$

Si on multiplie les deux membres par $(1 + a)$ on obtient :

$$(1 + a)^n > 1 + n.a + (n-1) a^2 > 1 + n.a$$

CQFD

Puis on généralise ce résultat à tous les entiers n supérieurs à 1.

⁶ POINCARÉ *La science et l'hypothèse* Introduction page 25

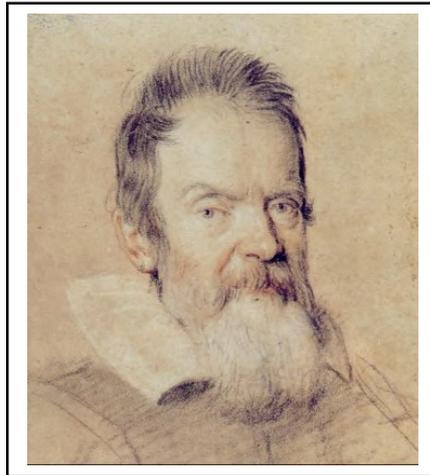
⁷ Ou une autre valeur particulière de n . Dans l'exercice, on part de $n = 2$.

⁸ POINCARÉ *La science et l'hypothèse* pages 35 à 38

3. L'INDUCTION EN PHYSIQUE :

3.1. Loi de la chute des corps.

Les travaux de Galilée sur la chute des corps sont exposés dans un ouvrage, paru en 1638 : "*Discorsi e Dimostrazioni matematiche*".⁹ Comme nous le verrons dans ce qui suit, Galilée est le premier savant à introduire une méthode expérimentale moderne.



Galileo GALILEI
1564-1642

On peut même vérifier qu'il utilise un raisonnement par induction basé sur la méthode OHERIC qui sera préconisée deux siècles plus tard par Claude Bernard¹⁰.

Observation :

Galilée observe que des corps de différentes matières, lâchés librement du haut de la tour de Pise, ont le même mouvement et arrivent au même moment au sol. Jusqu'à cette époque on pensait que plus un corps était lourd plus il tombait vite. D'autre part, il constate que la vitesse du corps augmente au cours du mouvement.

Hypothèse :

A partir de ces observations il fait d'abord une première hypothèse qui s'avère fautive :

*La vitesse du mobile est proportionnelle au chemin parcouru.*¹¹

Puis il suppose que la vitesse augmente linéairement en fonction de la durée de la chute. Pour vérifier cette hypothèse et obtenir la loi de la chute des corps, il procède à l'expérience.

⁹ Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles.

¹⁰ Voir § . 1.2

¹¹ Montrer que dans ce cas, la distance parcourue est une fonction exponentielle du temps.

Expérience & Résultats :

La chute d'un corps, dont la trajectoire est verticale, est trop rapide. Galilée eut alors l'idée d'utiliser des plans inclinés et de faire rouler des billes le long d'une rainure.

Première question ? A-t-on la même loi en lâchant une bille du haut d'une tour et en la faisant rouler le long d'un plan incliné ? En faisant varier l'inclinaison du plan il constata que :

Les degrés de vitesses acquis par le même mobile sur des plans diversement inclinés sont égaux lorsque les hauteurs des plans le sont¹².

Il peut alors procéder à l'expérience, mais comme il ne peut pas mesurer la vitesse du mobile à un instant donné, il se propose de relever les distances parcourues en fonction du temps mis à les parcourir :

« Dans une règle, ou plus exactement dans un chevron de bois, long d'environ douze coudées¹³, large d'une demi-coudée et épais de trois doigts, nous creusions un petit canal d'une largeur à peine supérieure à un doigt, et parfaitement rectiligne ; après avoir garni d'une feuille de parchemin bien lustrée pour le rendre aussi glissant que possible, nous y laissions rouler une boule de bronze très dure, parfaitement arrondie et polie. Plaçant alors l'appareil dans une position inclinée, en élevant l'une de ses extrémités, d'une coudée ou deux au-dessus de l'horizon, nous laissions, comme je l'ai dit, rouler la boule en notant (...) le temps nécessaire à une descente complète ; l'expérience était commencée plusieurs fois afin de déterminer exactement la durée du temps, mais sans que nous découvrissions jamais de différence supérieure au dixième d'un battement de pouls¹⁴. La mise en place de cette première mesure étant accomplie, nous faisons descendre la boule sur le quart du canal seulement : le temps mesuré était toujours rigoureusement égal à la moitié du temps présent. Nous faisons ensuite varier l'expérience en comparant le temps requis pour parcourir sa moitié ou les deux-tiers, ou les trois-quarts, ou toute autre fraction ; dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés des temps, et cela, quelle que soit l'inclinaison du plan, i.e., du canal dans lequel on laissait descendre la boule ».

Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles*, 1638,
Troisième journée.

¹² Voir planche III. 1.

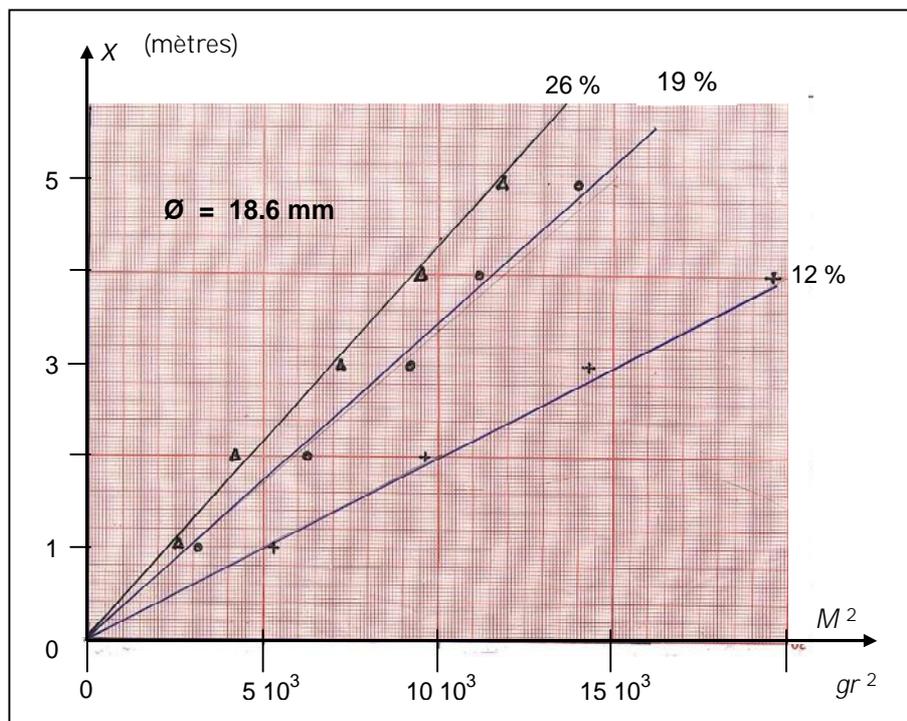
¹³ La **coudée** (*lat. cubitus*) est une unité de longueur vieille de plusieurs milliers d'années. Elle a comme base la longueur allant du coude jusqu'à l'extrémité de la main. C'est la coudée, dite naturelle, de 24 doigts (= 6 paumes ou 1½ pieds). Elle correspond donc à 45 cm environ.

¹⁴ Galilée procède de la même façon qu'un étudiant qui manipule, actuellement, dans une salle de Travaux pratiques. Il donne la précision avec laquelle il obtient ses résultats, celle-ci est de l'ordre du dixième de seconde.

Réplication de l'expérience de Galilée

Mémoire de Licence de Physique 2007- 2008.

L'expérience du plan incliné de Galilée a été refaite par les étudiants Smaïl Bouhadda et Christian Kwissanga. Les dimensions du dispositif et le protocole expérimental ont été strictement respectés.



Variation de x en fonction de M^2

Galilée ne disposait pas de chronomètres, les horloges mécaniques, du début du XVII^{ème} siècle, n'étaient pas adaptées à la mesure des durées aussi courtes¹⁵. Pour mesurer le temps, il fit construire une clepsydre formée d'un réservoir rempli d'eau dont la surface est très grande par rapport à celle d'un orifice à partir duquel l'eau s'échappe pour être recueillie dans un récipient. La durée de cet écoulement est égale à celle du mouvement dans le plan incliné. La mesure de cette durée est déterminée à partir de la pesée de la masse d'eau recueillie.

"Quant à la mesure du temps, nous la fîmes à l'aide d'un grand seau plein d'eau d'où sortait, par un fin tuyau soudé sur le fond, un mince filet d'eau reçu dans un petit verre durant tout le temps de la descente de la boule. Les quantités d'eau recueillies étaient pesées chaque fois sur une balance très exacte donnant par la différence et proportion de leurs poids la différence et proportion des temps.

Galilée, "*Discours ...*"

Les résultats, obtenus à partir de cette expérience, montrent que les espaces parcourus par le corps sont proportionnels au carré des temps mis à les parcourir¹⁶.

Interprétation & Conclusion.

Ces résultats étant valables quelque soit l'inclinaison du plan, ils sont donc valables lorsque l'angle formé par le plan et l'horizon tend vers un angle droit. Par conséquent les corps lâchés du haut de la tour de Pise tombent suivant un mouvement uniformément accéléré.

L'interprétation des résultats de toutes ses expériences, celles de la tour de Pise, du pendule, du plan incliné, permet à Galilée d'énoncer, en conclusion, la loi de la chute des corps.

Réplication de l'expérience de Galilée

Les résultats, trouvés par les étudiants lors de la réplication de l'expérience de Galilée ¹⁷ (figure de la Planche III. 2), montrent que les espaces parcourus x par la bille le long du plan incliné, sont proportionnels au carré des masses d'eau M recueillies à la sortie de la clepsydre. Ces masses d'eau sont pesées à l'aide d'une balance construite par les étudiants. Ces derniers ont fait réaliser, par un artisan menuisier, une poutre en bois d'acajou de 523 cm de longueur, 30 cm de hauteur et 5 cm d'épaisseur, l'épaisseur de la rainure est 2 cm. L'ensemble repose sur trois colonnes de bois conçues pour avoir des inclinaisons différentes. La clepsydre est constituée d'un bassin en cuivre de 50 cm de diamètre, fabriqué par un dinandier (voir la photographie de la Planche III. 2).

¹⁵ Calculer la durée de chaque parcours de la boule dans l'expérience décrite par Galilée.

¹⁶ L'étalonnage de la clepsydre permet de trouver la loi : $M = f(t)$. M est la masse d'eau recueillie.

¹⁷ Dans une deuxième partie de leur mémoire, les étudiants ont refait ces expériences en utilisant une caméra reliée à un micro ordinateur.. Ils ont constaté une bonne concordance entre les résultats obtenus par les deux méthodes.

3. 2. Théorie de Newton.

Les trois principes de la dynamique, tels que les a formulés Newton dans les "Principia", résultent de l'observation et de l'expérience.

Newton reprend le principe de l'inertie suggéré à Galilée par l'expérience :

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

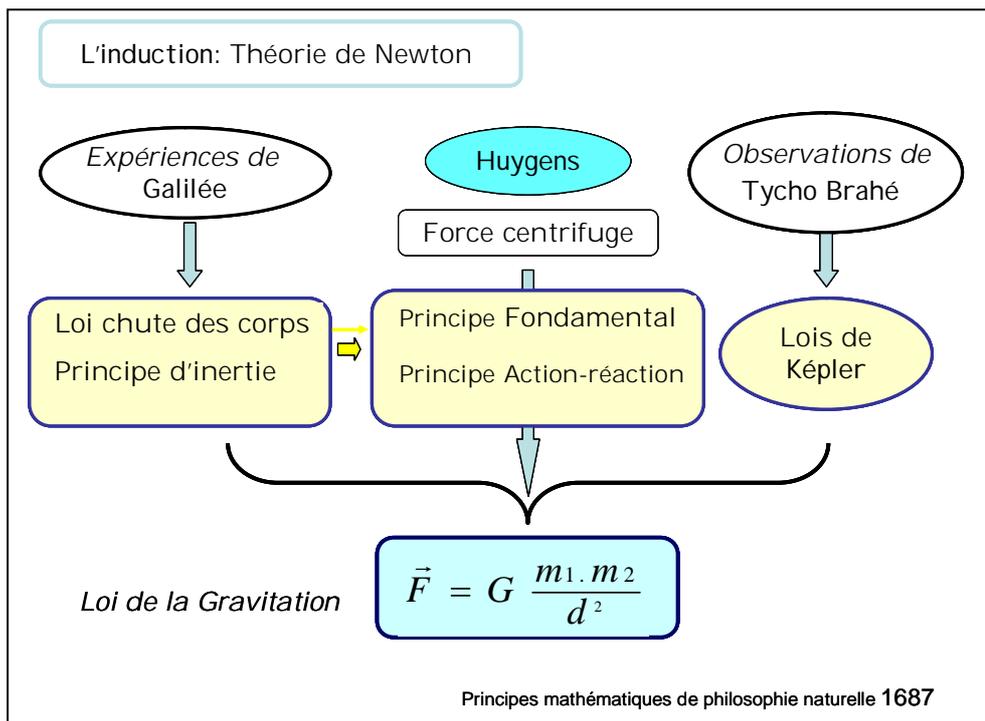


Figure II. 3

Il énonce alors le principe fondamental de la dynamique qui découle du précédent.

Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.

Quant au Principe de l'action et de la réaction, il l'a tiré de l'observation.

" Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre, car la corde, qui les joint et qui est tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval et le cheval vers la pierre.¹⁸ "

¹⁸ NEWTON : *Principia* .. page 18

La théorie de la gravitation & le raisonnement par induction.

Pour trouver la loi de la gravitation, Newton a utilisé tous ces résultats, la loi de la force centrifuge introduite par Huygens et surtout les trois lois de Kepler, elles mêmes tirées des observations de l'astronome Tycho Brahé.

Pierre Duhem rappelle, dans " La Théorie Physique", la méthode utilisée par Newton ¹⁹ selon laquelle, en physique, toute proposition doit être tirée des phénomènes et généralisée par induction. En effet :

La théorie de la gravitation ne se tire t-elle pas tout entière des lois que l'observation a révélées à Kepler, lois que le raisonnement problématique transforme et dont l'induction généralise les conséquences?²⁰

1°) La *loi des aires* ²¹ a appris à Newton que chaque planète est constamment soumise à une force dirigée vers le soleil.

2°) La deuxième loi, qui donne l'orbite de chaque planète, lui a appris que la force de gravitation varie en $1/r^2$

3°) La troisième loi : *Les carrés des durées des révolutions des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites*, a montré à Newton que :

les diverses planètes ramenés à une même distance du soleil subiraient de la part de cet astre des actions proportionnelles à leurs masses respectives ²²

Duhem émet des réserves sur la fiabilité de la méthode adoptée par Newton qui consiste à tirer la loi de la gravitation des seules lois de Kepler car celles-ci ne sont que des lois approchées. Les trajectoires des planètes autour du soleil diffèrent légèrement des ellipses de la première loi de Kepler. C'est la raison pour laquelle, par la suite, les lois de Kepler ont été déduites des principes de la théorie de Newton plus généraux. Ces principes ou postulats ont été obtenus, comme nous venons de le voir, grâce à un raisonnement par induction.²³

4. CRITIQUE DE LA METHODE.

Il résulte des exemples précédents que l'induction constitue un mode de raisonnement très performant aussi bien en mathématiques qu'en sciences expérimentales.

En physique, il permet de découvrir des lois, à partir de l'expérience, puis de construire une théorie. Or, comme le fait remarquer Lachelier²⁴,

¹⁹ Cette méthode est qualifiée, par Duhem, de méthode newtonienne.

²⁰ DUHEM : *La théorie physique* .. page 267

²¹ Ces trois lois sont énoncées au § 3. 1

²² DUHEM : *La théorie physique* .. page 267

²³ Voir : Ch IV § 5.

²⁴ LACHELIER page 9,

“ l'expérience la mieux faite ne sert qu'à nous apprendre au juste comment les phénomènes se lient sous nos yeux, mais qu'ils doivent se lier toujours et partout de la même manière, c'est ce qu'elle ne nous apprend point et c'est cependant ce que nous n'hésitons pas à affirmer”.

Il ajoute :

L'induction, lorsqu'elle a été vérifiée un grand nombre de fois, permet d'arriver à une connaissance dont la probabilité tend asymptotiquement seulement, à l'universalité.

Ainsi, une théorie physique ²⁵ ne reste valable que si elle est vérifiée à chaque fois qu'elle est confrontée à l'expérience. Il suffit qu'une seule expérience ne soit pas justifiée par une théorie, pour que cette dernière soit remise en cause et remplacée par une autre.

La théorie de Newton a été, durant deux siècles, considérée comme une théorie universelle. ²⁶ Non seulement, elle était vérifiée par les observations astronomiques et les expériences, mais elle pouvait, encore, faire de nombreuses prédictions.²⁷ Cela a amené Laplace à écrire ²⁸ que si l'on pouvait connaître toutes les positions et tous les mouvements des corps à un instant donné, on en déduirait la totalité des états futurs du monde. Cependant, à la fin du XIX^{ème} siècle, les astronomes avaient remarqué, dans le déplacement du périhélie de Mercure, une différence de 40'' par siècle, entre l'observation et le calcul, que la théorie de Newton était incapable d'expliquer. En 1915, la théorie de la relativité générale justifie ce résultat, donne une nouvelle explication de la gravitation et détrône la théorie de Newton. Néanmoins, celle-ci est toujours enseignée et largement utilisée, car la différence des résultats données par les deux théories, dans la majorité des cas, est minime et les calculs, en mécanique newtonienne, sont beaucoup moins difficiles.²⁹

Par contre, en mathématiques, l'induction constitue un mode de raisonnement rigoureux. Poincaré nous explique pourquoi :

L'induction appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.³⁰

²⁵ Voir Annexe II.

²⁶ Jusqu'au milieu du XIX^{ème} siècle, toutes les branches de la physique étaient construites sur le modèle newtonien (voir, au chapitre IV, la théorie électromagnétique d'Ampère)

²⁷ Découvertes de Neptune et de Pluton (voir Ch. I, 1.3)

²⁸ Laplace : “*Exposition du système du monde*” 1796 B.N.F Gallica. Pierre Simon **Laplace** (1749 -1827) Mathématicien, physicien et astronome français.

²⁹ La théorie de la relativité générale est utilisée lorsque le champ de gravitation est intense (trous noirs, naines blanches, étude de l'Univers, voir HAWKING)

³⁰ POINCARÉ *La science et l'hypothèse* page 42