Chapitre IV

L' ANALOGIE

Il y a de fortes chances pour que l'analogie se révèle exacte,
en première approximation, car après tout, notre
bagage conceptuel est relativement pauvre.
Mario Bunge [1]

1. L'ANALOGIE EN LOGIQUE.

Ce mode de raisonnement a été introduit d'abord en mathématiques, par les grecs, et caractérise, conformément à son étymologie, le rapport. (Ana logon : selon le rapport). Ainsi, si :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on dira que *a* est à *b* ce que *c* est à *d.*

Le point de départ de la notion d'analogie est dans l'idée d'une égalité de rapports au sens mathématique[2].

> La proportion est l'égalité des rapports, ce qui implique au moins quatre termes.

Il ne faut donc pas confondre la similitude qui fait intervenir deux éléments qui se ressemblent et l'analogie qui en fait intervenir au moins quatre.

Aristote expose la propriété d'une proportion de permettre l'inversion des termes :

Le doux est à l'amer comme le blanc est au noir,

ou inversement

le doux est au blanc comme l'amer est au noir.

Ce qui peut être traduit mathématiquement par l'expression :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

[1] BUNGE page 136. Mario A. **Bunge** (1919-) physicien et philosophe argentin.
[2] DOROLLE préface pages 1 & 2

avec :

a = doux, *b* = amer et *c* = blanc, *d* = noir,

2. L'ANALOGIE EN MATHEMATIQUES.

Ce mode de raisonnement a été introduit d'abord en mathématiques et il est basé sur le rapport.
Ainsi, si :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on dira que *a* est à *b* ce que *c* est à *d.*

C'est ainsi qu'en 1806 le mathématicien suisse, Jean Robert Argand,[3] trouva la représentation géométrique des nombres complexes.

2. 1. Les nombres complexes.

Les nombres complexes ont été introduits, au XVI$^{\text{ième}}$ siècle, lors de la recherche des solutions de l'équation du troisième degré dont une méthode de résolution avait été proposée par le mathématicien italien Jérome Cardan [4]**.**
Bombelli [5] devait résoudre l'équation du 3$^{\text{ième}}$ degré :

$$X^3 - 15X - 4 = 0$$

dont il connaissait la solution évidente $X = 4$. Pourtant l'équation auxiliaire qui apparaît dans la méthode de Cardan :

$$Z^2 - 4Z + 125 = 0$$

n'a pas de solution et donne des '' *nombres impossibles* '' :

$$Z_1 = 2 + 11\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Bombelli poursuit néanmoins ses calculs, s'aperçoit que les termes gênants s'éliminent et trouve la solution $X = 4$
Bombelli disait :

> « De l'avis de beaucoup, c'était une idée insensée, et moi-même je fus longtemps de cette opinion ; toute la question semblait reposer sur un

---

[3] Jean Robert **Argand** (1768-1822) mathématicien suisse. Il a exercé le métier de libraire à Paris
[4] Girolamo **Cardano** , Jérome Cardan en français, (1501-1576) mathématicien, médecin, astrologue italien
[5] Rafael **Bombelli** (1526-1572) mathématicien italien, auteur d'un traité d'algèbre (L'*Algebra Opera* Bologne,1579).

> sophisme [6] plutôt que sur la réalité ; cependant, je cherchais jusqu'à ce que j'eusse prouvé que c'était bien la vérité [7]».

C'est cette contradiction entre une méthode mathématique, proposée par Cardan, et son application pratique qui a permis d'aboutir à l'une des plus grandes découvertes en mathématiques : celle des nombres complexes.

Cependant les nombres complexes découverts au XVIième siècle furent longtemps mésestimés par les mathématiciens. Au XVIIIième siècle Euler écrivait encore [8] :

> '' De ces nombres nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement, les rend imaginaires ou impossibles'

2. 2. Représentation des nombres complexes par Argand.

Un grand pas fut franchi par les mathématiciens Caspar Wessel [9] en 1797 et Jean Robert Argand, en 1806, lorsqu'ils trouvent, indépendamment l'un de l'autre, la représentation géométrique des nombres complexes au moyen de points dans un plan rapporté à un repère cartésien.
Argand utilise un raisonnement par analogie ; il commence par considérer une progression arithmétique :

$$a \;,\; 2a \;,\; 3a \;, \ldots na$$

constituée en ajoutant la quantité *a,* à chaque fois que l'on passe d'un terme au suivant. Cette opération peut être répétée à l'infini. Mais l'opération inverse, qui consiste à partir du dernier terme *n.a* auquel on retranche *a*, finit par aboutir à 0. Pour aller plus loin il a fallu introduire de nouveaux nombres : les nombres négatifs [10] .

$$-\;a \;,\; -2a \;,\; -3a \;, \ldots -na$$

Argand signale que cette façon de considérer les nombres, en nombres positifs et négatifs, fait intervenir deux idées :

---

[6] Raisonnement, qui partant de prémisses vraies et obéissant aux règles de la logique, aboutit à une conclusion inadmissible.

[7] Cité par Cauty André : *Regards croisés sur la droite réelle* Amérindia N° 17 pages 173-180 , 1992

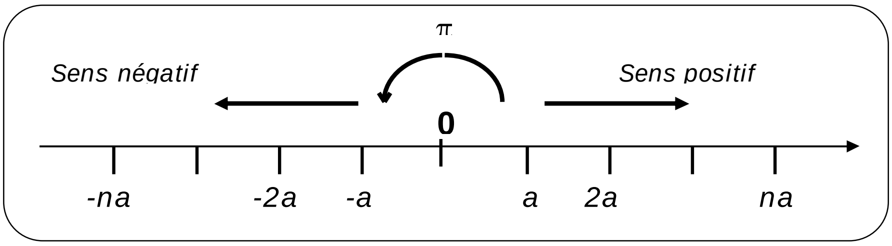
[8] Cité par Cauty ,

[9] Le travail du mathématicien norvégien Caspar **Wessel** (1745-1818), présenté devant l'Académie des sciences de Copenhague en 1797, est passé inaperçu durant un siècle, il a été publié en 1897 à Copenhague et Paris.

[10] Les nombres négatifs étaient également qualifiés ''*d'absurdes*'' ou ''*fictifs*'' avant leur diffusion, en Europe au XVIème siècle, par Simon STEVIN (1548 - 1620). Mais déjà au XIIème siècle le mathématicien italien Fibonacci (1170 - 1240) avait déjà remarqué qu'un résultat négatif signifiait un déficit. Quelques années auparavant, Ibn Yahya al-Maghribi **Al-Samawal**, né en 1130 à Bagdad et décédé en 1180 à Maragha (Iran) a écrit que ''*Le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est un nombre négatif, et celui d'un nombre négatif par un nombre négatif est un nombre positif''.*

- L'idée de valeur absolue
- L'idée de signe + ou - ,

Dans le cas d'une représentation géométrique sur une droite orientée, elle introduit deux paramètres le module et la direction (ou le sens).



Argand considère la quantité x telle que :

$$x^2 = -1$$

Elle vérifie le rapport :

$$\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$$

Il remarque que :

> '' on est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de 0 la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif ''[11] **.**

Il se propose alors de procéder en adoptant un raisonnement analogue à celui qu'il a suivi pour les nombres négatifs qui sont caractérisés par une grandeur absolue et une direction opposée à celle des nombres positifs. Il utilise le principe même du raisonnement par analogie basé sur le rapport. Il considère le rapport précédent, et ayant adopté deux directions opposées pour les termes (+1) et (-1), il suggère une troisième direction pour x telle que la direction de (+1) soit à celle de x ce que la direction de x est à celle de (-1) . Cette condition est satisfaite par la direction perpendiculaire aux précédentes.
Autrement dit cette direction est la '' *moyenne proportionnelle* '' de celles de (+1) et (-1).

Géométriquement si la première fait un angle égal à 0 avec une direction donnée D, la seconde fera un angle égal à π , et x un angle égal à $\pi/2$.

[11] ARGAND : page 6.

Ainsi $x = \sqrt{-1}$ aura pour grandeur absolue 1 et pour direction la perpendiculaire à D.

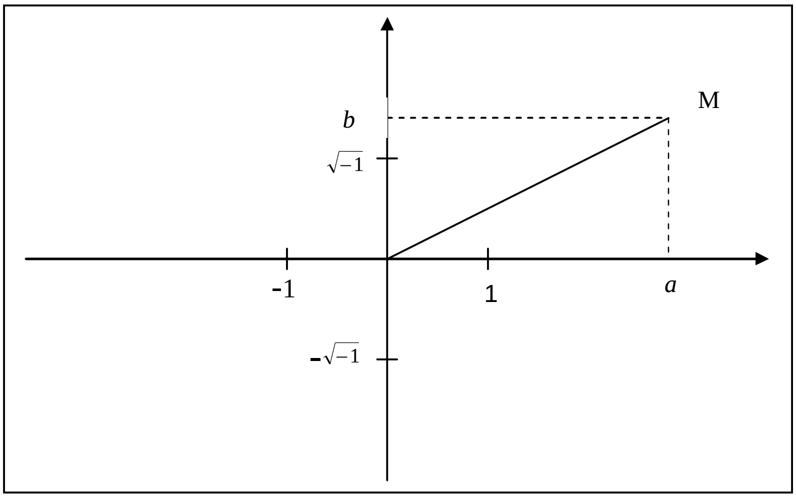


Figure V. 1 : Représentation d'Argand

A partir de là, tout nombre complexe :

$$z = a + b\sqrt{-1}$$

sera représenté dans le plan complexe par un point M dont les projections sont *a* (+1) sur l'axe horizontal (axe des réels) et $b\sqrt{-1}$ sur l'axe vertical (axe des imaginaires) ; *a* et *b* sont des nombres algébriques positifs ou négatifs [12].

Les nombres complexes, baptisés ainsi par Gauss en 1831, ne seront définitivement reconnus qu'après la ''caution'' de Gauss, en Allemagne et celle de Cauchy en France.[13]

3. L'ANALOGIE EN PHYSIQUE.

En sciences, ce mode de raisonnement fait intervenir la comparaison entre deux domaines distincts qui présentent des ressemblances. Etienne Bolmont distingue, dans sa thèse[14] , deux types d'analogies :
L'analogie structurelle
et l'analogie fonctionnelle.

[12] De nombreux mathématiciens ont tenté d'étendre cette représentation à l'espace à 3 dimensions. En 1843, le mathématicien irlandais William. R. **Hamilton** (1805-1865) montre que cela est impossible dans R3, mais qu'il existe un système de nombre dans l'espace à quatre dimensions : Les quaternions.
Les quaternions ont été utilisés par MAXWELL dans son ''*Traité d'Electricité et de Magnétisme*''

[13] ARGAND : Lire l'introduction de Jules Hoüel.

[14] BOLMONT *thèse* page 24

3. 1. Analogie structurelle

L'analogie est structurelle lorsque des éléments d'un même domaine sont structurés de la même façon que leurs correspondants de l'autre domaine.
Si les éléments considérés sont reliés par les mêmes lois et si celles ci sont traduites par les mêmes équations mathématiques l'analogie est ''formelle''

Exemple :

L'équation de continuité en mécanique des fluides :

$$div\,(\mu\vec{V}) + \frac{\partial\,\mu}{\partial\,t} = 0$$

où $\vec{V}$ désigne le vecteur vitesse et μ la masse volumique du fluide.

L'équation de conservation de la charge en électricité

$$div\left(\vec{J}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

où $\vec{J}$ représente le vecteur densité de courant et ρ la densité volumique de charge électrique[15].

L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$div\left(\vec{R}\right) + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

où $\vec{R}$ est le vecteur de Poynting et w densité volumique d'énergie électro-magnétique.

D'où les analogies :

Mécanique des fluides	Electricité	Electromagnétisme
$\mu\,\vec{V}$	J	R
μ	ρ	w

Si ces lois sont représentées par des courbes similaires, on a une analogie ''géométrique'' [16] :
La planche IV.1. donne un exemple d'analogie géométrique entre la ferroélecticité et le ferromagnétisme.

[15] Si on exprime la densité de courant sous la forme : $J = \rho\ V$ où V est le vecteur vitesse, on obtient une équation identique à celle de la mécanique des fluides.
[16] BOLMONT *thèse* page 24

Exemple d'analogie géométrique.

Le ferromagnétisme a été découvert, à la fin du dix neuvième siècle, par le physicien allemand Emil Warburg (1846-1931). En 1921, un jeune doctorant américain Joseph Valasek[1] découvre la ferroélectricité en mettant en évidence l'analogie entre les propriétés du sel de la Rochelle[2] (tartrate mixte de sodium et de potassium) et celles des matériaux ferromagnétiques. Depuis de nombreux chercheurs ont retrouvé ce phénomène dans d'autres matériaux : les cristaux à liaison hydrogène (KH_2PO_4), les sels isomorphes, et les cristaux ioniques à structure pérovskite comme le titanate de Baryum (Ba Ti O_3).
En 1929 Sawyer et Tower [3] montent un dispositif expérimental qui leur a permis de relever un cycle d'hystérésis présenté par le Sel de la Rochelle.

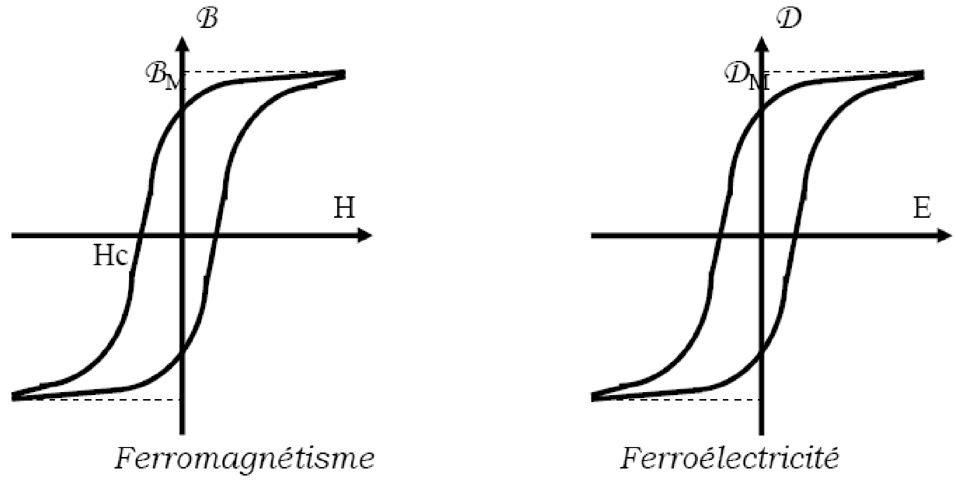


Figure IV.1. : Analogie géométrique

L'analogie géométrique, mise en évidence par les courbes *D(E)* et *B(H)* (figure IV. 1) a amené les chercheurs à essayer de retrouver, dans les matériaux ferroélectriques, les propriétés et les théories du ferromagnétisme :
On a pu montrer qu'au dessus d'une certaine température critique Tc, analogue à la température de Curie en magnétisme, la ferroélectricité disparaît et le matériau se retrouve dans un état ''paraélectrique''.
Par analogie au ferromagnétisme on explique la polarisation spontanée par l'existence de domaines spontanément polarisés. Le matériau est globalement non polarisé quand les volumes des domaines de sens opposés sont égaux et polarisé dans le cas contraire. Le moment dipolaire total du cristal peut varier sous l'effet d'un déplacement de parois entre les domaines L'existence de domaines et le mouvement des parois ont été mis en évidence, en 1954, dans le titanate de barium par Merz [1].
On retrouve en ferroélectricité le phénomène de Barkhausen [4] qui apparaît dans les matériaux magnétiques.

* 1 Merz W.J. *Ferroelectricity* dans Birks J.B. *Progress in Dielectrics* Vol. 4 page 101 à 149 Ed. Heywood London 1962
* 2 Ce matériau, également appelé ''sel de Seignette'', a été découvert en 1672 par le pharmacien français Pierre **Seignette** (1660-1719).
* 3 Sawyer C.B. Tower C.H.: *Rochelle salt as a dieclectric,* Phys. Rev. 35, p 269 1930
* 4 Durand *Electrostatique* Tome III page 371 Ed Masson 1964

Planche IV.1.

3. 2. Analogie fonctionnelle.

L'analogie est fonctionnelle lorsque certains éléments ont des fonctions analogues dans leurs domaines respectifs. C'est le cas du modèle planétaire de l'atome conçu par analogie au système solaire [17]. Le noyau a la même fonction que le soleil et les électrons jouent le même rôle que les planètes.
L'analogie est ''substantielle'' si la nature ou la substance des objets est similaire [18].
Selon Mario Bunge, cette analogie se construit dans le cadre d'une vision unifiante du monde, elle est rejetée par ceux qui pensent le monde dans toute sa variété [19] .

Des dispositifs mécaniques sont parfois remplacés par des circuits électriques équivalents plus simples à réaliser et dont les caractéristiques sont reliées à des grandeurs plus faciles à mesurer [20].

L'analogie constitue également un outil didactique : on explique à l'élève un phénomène nouveau par analogie avec un phénomène qu'il connaît déjà.

3. 3. Exemple : La théorie du magnétisme d'Ampère.

Le magnétisme était expliqué, avant 1820, par l'hypothèse de Poisson [21] : Un matériau magnétique est constitué de molécules magnétisées où sont confinées les deux espèces contraires de fluide magnétique plus ou moins séparées vers les pôles opposés de la molécule. Ces espèces ne peuvent jamais être séparées. Mais Poisson ne pouvait pas expliquer la nature d'une telle molécule. Dès la publication de l'expérience d'Oersted[22] qui montre l'action d'un courant électrique sur un aimant, Ampère, par un éclair de génie, propose, en quelques jours, une nouvelle théorie.

Premier modèle :

Ampère est guidé par l'analogie entre l'action exercée par un fil parcouru par un courant électrique et celle créée par un barreau aimanté. Il conçoit d'abord l'aimant comme :

> ''un assemblage de courants électriques dans des plans perpendiculaires à la ligne qui en joint les pôles, cette analogie me fit d'abord chercher à en imiter l'action par des conducteurs pliés en hélice, dont chaque spire me représentait un courant disposé comme ceux d'un aimant''[23].

---

[17] L'étude de l'atome a commencé avec le modèle planétaire. Mais ce modèle, construit à partir d'un raisonnement par analogie, s'est révélé impuissant à expliquer les spectres discontinus de la lumière émise par l'atome. Bohr a été amené à introduire la quantification de l'énergie.

[18] Nous verrons un exemple au § 3.1. dans le cas de l'analogie entre un barreau aimanté et un solénoïde.

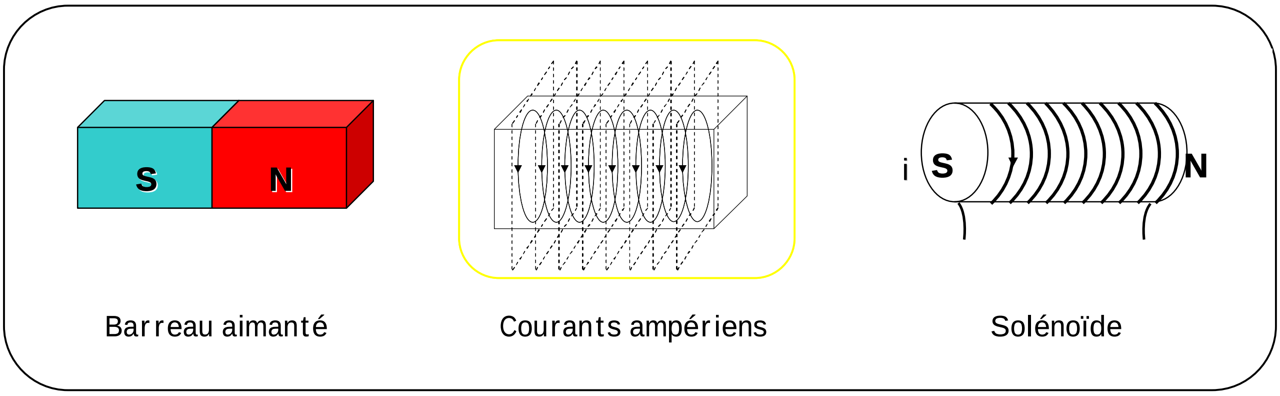
[19] Cité par BOLMONT page 27

[20] L'analogie entre oscillateurs mécaniques, électriques et électromécaniques fera l'objet du paragraphe 4.2.

[21] MAXWELL : Traité d'électricité et de magnétisme, Tome 2 page 6.

[22] En 1820 Oersted publie un article : *Expériences sur l'effet du conflict électrique sur l'aiguille aimantée* (Ann. Chim. Phys. 14, 417 – 25 ,1820), dans lequel il fait savoir que des expériences, menées durant l'hiver 1819, ont montré qu'une aiguille aimantée était déviée sous l'effet du ''*conflict électrique*'' (courant électrique). Cette expérience n'a pu être réalisée que grâce à l'invention, en 1800, de la pile électrique par Volta.

[23] AMPERE *Mémoire sur....*, page 23



Figures IV.2 : Premier modèle

Puis, il annonça son intention d'entreprendre une série d'expériences pour imiter tous les effets de l'aimant avec des solénoïdes[24].

> ''J'annonçais, dans un mémoire lu à l'Académie le 18 septembre 1820, l'intention où j'étais de faire construire des hélices en fil de laiton pour imiter les effets de l'aimant ''[34]

L'appareil représenté sur la figure IV.3. lui a permis d'entreprendre de telles expériences.

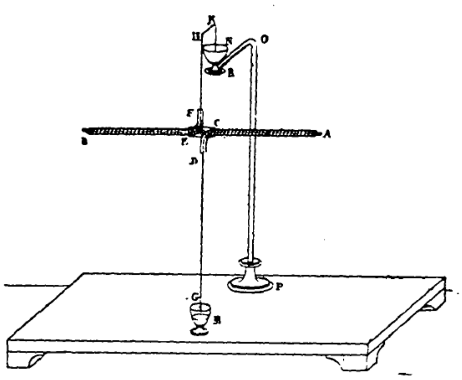


Figure IV. 3. Hélices en fil de laiton (AMPERE *Mémoire sur....*, page 24) .

Second modèle :

L'analogie entre le barreau aimanté et le solénoïde n'est pas parfaite. Faraday signale une différence notable [25] entre un aimant cylindrique creux et un solénoïde parcouru par un courant électrique : Une aiguille aimantée, placée à l'intérieur de l'aimant creux n'est pas déviée alors que le solénoïde exerce une action sur la boussole.

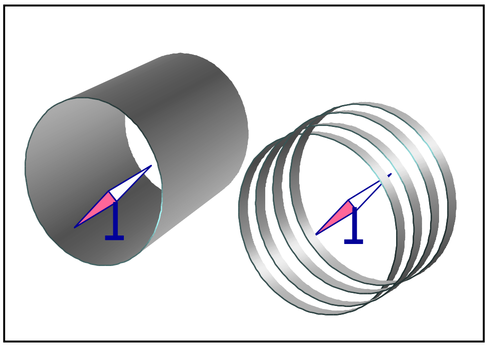
---

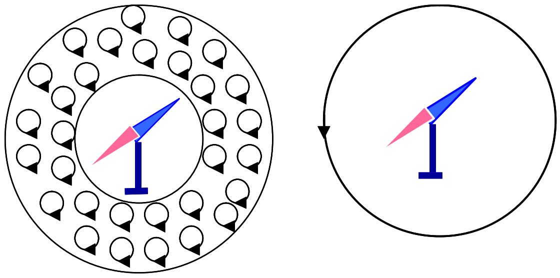
[24] Ampère nomme '' *solénoïde*'' un fil conducteur enroulé en hélice autour d'un cylindre. Ce terme vient du mot grec σωληνοειδηζ dont la signification exprime ce qui a la forme d'un canal. AMPERE *Théorie math..* page 267

[25] Faraday M. *Sur les mouvements électromagnétiques et la théorie du magnétisme* Ann. Chim. Phys. 18 pages 337-370 (1821)

Ampère est contraint de proposer un second modèle. Il explique toujours le magnétisme par la circulation, dans le matériau, de courants électriques, mais à présent ce sont des " *courants moléculaires*" qui circulent autour de chacune des particules de l'aimant.

> … mais si l'on admet, comme l'a fait M. Ampère dans un mémoire lu à l'Institut en janvier 1821, que ces courants sont établis autour des particules des aimants, hypothèse qu'il annonçait dans ce mémoire comme lui paraissant la plus probable, l'aiguille aimantée dans l'intérieur du cylindre creux se trouve toujours en dehors des courants, tandis que dans l'hélice elle leur est intérieure, ce qui doit produire les différences d'action qu'a remarquées M. Faraday.[26]

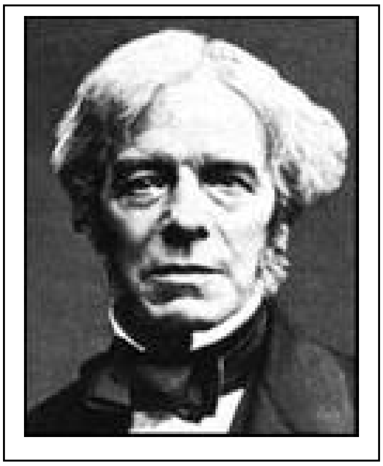




Figures IV. 4. Différence entre le cylindre creux et le solénoïde

Comment se comportent ces courants ? Préexistent-t-ils dans l'aimant, ou sont-ils initiés par une action extérieure ?

André Marie AMPERE
1775 - 1836



Michael FARADAY
1791 - 1867

[26] Ampère A.M: *Note relative au mémoire de M. Faraday*. Ann. Chim. Phys. 18, 370-9 , (1821)

Ampère répond :

> ''…Il résulte que l'on ne peut point exciter de courant électrique par influence, ce qui a porté l'auteur à penser que les courants électriques existent, avant l'aimantation, autour des corps susceptibles de magnétisme, mais qu'ils y existent dans toutes sortes de directions ; ce qui fait que leurs actions sur des points situés hors de ces corps se détruisent mutuellement, ces actions ne se manifestent que quand on donne, par l'aimantation, des directions déterminés à ces courants''.[27]

4. CRITIQUE DU RAISONNEMENT PAR ANALOGIE.

Ce chapitre a mis en évidence le rôle heuristique joué par le raisonnement par analogie dans l'élaboration des théories physiques. L'histoire des sciences montre que c'est au moment où le savant se trouve confronté à un problème nouveau que le raisonnement par analogie peut se révéler utile. C'est une analogie fonctionnelle qui a permis à Ampère d'élaborer une théorie du magnétisme qui allait à l'encontre de la théorie des fluides magnétiques adoptée par les savants de l'époque. Mais c'est l'hypothèse d'Ampère, qui, malgré les critiques dont elle fut l'objet, allait se révéler la plus féconde. Elle permit à Weber, en 1852, puis à Langevin en 1905 de proposer des théories du paramagnétisme et à Debye d'introduire, en 1912, la théorie dipolaire des diélectriques.[28]
Cependant, l'analogie est un outil à double tranchant.

> '' D'un côté, elle facilite le travail de recherche dans des voies inconnues en nous invitant à étendre l'acquis de nos connaissances à de nouveaux domaines. Mais d'un autre côté, si on admet l'idée que le monde présente des aspects variés, l'analogie ne peut pas être étendue indéfiniment [29].

Elle peut freiner l'innovation :
qui a permis à Coulomb de découvrir, par analogie, l'interaction électrique et l'interaction magnétique. De même c'est un raisonnement par analogie qui a permis à Ampère de proposer une expression mathématique pour calculer l'interaction entre deux éléments de courants électriques. A partir de cette loi, il retrouve la loi de Biot, la loi de Coulomb et découvre la ''loi de Laplace''[30].

En effet Ampère a voulu étendre, à toutes les forces de la Nature, le modèle newtonien qu'il n'a pas saisi l'originalité de la force découverte par Oersted. Il a refusé à cette force le statut de ''*fait simple et primitif*'' puisqu'il peut la déduire de sa formule basée sur le modèle newtonien. Ce raisonnement l'empêche de considérer l'*action révolutive* de cette force qui permettra à Faraday de découvrir, en 1821, des phénomènes dont la roue de Barlow constitue une application et qui donneront naissance au milieu du XIX^ième^ siècle au moteur à Courant continu.

---

[27] Ampère : *Note relative au Mémoire de M. Faraday* Ann. Chim. Phys. 18, 370-9, 1821.
[28] Voir TRAÏCHE *Mémoire de Magister* Chapitre II, Alger 2006.
[29] BUNGE page 137
[30] C'est Ampère qui a découvert cette loi qui sera appelée ''loi de Laplace''.

Elle peut créer des confusions et parfois même conduire à des conclusions erronées comme le montre l'exemple de l'analogie entre un circuit hydraulique et un circuit électrique. Aussi comme l'a écrit Mario Bunge, il faut

> '' aider la science à se débarrasser de son échafaudage heuristique qui, une fois le stade de la construction dépassé, risque de gêner l'édifice théorique dans son développement ultérieur…
> Or le meilleur moyen de dégager la théorie de son échafaudage heuristique et de mettre à jour les hypothèses réelles, c'est de préciser ses fondements axiomatiques.''[31]

Bunge [32] préconise de s'engager dans la voie de l'axiomatique, une fois que les axiomes de la théorie aient été dégagés grâce à l'induction ou à l'analogie. C'est la méthode déductive qui convient le mieux à l'exposé, scientifique ou didactique, d'une théorie physique, en raison de la clarté et de la rigueur apportées par le raisonnement déductif. La déduction sera étudiée au prochain chapitre.

---

[31] BUNGE page 159

[32] Mario Bunge donne l'exemple de la mécanique quantique. Cette théorie, actuellement présentée dans les ouvrages scientifiques et pédagogiques sous une forme très abstraite, se prête bien à l'axiomatisation. Elle a été élaborée, au début du vingtième siècle, par analogie à la mécanique analytique de Hamilton et Jacobi, puis elle a été axiomatisée.