Chapitre IV

LES TEMPS MODERNES.

1. INTRODUCTION.

Cette période, s'étend du début du seizième jusqu'à la fin du dix huitième siècle. Elle fut marquée par la prédominance de l'Europe où ont régné de puissantes monarchies[1].Il y eut, durant cette époque, une révolution intellectuelle, économique et sociale sans précédent dans l'histoire de l'humanité. La naissance des grandes langues modernes[2] européennes et l'invention de l'imprimerie[3], par Gutenberg en1454, ont permis une large diffusion du savoir.
Les *humanistes*[4] ont développé l'*esprit critique* et repris les valeurs sur lesquelles était basée la culture de la Grèce antique. Ce retour à ces valeurs est désigné sous le nom de ''*Renaissance*''. Les humanistes contribuèrent à préparer la ''*Réforme*'', mouvement religieux initié par Martin Luther (1483-1546), qui donna naissance au protestantisme.

Le savoir, acquis puis développé par les arabo musulmans, a été transmis à l'Europe à travers l'Italie, qui a été le théâtre des grandes découvertes du XVI^{ième} siècle en mathématiques, en physique et en technologie. Puis ce fut au tour des autres pays européens, la France, la Hollande, l'Angleterre et les pays germanophones de faire avancer les sciences. Les travaux de Copernic, Kepler, Galilée et Newton ont entraîné une *révolution scientifique*. Ce fut la fin de la science d'Aristote et le début de la science moderne.

Le mécénat a permis aux artistes, aux hommes de lettres et aux scientifiques de vivre à l'abri du besoin et de s'adonner à la réflexion, à la création et à la recherche scientifique. Des Académies (lettres, sciences, beaux arts) furent créées au XVII^{ième} siècle et les premières encyclopédies furent éditées en Angleterre et en France au siècle suivant.

---

[1] L'empire turc a occupé, durant cette période, le sud est de l'Europe et une grande partie des pays arabo musulmans. Les turcs avaient des relations commerciales avec les pays européens et menèrent de nombreuses guerres contre ces derniers. La Perse et la Chine avaient une civilisation très raffinée et un commerce florissant. Le Japon, quant à lui, vivait replié sur lui-même. Cependant, dans ces quatre empires, même en Chine, il n'y eut, durant cette période, aucune révolution comparable à celle qui fut à l'origine de la Renaissance en Europe.

[2] La langue italienne est construite, dès le XIV^{ème} siècle, à partir du patois toscan grâce aux œuvres de Dante, Pétrarque et Boccace ; l'espagnol est né du castillan, la langue pratiquée par Cervantès. Quant au français, il dérive du parler des régions de la Loire, pays des poètes Du Bellay et Ronsard. Il en est de même de la langue anglaise ; elle atteint la forme qu'on lui connaît aujourd'hui au cours du XVI^{e} siècle, grâce à Shakespeare et aux grands écrivains de son époque. En utilisant une langue vivante les écrivains étaient en mesure d'atteindre un large public. Quant érudits et aux scientifiques européens, ils continuaient, à quelques exceptions près, à publier leurs écrits en latin.

[3] L'imprimerie a été inventée par les chinois (Voir Ch II § 2), mais les caractères étaient gravés dans la plaque. Celle-ci ne pouvait servir que pour l'impression d'une seule page. Gutenberg invente les caractères mobiles.

[4] Humaniste : vient du mot latin ''*humanus*'' qui signifie : instruit, cultivé. Malet & Isaac Tome 2 page 12.

A la fin de cette époque, les savants disposaient des premières revues scientifiques : Les *''Annales de Chimie''* furent fondées par Lavoisier en 1789, puis il y eut en 1790 les *''Annalen der Physik''* en Allemagne.

La découverte du continent américain a été le début de la colonisation de nouveaux pays par les européens. L'Amérique était habitée par des peuples, les amérindiens, qui avaient vécu, jusqu'au XVIème siècle, complètement isolés du reste du monde. Au nord, ils étaient nomades et vivaient de la chasse et la pèche ; au centre et au sud ils avaient développé de grandes civilisations. Ils n'avaient pas d'alphabet mais les Aztèques [5] et les Mayas avaient mis au point un système d'écriture basée sur des pictogrammes pour les premiers et composée de ''rébus'' pour les seconds. Ces deux peuples possédaient une numération vigésimale (de base 20). Les Incas utilisaient un système de numération décimal, appelé ''quipu'' ou ''Khipu''.

La colonisation de l'Amérique demandait, pour les travaux agricoles, une main d'œuvre de plus en plus nombreuse. A cet effet des millions d'africains ont été déportés en Amérique et transformés en esclaves. Ce commerce triangulaire (Europe - Afrique – Amérique) a fait prospérer de grandes villes portuaires européennes. Le commerce à travers l'océan Atlantique a largement supplanté le commerce méditerranéen si florissant dans l'Antiquité et au Moyen âge.
L'afflux des métaux précieux (or, argent) provenant des colonies espagnoles d'Amérique, a été à l'origine de l'essor économique de l'Europe.

L'intolérance religieuse a été la source de conflits entre états européens (la guerre de trente ans de1618 à1648) et de guerres civiles comme celle qui eut lieu en France à la fin du seizième siècle. Tous ceux qui refusèrent de renier leur religion et de se convertir à la religion officielle, furent chassés de leur propre pays. Ce fut une perte pour leur pays mais un grand bénéfice pour le pays d'accueil. '' *Près de 25 000 Français s'établirent dans le Brandebourg, y apportèrent des nouvelles cultures et y développèrent l'industrie* [6]''. Ainsi la Prusse, pays pauvre qui venait de naître[7], deviendra l'un des pays les plus puissants d'Europe et sera longtemps le principal ennemi de la France.
A côté de ces monarchies absolues, les Provinces Unies [8] (les Pays Bas) constituaient une terre de tolérance et un havre de liberté, où la presse (la Gazette de Hollande, les Nouvelles de Leyde) n'était pas soumise à la censure. Aussi, nombre de savants et de philosophes y ont trouvé refuge.

De nouvelles industries se répandirent notamment celle du livre qui a permis la propagation des idées des grands philosophes du XVIIIème siècle. Celles-ci ont été à l'origine de la révolution française qui a mis fin à l'injustice et à un pouvoir absolu millénaire. Cette révolution et la naissance des Etats Unis d'Amérique, après le traité de Versailles en 1783, allait marquer la fin de cette période.

Les ''temps modernes'' ont débuté avec la naissance de la physique moderne suite aux travaux des physiciens italiens et se sont achevés avec les débuts de la chimie moderne[9] de Lavoisier.

---

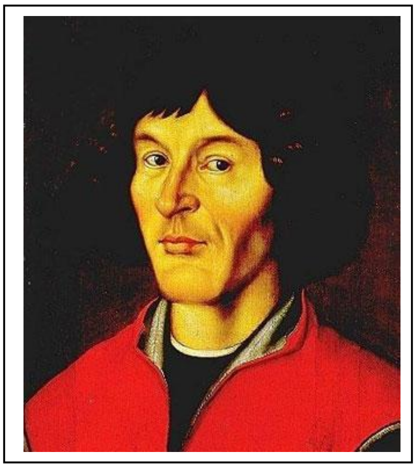
[5] Les Aztèques et les Mayas vivaient en Amérique centrale, les Incas au sud (actuel Pérou)
[6] Malet & Isaac : tome 2 pages 191-192.
[7] Frédéric de Hohenzollern fonda le Royaume de Prusse en 1701 et devint roi sous le nom de Frédéric 1ier.
[8] Les Provinces Unies, qui appartenaient à l'Espagne, proclamèrent leur indépendance en 1581 et sont devenues une république fédérale regroupant sept provinces. Une bonne partie des terres a été gagnée sur la mer par un peuple travailleur qui su amasser de grandes richesses grâce à l'agriculture, à l'industrie et surtout au commerce maritime.
[9] Physique et chimie modernes : sciences basées sur la mesure et le calcul mathématique.

2. L'ASTRONOMIE.

2. 1 De Copernic à Newton.

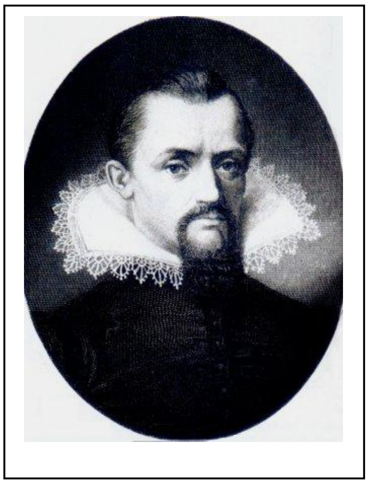
Au XVIième siècle, l'astronome polonais Nicolas Copernic (1473-1543) écrit un livre '' *De revolutionibus orbium caelestium* '' où il reprend l'hypothèse d'Aristarque de Samos et propose un système héliocentrique. Ce système a fini par être adopté par la communauté scientifique, malgré une forte résistance de l'église [10]. C'est la fin du système géocentrique d'Aristote et de Ptolémée, qui a servi de base aux astronomes depuis quinze siècles. Désormais, la Terre n'est plus le centre de l'univers mais une simple planète qui tourne autour du soleil en une année et autour d'elle-même en un jour. En outre la lune tourne autour de la terre.
Cependant, Copernic considère un univers, limité par la sphère des fixes (les étoiles) centrée sur le soleil, où les trajectoires des six planètes connues, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne, sont des cercles concentriques[11].

Au XVIième siècle l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601) a effectué de nombreuses observations, dans son observatoire à Uraniborg au Danemark, et a relevé les positions de plus de 700 astres. Ces relevés étaient très précis bien qu'il n'ait utilisé que des instruments d'observation rudimentaires. La lunette astronomique ne sera inventée par Galilée que quelques années après la mort de Tycho Brahé (Voir Fig. IV.1). Il faut signaler que ce savant ne croyait pas au système de Copernic



Nicolas Copernic
1473-1543

Tycho Brahé
1546-1601



Johannes Képler
1571-1630

Johannes Képler (1571-1630) fut l'assistant de Tycho Brahé, à ce titre il a hérité des précieuses mesures de son maître. Képler a opté pour le système de Copernic, sans cela il n'aurait jamais pu trouver ses lois. Il a commencé par rapporter au soleil les mesures relevées, par rapport à la Terre, par

[10] Copernic n'a pas osé publier de son vivant le ''*De revolunionibus orbium coelestium* '' qui paraîtra l'année de sa mort en 1543
[11] Copernic a gardé, de l'astronomie d'Aristote, les concepts de sphère des fixes et de trajectoires circulaires.

Tycho Brahé, ce qui constitue un travail considérable. L'exploitation des résultats, qu'il a obtenus, lui a permis d'énoncer trois lois sur le mouvement des planètes[12].

> Première loi (Loi des aires) (1609): *Le rayon vecteur balaie des surfaces égales pendant des temps égaux*
>
> Deuxième loi (1609): *les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyer* [13].
>
> Troisième loi (1618): *le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.*

La première loi explique l'inégalité des saisons. La seconde montre que les orbites des planètes ne sont pas des cercles, comme le pensaient les grecs et Copernic, mais des ellipses.
Le système héliocentrique de Copernic prouve que la séparation de l'univers en monde sub lunaire et supra lunaire n'a plus sa raison d'être. Une même théorie peut alors régir les mouvements des astres et ceux des corps sur terre. En 1687 Isaac Newton publie un ouvrage, les *principes mathématiques de philosophie naturelle* où il expose une telle théorie : la théorie de la gravitation.

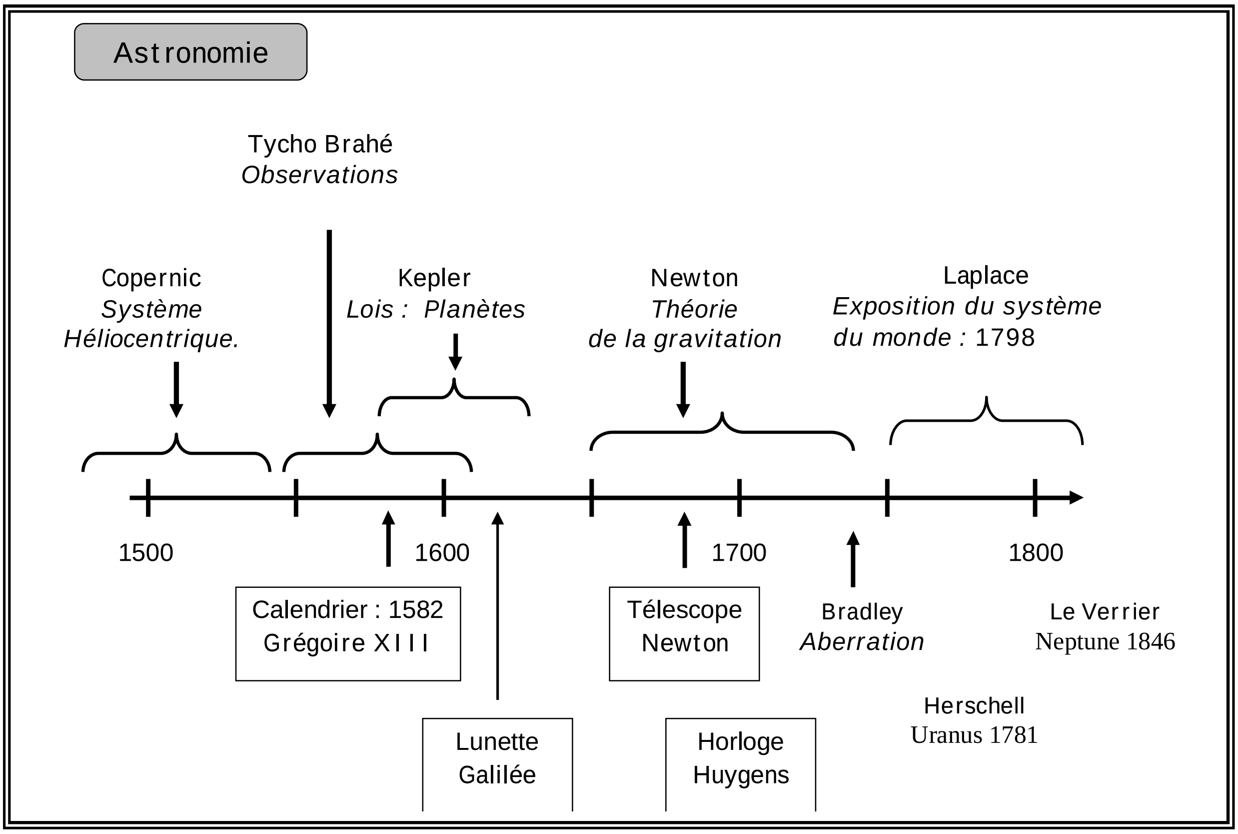


Figure IV. 1. *Évolution des connaissances en astronomie* de 1500 à 1800

12 Voir dans ce chapitre le § III.
13 Ces lois sont énoncées ici selon d'ordre historique. Actuellement dans l'enseignement on commence par la loi des orbites.

Les résultats de cette théorie, obtenue par induction (Voir Annexe II), peuvent être posés comme postulats à partir desquels on peut entreprendre, grâce à un raisonnement déductif, de nombreuses études. C'est ainsi que Newton, étudie, en ce qui concerne l'astronomie, le mouvement des planètes, de la lune, des comètes. Il trouve que la trajectoire d'une comète est une ellipse très allongée. Il calcule les masses et les dimensions des planètes et de leurs satellites. Il montre que le phénomène des marées est dû à l'attraction combinée de la lune et du soleil sur la terre. etc..

Cette théorie a été complétée par les savants du XVIIIe siècle dont Lagrange qui introduit la théorie des perturbations. A la fin de ce siècle Laplace fait la synthèse de toutes les connaissances en astronomie dans l' *Exposition du système du monde*.et la *Mécanique céleste* (1798).

2. 2 Découvertes de nouveaux instruments et de nouveaux astres.

La contribution de Galilée à cette science a été considérable grâce à la construction d'une lunette astronomique[14] (figure IV.2). Jusqu'à cette époque, les astronomes ne disposaient pas d'instruments d'observation d'approche et scrutaient le ciel à l'œil nu. Grâce à sa lunette, Galilée découvre les quatre satellites de Jupiter, les cratères de la lune et remarque que la voie lactée est constituée d'un grand nombre d'étoiles. Huygens observe en 1655 les anneaux de saturnes.
Suite aux travaux de Galilée sur l'isochronisme du pendule, Huygens fit construire par des artisans les premières horloges à échappement puis des montres à ressort.
Newton invente le premier télescope (figure IV.3) en 1671. Les performances de cet instrument sont nettement supérieures à celles de la lunette et seront améliorées par la suite.

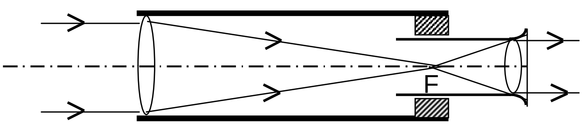


Figure IV. 2

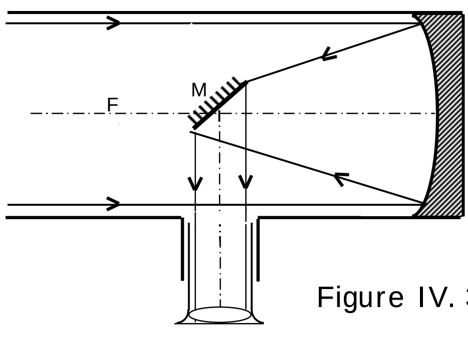


Figure IV. 3

Une lunette astronomique est constituée d'une lentille convergente, l'objectif, et une lentille divergente, l'oculaire. (Figure IV. 2)
Le télescope est un instrument d'optique dont l'objectif est un miroir parabolique. Dans le télescope de Newton, l'image, donnée par l'objectif, est déviée sur l'oculaire, par un miroir M faisant un angle de 45° avec l'axe optique. (Figure IV. 3)

[14] Galilée n'a pas inventé la lunette, mais il fut le premier savant à en construire dans le but d'observer le ciel.

En 1682 Edmond Halley (1656/1742) découvre le passage de la comète qui portera son nom et montre qu'elle repasse périodiquement tous les 75 ans.
En 1781 William Herschel découvre une septième planète nommée Uranus. Il contribue à la perfection du télescope.
James Bradley (1693/1762) découvre l'aberration et donne la formule de la réfraction astronomique. Désormais les astronomes vont améliorer la précision de leurs mesures en tenant compte des erreurs dues à l'aberration[15], à la parallaxe[16] et à la réfraction astronomique[17].

2. 3. Le calendrier grégorien 1582.

L'année julienne moyenne qui compte 365,25 jours, présente un excès de 0,0078 jour sur l'année tropique[18]. Ainsi le calendrier julien s'est retrouvé en 1582 avec un retard de 10 jours sur l'équinoxe du printemps. Le pape Grégoire XIII lança, au cours de cette année une réforme du calendrier. On supprima 10 jours pour faire coïncider l'équinoxe au 21 mars: le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre. L'année 1582 n'a compté que 355 jours. Pour éviter que ne recommence la dérive du calendrier, on décida de supprimer 3 années bissextiles en 4 siècles. Seules les années séculaires dont le millésime est divisible par 400 restent bissextiles : 1600 et 2000 sont bissextiles, 1700, 1800 et 1900 ne le sont pas.

Les états du Pape, l'Espagne et le Portugal adoptèrent, dès le début, ce calendrier. Par contre certains pays manifestèrent beaucoup de réticence. La France et les Pays Bas l'acceptèrent en décembre, les états catholiques allemands en 1584, l'Angleterre en 1752. Quant aux pays orthodoxes, ils ont conservé le calendrier julien jusqu'au début du vingtième siècle. C'est ainsi que la révolution d'octobre russe, eut lieu le 7 novembre 1917 du calendrier actuel soit le 25 octobre du calendrier julien.
Ce calendrier est à présent universellement adopté, néanmoins pour fixer les dates des fêtes religieuses, les musulmans, les juifs et les chrétiens continuent à se référer à un calendrier lunaire. Au Maghreb, Yennayer, premier jour de l'an berbère, est fêté le 12 janvier du calendrier grégorien. Selon Kouadri Mostefai Bouali[19] cette date a été fixée lorsque, en 1752, l'Angleterre opta pour ce calendrier. Le décalage de 11 jours, introduit par le changement de calendrier, n'a pas été pris en compte par les maghrébins, et depuis 1753, Yennayer est fêté chaque année le 12 janvier.

3. LA MECANIQUE.

L'hypothèse de Copernic et les observations de Tycho Brahé ont permis, comme nous venons de le voir, à Kepler d'énoncer les lois du mouvement des planètes. D'un autre côté Galilée et d'autres savants ont étudié le mouvement des corps sur Terre. Tous ces travaux ont permis d'aboutir, comme nous allons le voir, à la théorie de Newton.

---

[15] L'aberration est un phénomène *optique* dû au fait que la position de l'observateur, par rapport à l'étoile qu'il observe, change au cours de l'année, en raison du mouvement annuel de la Terre sur l'écliptique. (cours de relativité en L3)
[16] En astronomie, la parallaxe est un effet *géométrique* dû au fait que la position de l'observateur, par rapport à l'étoile qu'il observe, change au cours de l'année, en raison du mouvement annuel de la Terre sur l'écliptique.
[17] Les rayons lumineux, issus des astres, subissent une réfraction en pénétrant dans l'atmosphère terrestre. L'indice de réfraction varie en fonction de l'altitude.
[18] Une année tropique comprend 365,24220 jours.
[19] Dans le quotidien algérien *''El Watan''* du 25 janvier 2010.

3.1. La relativité du mouvement.

Giordano Bruno[20] (1548 -1600) aborde, dès 1584 dans ''*le Banquet des cendres*'', la notion de relativité qui eut une importance énorme dans l'histoire de la physique. La science avait très peu évolué depuis Aristote. Ce dernier explique l'immobilité de la Terre, et par conséquent le système géocentrique, par l'argument du ''lancer vertical'' (fig. IV.4). Giordano Bruno rappelle cet argument :

> Selon Aristote, il serait impossible qu'une pierre jetée en l'air retombât suivant la même verticale. Le très rapide mouvement de la Terre devrait nécessairement la laisser loin derrière, du côté de l'occident[21].

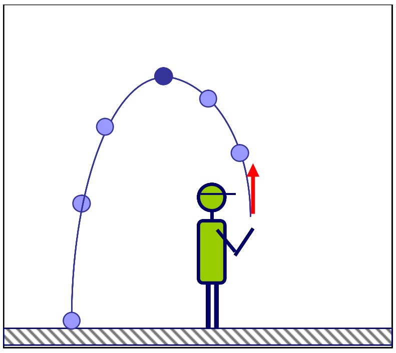


Figure IV. 4

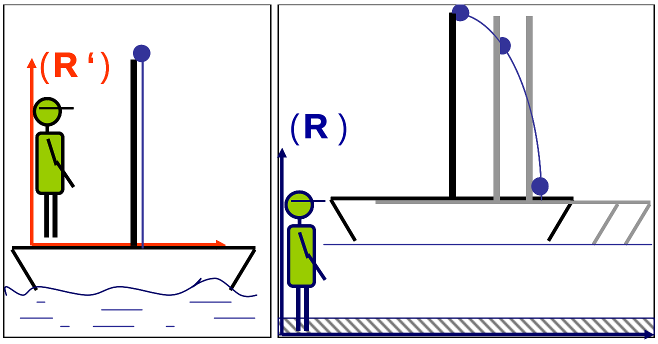


Figure IV. 5

Il réfute cet argument en faisant remarquer qu'Aristote néglige une donnée essentielle : le mouvement de la pierre a lieu sur Terre, or tout ce qui se trouve sur Terre se meut avec la Terre[22]. De la même façon, dans un navire en mouvement

> une pierre, lancée par quelqu'un qui se trouve à bord, retombera en suivant la même verticale, quelque soit la vitesse du navire et à condition qu'il ne donne pas de la gîte[23].

Comme dans le cas de la Terre, toutes les choses, qui se trouvent sur le navire, se déplacent avec lui à la même vitesse. Ainsi, l'argument d'Aristote, qui prouve l'immobilité de la Terre, ne tient plus.

Bruno aborde ensuite la notion de relativité : Il considère les mouvements de deux pierres lancées verticalement, au même instant, à partir d'un même point par deux personnes. Le premier lanceur se trouve sur le navire et le second sur la berge. Le lanceur, qui se trouve à bord du navire, verra la pierre, qu'il a lancée, retomber en suivant une même verticale, par contre, il verra la pierre, lancée par l'autre personne, retomber derrière lui.
Les deux mouvements sont décrits ici par rapport au navire : cette façon de décrire le mouvement va donner, par la suite, naissance au concept de référentiel. La figure IV. 5 montre le mouvement d'une pierre, lâchée du haut du mât, observée dans deux référentiels, le premier lié au navire et le second à la Terre.
Giordano Bruno remet en cause la science d'Aristote : la terre n'est plus le centre de l'univers, pas plus que le Soleil dans le système de Copernic. Car l'univers de Bruno est

[20] Giordano Bruno, (1548-1600) savant italien, accusé d'hérésie pour ses écrits, est condamné à être brûlé vif par l'Inquisition. On peut voir à Rome une statue de Giordano Bruno érigée en 1889 sur le lieu de son exécution.
[21] Giordano Bruno, ''*le Banquet des cendres*'' Trad Y. Hersant. Edition de l'Eclat Paris 2006 page 84.
[22] ibid page 85.
[23] C'est-à-dire : à condition que le navire ne subisse pas de secousses. La gîte : inclinaison transversale d'un navire.

infini et dans un espace infini chaque point peut être considéré comme un centre. Le vide existe et facilite le mouvement. Il ne fait aucune distinction entre mouvement naturel et mouvement forcé, il rejette le concept de lieu naturel.
Pour Alexandre Koyré, G. Bruno a *opéré une véritable révolution de l'image traditionnelle du monde. Infinité de l'univers, unité de la nature, géométrisation de l'espace, négation du lieu, relativité du mouvement : Nous sommes tout près de Newton*[24].

Giordano Bruno 1548 -1600

Galilée 1554 -1642

Cette étude du mouvement est reprise en 1632 par Galilée (1554 -1642) dans le ''*Dialogue sur les deux systèmes du monde*''[25]. Puisque tout ce qui se trouve sur Terre est emporté par le mouvement de la Terre, nous, habitants de la Terre, nous n'avons aucun moyen de détecter ce mouvement[26], *du moins tant que nous regardons les choses terrestres.*
Pour savoir si la Terre est mobile ou immobile, nous devons nous référer *aux corps séparés de la Terre,* c'est-à-dire les astres (la lune, le soleil etc.). Mais alors, qui est-ce qui tourne, la Terre ou tout le reste ?

---

[24] A. Koyré : *Etudes galiléennes* Ed. Hermann, Paris 2001, page 229

[25] Comme G. Bruno, Galilée reprend le mouvement de la chute d'une pierre du haut d'une tour sur Terre et le même mouvement du haut du mât d'un navire. Mais pour Galilée, ''*il y a une grande différence entre le cas du navire et celui de la terre*''. Comme Aristote, Galilée fait la distinction entre le mouvement naturel, donc circulaire, des astres et le mouvement dû à un élément moteur du navire. Galilée ne s'est pas débarrassé de toutes les idées aristotéliciennes, alors que Giordano Bruno les a rejetées.

[26] Galilée aborde ici la notion de ''référentiel d'inertie''. Dans le même ouvrage il revient sur cette notion lorsqu'il considère des personnes, enfermées dans une cabine sous le pont d'un navire. Ces personnes constatent que *des petites bêtes qui volent, mouches, papillons, vont à la même vitesse dans toutes les directions de la cabine*, que le navire soit immobile ou en mouvement à vitesse constante. En outre, si ces personnes ont accroché au plafond *un seau dont l'eau coule goute à goute dans un autre vase à petite ouverture placé en dessous*, elles constatent que, dans les deux cas, *les gouttes qui tombent entrent toutes dans le vase placé en dessous*. Par conséquent ces personnes n'ont aucun moyen de savoir si le navire est en mouvement ou à l'arrêt.
Nous dirons, à présent, que la cabine constitue un *référentiel d'inertie* ou *référentiel galiléen.* Ainsi, par définition, ''un référentiel dont le mouvement ne peut être mis en évidence par aucune expérience de physique est un référentiel d'inertie''.
Notons que la Terre n'est pas un repère d'inertie, en raison de sa rotation diurne et de son mouvement autour du soleil. L'expérience du pendule de Foucault, qui sera réalisée en 1851 c'est-à-dire deux siècles après la mort de Galilée, mettra en évidence le mouvement diurne de la Terre.

L'immense masse que constitue la sphère étoilée comparée à la petitesse du globe terrestre, incite Galilée à opter pour le mouvement de la Terre d'autant plus qu'il avait adopté le système héliocentrique de Copernic.
Selon Galilée, le mouvement est décelé ou repéré par rapport *''aux choses qui en sont privées''*.

Notons que, chez Galilée, la description du mouvement ne nécessite pas un repère fixe[27]. Il suffit de choisir un référentiel qui, dans le cas du problème considéré, est privé de mouvement. Ainsi le mouvement de la terre est repéré par rapport au soleil qui, dans le cas du système solaire, est fixe.
Rappelons qu'au XII^{ème} siècle, Abu'l Barakat al Baghdadi avait remarqué que le mouvement n'existe que *si les positions relatives des corps considérés, changent*. (Voir Ch III § I.1.)
La relativité galiléenne[28] ne prendra sa forme définitive qu'après les travaux de Newton. Elle sera remplacée en 1905 par la théorie de la relativité restreinte élaborée par Poincaré et Einstein.

3.2. Le principe d'inertie.

La formulation moderne du principe[29] de l'inertie, est :

> ''*Tout corps libre, c'est à dire qui n'est soumis à l'action d'aucune force, est en mouvement rectiligne et uniforme*.''

Les chinois avaient déjà énoncé ce principe depuis deux mille ans (voir Ch II § 2.2), mais ils ne l'avaient pas exploité. Les grecs ignoraient le principe de l'inertie. Un énoncé du principe de l'inertie sera donné par le savant hollandais Isaac Beeckman (1588-1637).

> Ce qui est mis en mouvement demeure en mouvement éternellement[30].

Galilée retrouve, en 1632, ce principe à partir d'une expérience de pensée, mais celle-ci n'est pas convaincante[31].
C'est Isaac Newton qui, dans les *principia* en 1687, énonce clairement le principe de l'inertie (Voir Annexe II) et l'attribue à Galilée.

---

[27] Fixe par rapport à quoi ? La théorie de la ''relativité restreinte'' montre qu'il n'existe pas, dans la nature, de repère fixe. On considère alors des référentiels d'inertie. (Voir le cours de L3)
[28] En fait, la relativité a été amorcée, comme nous venons de le voir par Giordano Bruno.
[29] Un principe ne se démontre pas. Comme un postulat ou un axiome, il est vérifié par ses conséquences.
[30] A. Koyré : *Etudes galiléennes*, page 108
[31] Galilée avait imaginé dans le ''*Dialogue sur les deux systèmes du monde*'', le mouvement d'une boule *parfaitement sphérique et extrêmement dure sur une surface horizontale plane et polie comme un miroir. Si la boule est posée à l'arrêt sur le plan, elle doit naturellement rester arrêtée. Mais si elle reçoit de l'élan dans une certaine direction, elle irait dans cette direction avec un mouvement qui ne serait ni accéléré ni retardé, puisqu'il n'y a ni montée ni descente,* donc un mouvement uniforme. *Et si l'on supposait cet espace (le plan horizontal) sans fin, le mouvement sur cet espace serait également sans fin, c'est-à-dire éternel.*
Galilée ne fait pas, ici, abstraction de la force de gravité. Celle-ci est annulée par la réaction du plan lorsque les dimensions de celui-ci sont faibles par rapport à celles de la Terre. Mais Galilée considère un plan infini tangent à la Terre, comme la force de gravité est radiale elle ne sera pas annulée loin du point de contact entre le plan et la Terre, la boule ne sera plus libre. Galilée, devant ce problème, remplace le plan infini par une sphère. La force de gravité reste constante mais le mouvement n'est plus rectiligne. (Lire à ce sujet Koyré pages 161 à 165)
Une expérience de pensée est une expérience que le savant imagine mais qu'il ne peut pas réaliser. Albert Einstein a posé, à partir d'une expérience de pensée (*Gedankenexperiment*), le postulat sur l'équivalence d'un champ de gravitation et d'un champ d'accélération. C'est sur ce postulat qu'est basée la théorie de la relativité générale.

3.3. La force centrifuge.

Christian Huygens (1629 -1695) découvre la *force centrifuge* (vis centrifuga) en donne l'expression mathématique[32] et explique la variation de l'accélération de la pesanteur *g* en fonction de la latitude du lieu. Cette variation est due à l'influence de l'accélération centrifuge qui résulte de la rotation de la Terre autour de son axe.

3.4. La naissance de la physique moderne.

La physique moderne, en tant que science basée sur les mathématiques et l'expérience, est née au début du dix septième siècle. Galilée est considéré comme le fondateur de cette science. En effet dans ''*l'essayeur*'', il écrit en 1623 :

> Le grand livre, qui est ouvert constamment devant nos yeux, je veux dire l'Univers.., est écrit en langage mathématique.

D'un autre côté, dans '' *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences*[33]''(1638), il décrit la façon dont il a mené l'expérience du plan incliné qui lui permet d'aboutir à la loi de la chute des corps. Cette expérience, que nous avons répliquée et exposée au chapitre I (§ 2.2), met en évidence la modernité de la méthode expérimentale de Galilée.
Cette méthode sera développée, au cours de ce siècle, grâce à l'invention de nouveaux instruments, en optique, en thermométrie, en hydrostatique etc.
Ainsi en 1644, l'expérience de Torricelli[34] met en évidence l'existence du vide et met fin à l'un des dogmes de la physique d'Aristote pour lequel le vide n'existe pas.

3.5. La mécanique newtonienne.

Isaac Newton (1642- 1727) a montré, à partir des travaux de Képler et de Galilée que la chute des corps sur Terre et le mouvement des planètes avaient une même origine[35] : La force de gravitation. Il donna la loi de la gravitation. En outre, il formula les principes fondamentaux de la mécanique classique: Principe de l'inertie, relation fondamentale de la dynamique, et principe de l'action et de la réaction.
Dans les Principia, ''*sûrement l'ouvrage le plus important qui fut jamais écrit en physique* [36]'', il commence d'abord par énoncer un certain nombre de définitions : la masse, la quantité de mouvement, la force d'inertie (vis insista), la force imprimée (vis impressa), la force centripète, puis il donne les caractéristiques de cette force, fait la distinction entre le poids et la masse d'un corps et donne sa conception du temps et de l'espace :

---

[32] Elle permettra à Newton d'exprimer la loi de la gravitation.
[33] Voir chapitre I
[34] Torricelli remplit de mercure un long tube en verre, le bouche, le renverse sur une cuve de mercure, puis le débouche. Le niveau du mercure descend dans le tube et se stabilise à une hauteur de 760 mm, le reste du tube est occupé par le vide. Il invente ainsi le baromètre.
Evangelista Torricelli (1608 -1647) est un physicien italien. Après la mort de Galilée en 1642, il lui succède à l'université en Toscane.
[35] Rappelons qu'Aristote considérait deux mondes (sub lunaire et supra lunaire) où les lois de la nature ne sont pas les mêmes.
[36] Stephen Hawking : *Une brève histoire du temps* page 227. Ed. Flammarion Paris 1989

> Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément.
> L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile[37].

C'est à cet espace que l'on relie, en mécanique newtonienne, un référentiel absolu. Tout repère en mouvement rectiligne est uniforme, par rapport à ce repère absolu, est un référentiel d'inertie ou galiléen.

Newton fut l'un des plus grands savants de tous les temps ; voici ce que Albert Einstein, un autre génie, a écrit à son sujet :

> Longtemps avant Newton, il y avait des esprits vigoureux qui pensaient qu'il devait être possible de donner, par des déductions purement logiques à partir d'hypothèses physiques simples, des explications concluantes de phénomènes perceptibles par nos sens. Mais Newton fut le premier à réussir à trouver une base clairement formulée, d'où il pouvait déduire un vaste champ de phénomènes, au moyen de la pensée mathématique, d'une manière logique, quantitative et en harmonie avec l'expérience.[38]

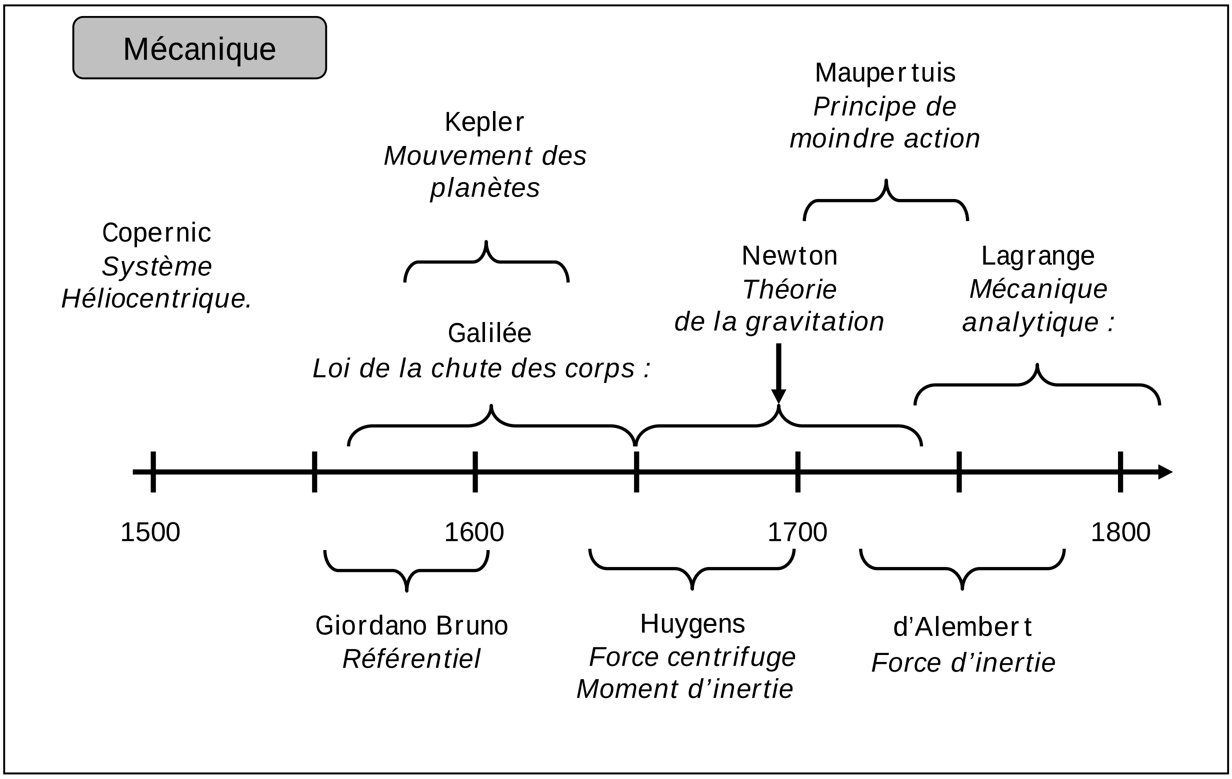


Figure IV. 6. *Évolution des connaissances en mécanique* de 1500 à 1800

Cette figure montre que le passage de la science d'Aristote à celle de Newton a nécessité plus d'un siècle et demi, de 1543 (*de revolutionibus* de Copernic) à 1687 (*principia* de Newton). Ce passage a été très difficile en raison des obstacles dressés par l'église et des objections formulées par de nombreux savants. Même ceux qui ont contribué à cette révolution

37 Cette conception de l'espace et du temps absolus sera remise en cause par la théorie de la relativité en 1905.
38 Einstein : *Conceptions scientifiques* page 155.

scientifique, étaient imprégnés par la science aristotélicienne et n'arrivaient pas à se débarrasser de certaines idées.
Pour Copernic le mouvement des astres ne pouvait être que circulaire, Tycho Brahé ne renonce pas au système géocentrique, Galilée conserve la distinction entre mouvement naturel et mouvement forcé, Descartes rejette l'existence du vide.

3.6. La mécanique la fin du XVIII^{ème} siècle.

A la fin du XVII^{ème} siècle on disposait de la mécanique de Newton, théorie complète, basée sur le concept de force, qui permet de résoudre aisément la plupart des problèmes de mécanique mais qui devient moins facile à manier lorsque les problèmes se compliquent.
Les mathématiciens et physiciens du dix huitième siècle, d'Alembert, Euler et Lagrange notamment, vont reformuler les lois de la mécanique, en utilisant le calcul intégral et différentiel qui a fait, depuis Newton et Leibniz, d'énormes progrès.
Ainsi, la mécanique analytique, due aux travaux de Maupertuis, Euler, et Lagrange[39], constitue une méthode très puissante de résolution des problèmes de la mécanique, méthode qui a été généralisée à toute la physique[40].

4 . L'OPTIQUE. (Ce paragraphe n'est pas au programme du L1)

Comme nous l'avons vu, l'étude de la lumière a, depuis l'antiquité, suscité l'intérêt des savants, mais ce n'est qu'à partir du dix septième siècle qu'une étude approfondie de l'optique fut menée par de nombreux physiciens, dont Isaac Newton et Christiaan Huygens.

4.1. Les précurseurs de Newton et d' Huygens

Les lois de l'optique géométrique, ébauchées dans l'antiquité et au moyen âge, seront définitivement énoncées au cours du dix septième siècle. En effet l'œuvre d'Ibn Al Haythem a inspiré le savant polonais Vitellion (1230-1300).
En 1604 Képler écrit un livre intitulé ''*les paralipomènes à Vitellion* ''[41]. A partir des travaux de Képler, le savant hollandais W. Snell donne en 1620 la loi de la réfraction. Une dizaine d'années plus tard, René Descartes retrouve cette loi.
Pierre de Fermat, célèbre mathématicien énonce un principe d'économie naturelle appliqué à l'optique : *La durée du trajet d'un rayon lumineux, à travers différents milieux, est minimale*[42]. Toutes les lois de l'optique géométrique peuvent être démontrées à partir de ce principe.
Au milieu du siècle, Francesco Grimaldi[43] découvre un phénomène nouveau qu'il appelle ''*diffraction de la lumière*''.
Robert Hooke[44], observe au microscope, instrument qu'il venait d'inventer, des franges et des anneaux colorés, obtenus dans des lames minces, à partir de la lumière blanche. Ce

---

[39] Au milieu du dix neuvième siècle, Les travaux de Hamilton, Jacobi et Poisson achèveront la construction de la mécanique analytique.
[40] Elle est utilisée en électromagnétisme par Maxwell, en relativité par Poincaré et a permis de développement de la mécanique quantique.
[41] Johannes Kepler : ''*les paralipomènes à Vitellion*'' (1604) Les fondements de l'optique moderne : Trad, introd, et notes de Catherine Chevalley Ed ; Vrin Paris 1980.
[42] C'est à partir du principe de Fermat que Maupertuis (1698-1759) énonce, en 1744, le célèbre principe de moindre action.
[43] Les travaux de Grimaldi sont publiés en 1665 dans un ouvrage posthume intitulé : "*Physico-mathesis de Lumine, coloribus et iride'.'*
[44] Hooke (1635 - 1703) est connu pour avoir découvert la loi de l'élasticité en1660 (*loi de Hooke*).

phénomène sera étudié par Newton. Selon Hooke la lumière serait *due à un mouvement vibratoire de la matière*
En 1669, le savant danois Erasme Bartholin (1625-1698) découvre, à partir d'expériences sur des cristaux de spath d'Islande, un ''étrange phénomène'' qu'il appelle *biréfringence*.

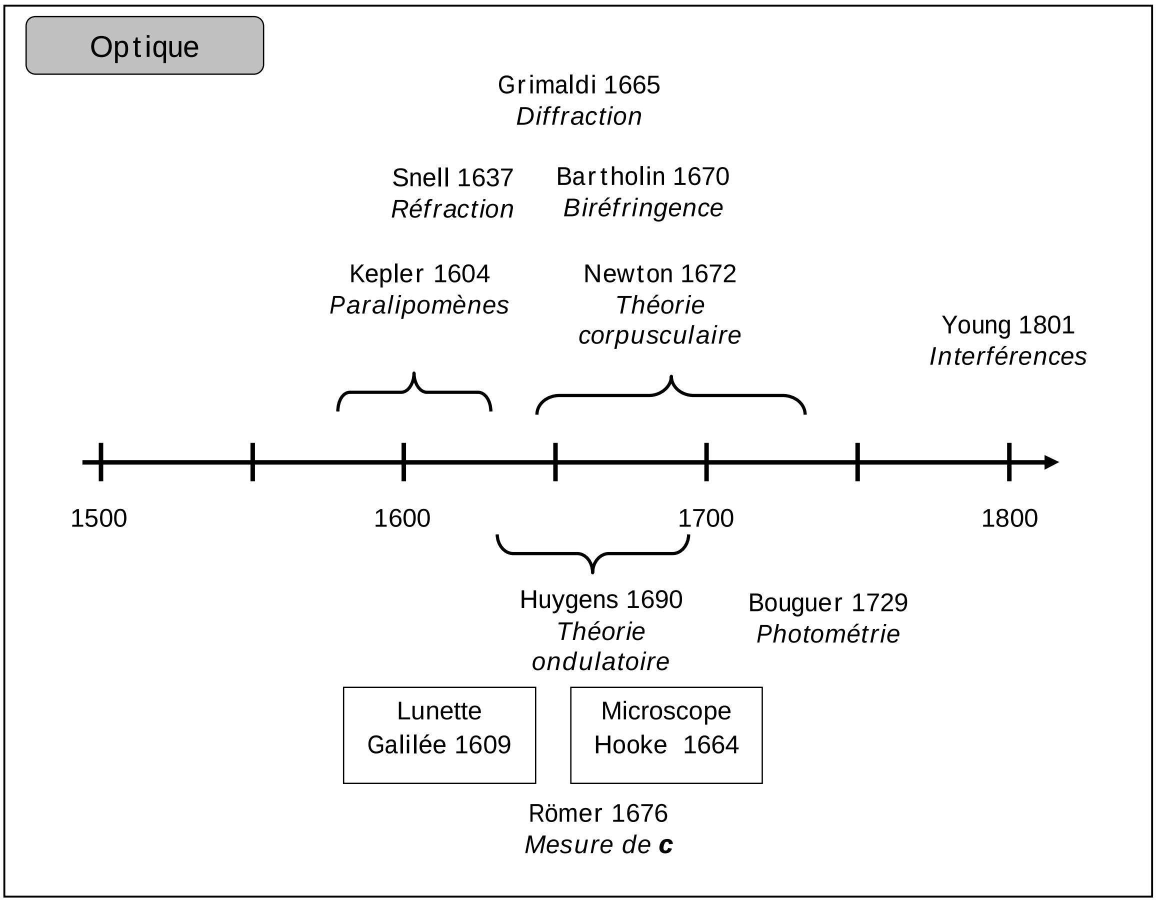


Figure IV. 6. *Évolution des connaissances en optique* de 1600 à 1800

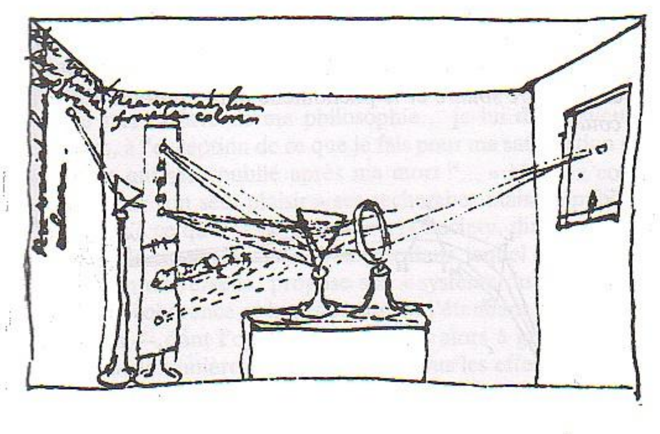
Toutes ces découvertes vont permettre à Isaac Newton et Christian Huygens d'élaborer, chacun de son côté, deux théories contradictoires sur la nature de la lumière.
Newton suppose que la lumière est formée de corpuscules en mouvement dont les trajectoires constituent les rayons lumineux.

Isaac NEWTON 1642-1727 Christiaan HUYGENS 1629-1695

Huygens, quant à lui, rejette cette théorie et, en procédant par analogie avec les ondes sonores, il propose une théorie ondulatoire de la lumière.

4.2. La théorie de Newton.

Les travaux de Newton relatifs à l'optique sont rapportés dans un ouvrage intitulé *Opticks*[45]. Il explique la réfraction par l'existence d'une force d'origine gravitationnelle, qui agit, à l'interface des deux milieux, sur les particules de lumière. Il retrouve la loi des sinus et montre que la vitesse est d'autant plus grande que le milieu est dense. Il découvre le phénomène de dispersion en opérant comme Grimaldi dans une chambre noire.



Dessin autographe de I. Newton montrant l'expérience cruciale sur les couleurs (le second prisme ne décompose pas la lumière monochromatique qu'il reçoit).

Figure VII. 4

Maitte: *la Lumière* page 119

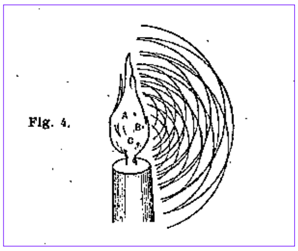
Il montre, à partir de la décomposition, à l'aide d'un prisme, de la lumière blanche émise par le soleil, que celle-ci se compose des ''sept'' couleurs de l'arc en ciel. Il relie chaque couleur de la lumière à un degré de réfrangibilité du prisme ; autrement dit, l'indice de réfraction du milieu varie en fonction de la couleur de la lumière. Inversement le mélange de toutes ces couleurs donnent une lumière blanche.
Ce phénomène lui permet d'expliquer la formation d'un arc en ciel : celui-ci résulte de la dispersion de la lumière solaire par les gouttes de pluie, puis Newton donne les conditions dans les quelles il peut être observé.
Newton entreprend des expériences en lumière monochromatique. A cet effet, à l'aide de diaphragmes, il isole, sur un spectre obtenu à sortie d'un prisme, une lumière monochromatique qu'il envoie sur un autre prisme et constate qu'elle n'est plus décomposée.
Il donne une explication de la vision : Les corpuscules de lumière en tombant sur la rétine la font vibrer de la même façon qu'une pierre, en tombant sur la surface d'une eau calme, entraîne la formation d'ondes. Les vibrations de la rétine sont transmises au cerveau à travers le nerf optique
Il explique la vision des couleurs : Les corpuscules de lumières sont de grosseurs différentes, en excitant la rétine, les plus petites donnent une sensation de violet et les plus grosses une sensation de rouge.
En ce qui concerne la biréfringence, Newton rapporte les expériences de Bartholin, d'Huygens puis les siennes. Il suggère l'idée d'une *polarisation* des particules lumineuses à l'image de petits aimants. Cette idée sera reprise par Malus au XIXe siècle.

[45]Newton Isaac : *Opticks* Ed. Sam Smith London 1704 (BnF Gallica)

4. 3. La théorie d' Huygens.

En 1691 Huygens publie le *Traité de la lumière*[46] dans lequel il expose ses travaux en optique. On y trouve les phénomènes de propagation, de réflexion et de réfraction et de biréfringence. Mais il n'étudie ni la diffraction ni la dispersion.

La figure ci-contre, extraite du *''Traité de la lumière''* d'Huygens, montre que chaque point de la flamme se comporte comme une source de lumière ponctuelle. Celle-ci émet dans l'espace des ondes sphériques.



Un raisonnement par analogie avec les ondes sonores Huygens l'amène à opter pour une théorie ondulatoire de la lumière. Mais le son ne se propage pas dans le vide et nécessite un milieu. La vitesse de propagation du son dans un milieu est finie, et plus le milieu est rigide plus la vitesse est grande. La vitesse de la lumière est, elle aussi, finie, l'astronome Roemer l'a mesurée, en 1676, à partir d'observations astronomiques. Or la lumière se propage dans le vide, les expériences de Boyle l'ont confirmé.
Pour expliquer la propagation de la lumière dans le vide et sa très grande vitesse, Huygens construit un modèle d'éther mécanique dont les particules sont douées d'une très grande élasticité et d'une très grande dureté.
Pour expliquer les lois de la réflexion et de la réfraction, il raisonne sur des surfaces d'ondes qui, dans le cas de faisceaux de lumière parallèles sont des plans. Ce raisonnement lui permet de démontrer que *la vitesse de la lumière dans un milieu plus dense que l'air est inférieure à celle que l'on obtiendrait dans l'air.*
Huygens justifie, à l'aide de sa théorie, le principe de Fermat.

Cette théorie ondulatoire lui permet d'expliquer certains phénomènes étranges analogues aux mirages. La variation de la densité de l'air en fonction de la température et de l'altitude, entraîne une déformation de la surface d'onde et par conséquent une courbure des rayons lumineux.

4. 4. L'optique à la fin du XVIII^{ème} siècle .

A la fin du dix septième siècle[47], les lois de l'optique géométrique étaient bien établies, les phénomènes de diffraction, de dispersion, de biréfringence étaient connus, mais les lois qui les régissent ne seront énoncées qu'au dix neuvième siècle.
Car si l'outil expérimental permettait des mesures suffisamment précises pour faire de grandes découvertes, l'outil mathématique était rudimentaire. Les démonstrations étaient basées essentiellement sur la géométrie euclidienne qui ne permettait pas aux savants d'aller plus loin. Le calcul intégral et différentiel, qui venait d'être inventé par Newton et Leibnitz[48], n'était pas assez performant pour résoudre les problèmes d'interférences et de diffraction. Il sera développé par les mathématiciens du dix huitième siècle et servira aux physiciens du dix neuvième.
Au début du dix neuvième siècle, deux théories de la lumière étaient avancées, celle de Newton et celle d'Huygens, la première fut privilégiée, durant deux siècles, en raison de la notoriété de son auteur, jusqu'à ce que l'expérience de Foucault vienne, en 1850, trancher en faveur de la théorie ondulatoire : La vitesse de la lumière est plus faible dans l'eau que dans l'air.

[46] Huyghens Christian : *Traité de la lumière* 1691 Ed. Gauthier-Villars Paris 1920
[47] Le dix huitième siècle a vu très peu de découvertes en optique, Bouguer découvre la photométrie et Bradley l'aberration de la lumière.
[48] Voir dans ce chapitre le paragraphe 5. 6.

5 . LES MATHEMATIQUES.

5.1 Algèbre :

Au seizième siècle l'algèbre fut l'œuvre des mathématiciens italiens. L'équation du 3$^{\text{ème}}$ degré fut définitivement résolue par Tartaglia et Cardan[49] (Ars magna 1545). Bombelli publie en 1572 un traité d'algèbre, intitulé ''*Algebra*'' qui rassemble toutes les connaissances en algèbre de cette époque.

Rafael BOMBELLI 1526-1572

$5x \rightarrow \underset{5}{\overset{1}{\smile}}$ $\qquad 3x^2 \rightarrow \underset{3}{\overset{2}{\smile}}$

$\sqrt[3]{4+\sqrt{6-2}} \rightarrow$ Rc [4 p Rq [6 m 2]]

$3x^2+5x = 2 \rightarrow \underset{3}{\overset{2}{\smile}}$ p $\underset{5}{\overset{1}{\smile}}$ Eguale à $\underset{2}{\overset{0}{\smile}}$

Ecriture des expressions algébriques au XVI s

Les notations en algèbre :
A cette époque, l'inconnue n'était pas représentée explicitement, mais sous entendue, comme le montrent les notations de Bombelli représentées ci-dessus. Puis dès la fin du XV$^{\text{e}}$ siècle, les notations, que nous utilisons actuellement, ont été progressivement introduites.

Signes & symboles	Introduits par	dates
+ et – plus et moins	Johann Widmann	Vers 1490
= égal	Robert Record	Début du XVI$^{\text{e}}$ siècle
$\sqrt{\ }$ racine	Stiffel	Début du XVI$^{\text{e}}$ siècle
x multiplication	William Oughtred	Vers 1630
÷ division	Johann Rahn	Vers 1650

François Viète[50] introduit en 1591 un symbolisme en algèbre en utilisant des voyelles pour représenter les inconnues et des consonnes pour les paramètres. La contribution de Viète constitue une étape décisive en algèbre, car non seulement il propose une notation plus pratique, mais, en remplaçant par des lettres les nombres qui représentaient les paramètres, il généralise l'équation et introduit l'abstraction en algèbre. Avec Descartes on arrive, en 1637, aux notations modernes : *x, y, z* qui désignent les inconnues et *a, b, c*.. les paramètres.

[49] Jérome Cardan (1501-1576) mathématicien italien. Il invente le cardan (Voir : Ch. III, § IV)
[50] François Viète (1540/1603)

5. 2. Les nombres complexes.

Les nombres complexes ont été introduits, au XVIième siècle, par Bombelli lors de la recherche des solutions de l'équation du troisième degré[51].

$$X^3 - 15X - 4 = 0$$

Bombelli connaissait la solution évidente $X = 4$. Pourtant l'équation auxiliaire qui apparaît dans la méthode de Cardan :

$$Z^2 - 4Z + 125 = 0$$

n'a pas de solution et donne des '' *nombres impossibles* '' :

$$Z_1 = 2 + 11\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Bombelli a néanmoins poursuivi ses calculs et a constaté que les termes gênants, où apparaît la racine carrée d'un nombre négatif, disparaissent dans le calcul de *X*. Il a pu ainsi retrouver la solution $X = 4$. Bombelli disait :

> « de l'avis de beaucoup, c'était une idée insensée, et moi-même je fus longtemps de cette opinion ; toute la question semblait reposer sur un sophisme[52] plutôt que sur la réalité ; cependant, je cherchais jusqu'à ce que j'eusse prouvé que c'était bien la vérité [53]».

C'est cette contradiction entre une méthode mathématique, proposée par Cardan, et son application pratique qui a permis d'aboutir à l'une des plus grandes découvertes en mathématiques : celle des nombres complexes.
Ces nombres découverts au XVIième siècle furent longtemps mésestimés par les mathématiciens. Au XVIIIième siècle Euler écrivait encore:

> '' de ces nombres nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement, les rend imaginaires ou impossibles'

Mais ils furent néanmoins utilisés : Euler introduit en 1777 la notation

$$i = \sqrt{-1}$$

et, en 1748 , il donne la célèbre formule :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

La notation $a + ib$ est due à d'Alembert.
Un grand pas fut franchi par les mathématiciens Caspar Wessel[54] en 1797, et Jean Robert Argand[55], en 1806, lorsqu'ils trouvent, indépendamment l'un de l'autre, la représentation géométrique des nombres complexes.

5.3. Les géométries.

A partir du dix septième siècle, plusieurs géométries se sont développées en plus de celle d'Euclide:

La géométrie analytique, introduite par Fermat et Descartes au début du XVIIème siècle, a permis de traiter la géométrie à l'aide de l'algèbre. Selon Maxwell.

---

[51] La méthode de résolution de l'équation du 3ème degré a été trouvée par Jérome Cardan (1501-1576).
[52] Raisonnement, qui partant de prémisses vraies et obéissant aux règles de la logique, aboutit à une conclusion inadmissible.
[53] Cité par Cauty André : *Regards croisés sur la droite réelle* Amérindia N° 17 pages 173-180 , 1992 http://www.vjf.cnrs.fr
[54] Le travail de Caspar Wessel, présenté devant l'Académie des sciences de Copenhague en 1797, est passé inaperçu durant un siècle, il a été publié en 1897 à Copenhague et Paris
[55] Argand a utilisé un raisonnement par analogie (Voir Bendaoud).

« l'introduction des axes de coordonnées en géométrie a été un des plus grand progrès fait dans les mathématiques car elle a ramené les méthodes de la géométrie à des calculs portant sur des quantités numériques, ceci permet d'appliquer l'algèbre à l'étude des courbes''[56]

Le mot ''*coordonnées*'' est introduit par Leibnitz en 1692.

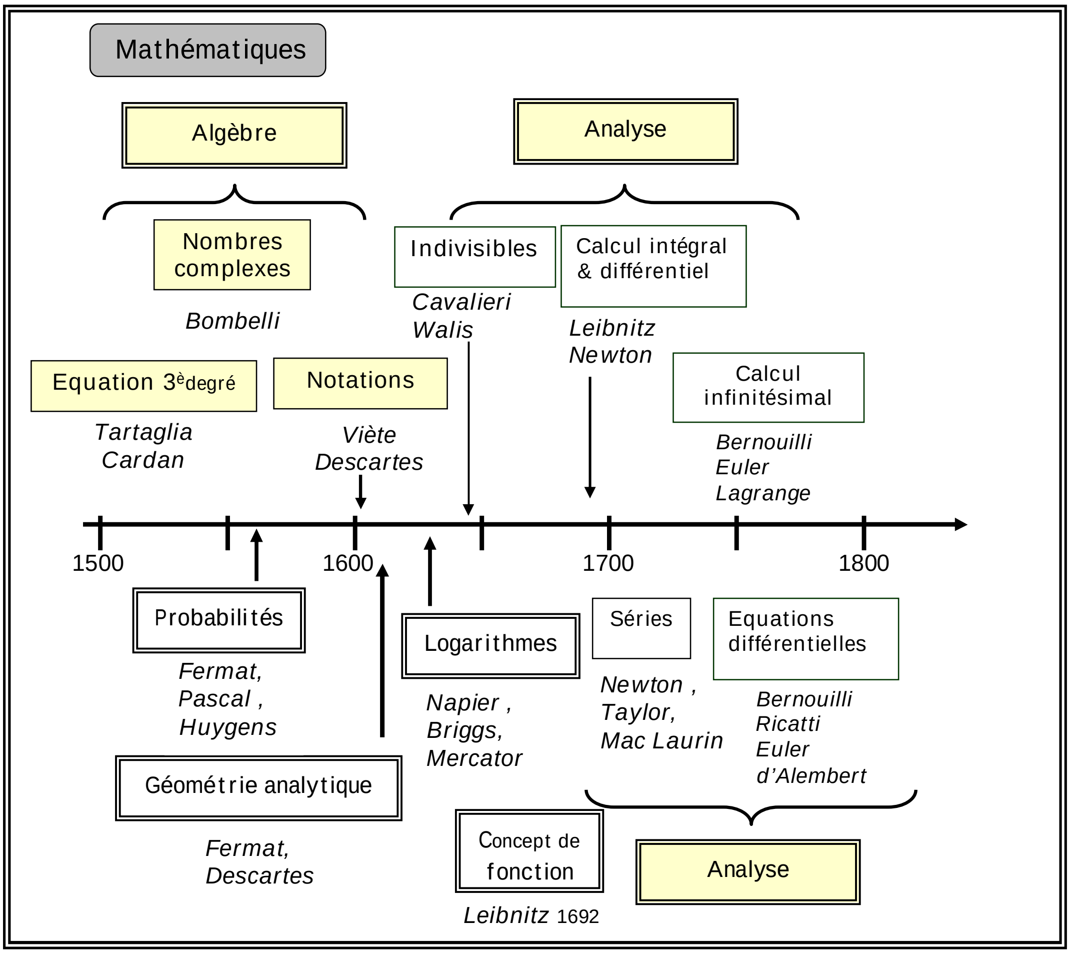


Figure IV. 8. *Évolution des connaissances en mathématiques* de 1500 à 1800

La géométrie projective, créée à cette époque par Desargues, est basée sur le postulat selon lequel :

'' *Deux droites parallèles ont un point commun à distance finie*''.

Cette géométrie inspira les peintres de la Renaissance. Elle est reprise et développée au XIXème siècle par Poncelet qui introduit les points à l'infini.
Puis il y eut d'autres géométries :

La géométrie descriptive de Monge.

Les géométries non euclidiennes de Lobatchevski, Bolyai et de Riemann (Voir Ch I, § 3.1).

56 Maxwell J.C: '*Traité d'électricité et de magnétisme*' Trad. Seligman Lui, Ed. Gauthier Villars Paris 1885 Tome I , § 10, page 9.

5.4. Les logarithmes et le nombre e .

Le mathématicien écossais John Napier[57] (1550/1617) introduit les logarithmes en 1614, dans le but de faciliter les calculs numériques. Le calcul d'un produit se réduit à une somme, celui d'un quotient à une différence et celui d'une extraction d'une racine à une division. Dès 1544, Stifel avait déjà associé à la suite arithmétique de raison 1, une suite géométrique de raison 2 :

Suite arithmétique	0	1	2	3	.... n
Suite géométrique	$1 = 2^0$,	$2 = 2^1$,	$4 = 2^2$,	$8 = 2^3$	.... 2^n

On peut alors écrire $\log_2(2^n) = n$ soit dans le cas général $\log_a(a^n) = n$

Neper considère alors toutes les valeurs comprises entre deux valeurs entières et aboutit à une fonction logarithmique de x

Les logarithmes de base 10 sont dus à Henry Briggs collaborateur de Napier.
Les logarithmes de base e seront introduits à partir de l'intégration de la fonction $1/x$. Le mathématicien belge Grégoire de Saint Vincent (1584-1667) établit le lien entre l'aire sous l'hyperbole qui représente la fonction $1/x$ et une fonction logarithmique de base e.
Ce nombre e est tel que l'aire sous la courbe, entre $x = 1$ et $x = e$, soit égale à 1
C'est ainsi qu'un nouveau nombre apparait en mathématique. Euler l'appellera, un siècle plus tard, e. Ce nombre peut être calculé de différentes façons :

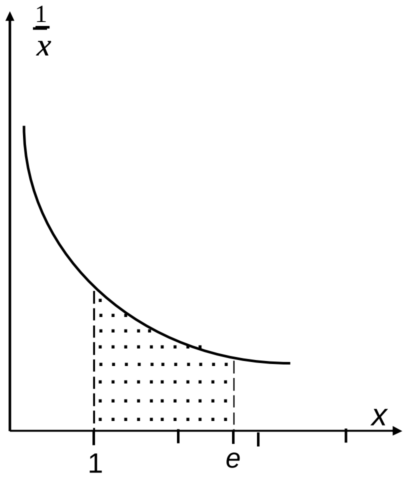


Figure IV. 9

Jacques Bernouilli, à partir de calculs d'intérêts composés, aboutit à l'expression

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Quelques années plus tard, Euler s'intéresse à ce nombre et trouve une autre façon de le calculer. Il aboutit à la série :

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} .+ ...... + \frac{1}{n!}$$

En mathématiques, les nombres e et π sont des nombres transcendants[58].

---

[57] Appelé Néper de son nom latinisé Neperus.

[58] Un nombre transcendant est un nombre qui n'est la racine d'aucun polynôme à coefficients *entiers*. La transcendance de e a été démontrée par Hermite en 1872 et celle de π par Von Lindemann en 1882.

Euler découvre la formule mathématique :

$$e^{(i\pi)} + 1 = 0$$

Cette expression ne finit pas de fasciner tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques. Elle relie les nombres sur lesquels sont basées les mathématiques :
Les deux nombres transcendants e et π, le zéro, introduit au moyen âge, le nombre un, et le nombre imaginaire i .

5.5. Les probabilités.

Au début du XVII siècle, Pascal s'intéresse à l'étude des jeux de hasard, il s'agit de trouver les résultats possibles que l'on obtient lors de lancers de dés. A cet effet, il entreprend une correspondance avec Fermat afin d'assurer au calcul des probabilités une assise mathématiques.
Huygens publie en 1657 le premier ouvrage sur le calcul des probabilités[59]. Ce calcul sera par la suite perfectionné par les Bernoulli[60] , puis, à la fin du XVIIIème siècle, il sera appliqué par Laplace à la statistique et aux calculs d'erreurs.

5.6. Calcul intégral & différentiel.

Initialement, le calcul intégral et différentiel avait pour objectifs :
1°) Le calcul des surfaces et des volumes.
2°) La détermination des tangentes aux courbes.

Dans la Grèce antique, ce problème avait déjà été abordé par Eudoxe de Cnide, qui a introduit la méthode d'exhaustion, et Archimède qui a appliqué cette méthode au calcul des surfaces[61]. En outre Archimède s'est intéressé au problème de la tangente à la spirale.

Au début du XVII siècle, Cavalieri[62] introduit la méthode des *indivisibles* pour le calcul des surfaces planes.

Cette méthode consiste à comparer la surface à mesurer à une surface dont l'aire est connue. Chaque surface est considérée comme la juxtaposition de lignes parallèles, appelées indivisibles. Si la somme des longueurs des lignes l_1 et celle des longueurs l_2 sont égales, les aires S_1 et S_2 des deux surfaces sont égales. Dans le cas général[63], on a, en écriture moderne :

$$\frac{\sum l_1}{\sum l_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Cette méthode fut perfectionnée par d'autres mathématiciens dont Wallis qui, a trouvé une expression de π sous la forme d'un produit infini:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}....$$

---

59 *''Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés''* 1657.
60 Les Bernoulli sont des mathématiciens suisses. Ils constituent une famille de huit mathématiciens célèbres des XVIIème et XVIIIème siècles.
61 Voir Ch II § 3.4.
62 Francesco Bonaventura Cavalieri (1598/1643) est un mathématicien italien disciple de Galilée.
63 Pour plus de détails voir Baumann et al. pages 108 à 114.

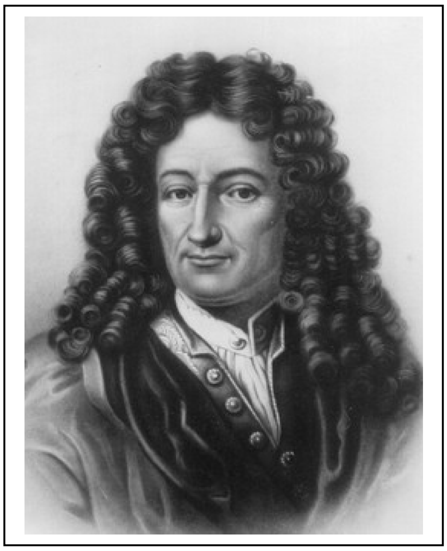
Newton, après avoir lu les ouvrages de ses prédécesseurs, aborde le calcul infinitésimal sous un aspect cinématique : il assimile l'évolution d'une variable x au déplacement continu d'un mobile et sa variation dans le temps à la vitesse de ce mobile :

> Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu.[64]

Il appelle *fluente* la variable x et *fluxion* , sa vitesse d'accroissement notée $\dot{x}$. Cette méthode lui permet de déterminer la tangente en un point (x,y) d'une courbe. Il assimile la courbe, décrite par ce point, à la trajectoire d'un mobile qui à un instant se trouve en (x,y) et à un instant infiniment voisin en $(x+\dot{x}\,,y+\dot{y})$. Il en déduit les positions, sur la courbe, des maximums, des minimums et des points d'inflexion.
Il utilise également les fluentes et les fluxions pour le calcul des surfaces. Ainsi pour avoir l'aire z sous une courbe, de l'origine à un point (x,y), il considère l'équation *fluxionnelle* :

$$\dot{z} = y\dot{x}$$

Il propose des règles qui permettent de trouver la fluxion d'une fluente (dérivation) et de calculer la fluente à partir de la fluxion (calcul d'une primitive ou intégration), puis il donne quelques exemples.



Gottfried Leibnitz 1646 - 1716

Leibnitz considère qu'une variable x , est formée d'une suite d'éléments infiniment petits dx qu'il appelle ''*différentielle*'' de x : c'est la différence entre deux valeurs successives de x.
Par conséquent x est la somme des différentielles dx , il choisit la notation

$$\int$$

pour représenter la somme:

$$x = \int dx$$

Le mot '' intégrale'' est dû à Jean Bernoulli.

Pour expliquer la notion '' d'infiniment petit'', Leibnitz procède par analogie :

La différentielle dx est à la variable x ce que le point est à la droite[65].

[64] Newton : ''*Traité de la quadrature des courbes*'' cité dans : Delachet *L'analyse mathématique,* page 32 .
[65] En ce qui concerne le raisonnement par analogie en mathématique, voir Bendaoud *Epistémologie & Histoire de la physique.* Chapitre IV .

Leibnitz remarque que le problème de la tangente à la courbe représentative de la fonction[66] $y(x)$ dépend du rapport des différentielles dy et dx des ordonnées et des abscisses:

$$\frac{dy}{dx}$$

La méthode de Leibnitz ne nécessite aucun support géométrique. Ainsi pour calculer la ''dérivée'' de la fonction $y = x^2$, il écrit[67] :

$$dy = (x+dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2$$

En négligeant le dernier terme, il vient : $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

Face aux critiques, Leibnitz n'arrive pas à justifier cette approximation[68].

Comme Newton, Leibnitz donne de nombreux exemples de dérivation et d'intégration, en particulier la règle de dérivation d'un produit qui porte son nom :

$$d(x.y) = x.dy + y.dx$$

Leibnitz et Newton ont découvert, indépendamment l'un de l'autre, le calcul infinitésimal, cependant il y eut une controverse[69] au sujet de la priorité de cette découverte. Cette controverse envenima les rapports entre les mathématiciens anglais et continentaux. Ces derniers, notamment les frères Jacques et Jean Bernoulli puis Leonhard Euler, développèrent la méthode de Leibnitz qui fit d'énormes progrès au cours du XVIII^eme^ siècle. Guillaume de l'Hôpital, élève de Jean Bernoulli, publie en 1696 un ouvrage ''*Analyse des infiniment petits*'', où il fait le point sur les connaissances de l'époque.
Les méthodes de résolution des équations différentielles, selon l'expression de Leibntz[70], et celles des équations aux dérivées partielles feront d'énormes progrès au cours du XVIII^ème^ siècle grâce à Bernoulli, Riccati, Euler, d'Alembert (équation des cordes vibrantes) etc..
Les séries vont faire l'objet de nombreuses études de la part des mathématiciens de cette époque, Lagrange *en fait même le fondement de toute l'analyse*[71] dans son ouvrage ''*Théorie des fonctions analytiques*'' .

---

[66] Le concept de fonction a été introduit par Leibnitz en 1694 et sera défini par Jean Bernoulli qui adopte la notation Φx. (Itard *Histoire des mathématiques* page 34).

[67] Newton calcule de la même façon la ''dérivée'' de $y = x^n$ à partir de la formule du binôme qu'il venait de trouver. Il note $\dot{y}o$ et $\dot{x}o$ les accroissements infiniment petits de y et x ; le symbole o représente un intervalle de temps infiniment petit. Comme Leibnitz, il est amené à faire les mêmes approximations et trouve :

$$\dot{y} = n\,x^{n-1}\,\dot{x}$$

[68]. Les concepts d'infiniment petits, de limite et de continuité seront clairement définis par les mathématiciens du XIX^ème^ siècle dont Augustin Louis Cauchy et Karl Weierstrass.

[69] Stephen Hawking fait une description peu flatteuse de l'homme qu'était Newton. Celui-ci passa une partie de sa vie à se disputer avec d'autres savants dont l'astronome John Flamsteed et Leibnitz. Une querelle, au sujet de la priorité de la découverte du calcul intégral et différentiel, éclata entre Newton et Leibniz. *Leibniz commit la faute d'en appeler à la Royale Society* dont le président n'était autre que Newton. Ce dernier désigna les membres de la commission d'arbitrage qui accusa Leibniz de plagiat. ''*Après la mort de Leibniz, on raconte que Newton déclara avoir éprouvé une grande satisfaction d'avoir brisé le cœur de Leibniz*''. Hawking ' *Une brève histoire du temps''* p 228. Ed. Flammarion Paris 1989
Hawking, né en 1942, a occupé en 1979, à l'Université de Cambridge, la chaire de ''Lucasian Professor of mathematics'' dont Isaac Newton a été le titulaire au XVII^ème^ siècle.

[70] Itard page 39.

[71] Itard page 37.