

1

1. INTRODUCTION

Les équations d'un problème de mécanique des fluides sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Ces équations sont résolues à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs techniques numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis et méthodes spectrales. La méthode des volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, et celle que nous allons décrire, pour les différents avantages qu'elle offre, en particulier :

- les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique ;
- sa robustesse numérique, sa maniabilité et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

2. FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION

Le comportement du fluide est régi par les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse, les équations sont données ci-dessous dans le cas de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide newtonien incompressible (en absence de toutes formes de génération interne de chaleur), en fonction des variables primitives, c'est-à-dire des deux composantes du vecteur vitesse u et v (suivant la direction x et y , respectivement) et de la pression p . Elles s'expriment comme suit :

2.1. Equation de masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

2.2. Equation de la quantité de mouvement :

Suivant la direction x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Suivant la direction y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (3)$$

2.3. Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Où : u , v sont respectivement les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse, p le champ de pression, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosité cinématique, g le champ de gravité terrestre, $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ la diffusivité thermique.

Pour simplifier la présentation, les équations de conservation sont traduites mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (5)$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire, $\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \phi)$, représente l'accumulation de ϕ dans le temps. Le second, $\nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi)$, représente le transport de ϕ par convection. Dans le second membre, le premier terme, $\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$, correspond au transport de ϕ par diffusion, et le dernier, S_ϕ , terme source, la production locale de ϕ . Les termes : ϕ , Γ et S_ϕ sont expliqués en détail dans le tableau 1.

Tableau 1 : Expressions de ϕ, Γ et S_ϕ pour les équations de conservation.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	u	μ	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement suivant Y	v	μ	$-\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g$
Energie	T	$\frac{\lambda}{c_p}$	0

3. LA METHODE DES VOLUMES FINIS

3.1.Principe

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles offrent l'avantage de pouvoir être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de la divergence. Le principe de conservation est la loi fondamentale de la méthode des volumes finis. Il stipule que la variation d'une propriété dépend du flux net traversant la frontière S qui enveloppe le volume Ω . La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par Godunov [1] et Glimm [2], puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par Patankar & Spalding [3] dans les années 70 et est discuté en détail par Patankar [4] en 1980. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

Comme il est montré dans la figure 1, le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille dimensionnelle (uniforme ou non) dans les deux directions et orienté positivement vers la droite (Est) et vers le haut (Nord) respectivement. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P , on choisit une nomenclature adaptée au principe de la méthode de volumes finis pour le stockage des variables dans notre maillage et tout cela dans le but de rendre les choses plus faciles dans la suite de la discrétisation. On considère, donc, l'élément P comme indiqué sur la figure 3.1, et on note que les indices

majuscules (E, W, N, S) caractérisent les variables ayant trait aux centroides voisins de P , et les minuscules (e, w, n, s) sont ceux qui nous ramènent aux faces de l'élément.

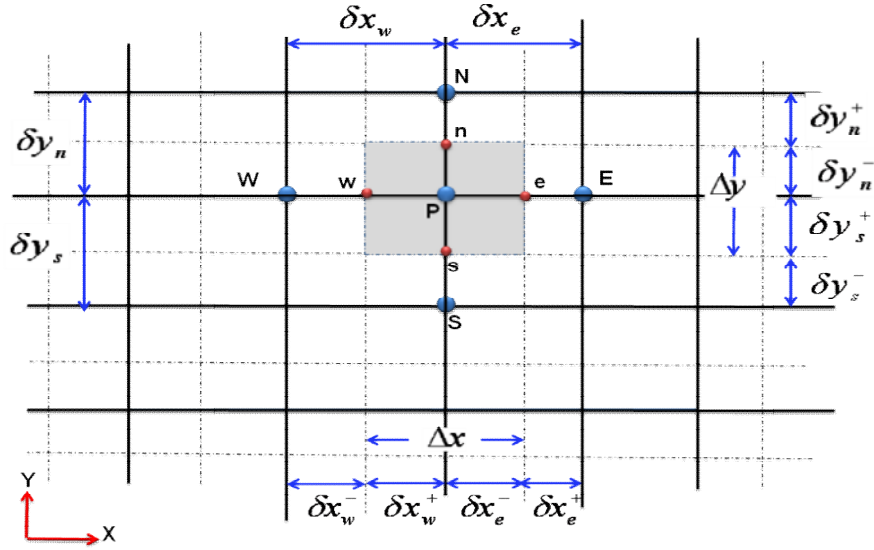


Figure 1 : Volume de contrôle dans le cas de 2D.

3.2. Maillage décalé

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes (u_e, u_w, v_n, v_s). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes à cause de la répartition de pression ou de vitesse en "damier" (un champ de pression oscillatoire dans un maillage collocatif, (figure 2a) [5] est vu comme un champ uniforme). Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid" (figure 2b). Cependant, des méthodes récentes ont été proposées sur des maillages collocatifs par Rhie & Chow [6] qui éliminent les problèmes d'oscillations néfastes au moyen d'interpolation appropriée [7].

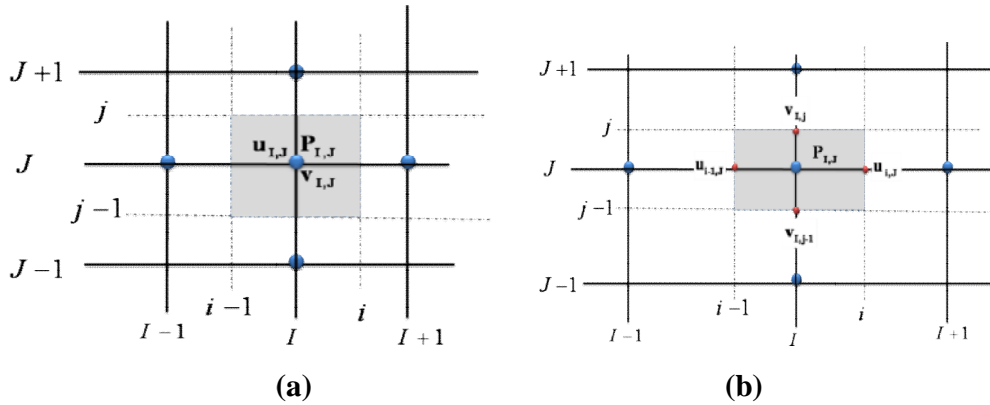


Figure 2 : Maillage de la formulation vitesse-pression : (a) maillage collocatif ; (b) maillage décalé.

On décompose le maillage principal (figure 1) en trois maillage secondaires. Un maillage principal est construit pour calculer la pression, la température, la densité (P, ϕ, ρ) et pour l'équation de conservation de masse (au centre de chaque volume de contrôle). Deux maillages décalés vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisés pour le calcul des vitesses (u, v) dans les deux directions (sur les faces du volume de contrôle), c'est-à-dire que les inconnues du problème ne sont pas toutes calculées sur le même maillage de calcul. On peut employer pour des variables différentes des maillages différents, des volumes de contrôle différents, des points de stockage différents. L'arrangement relatif aux différentes variables est schématisé sur la figure 3.

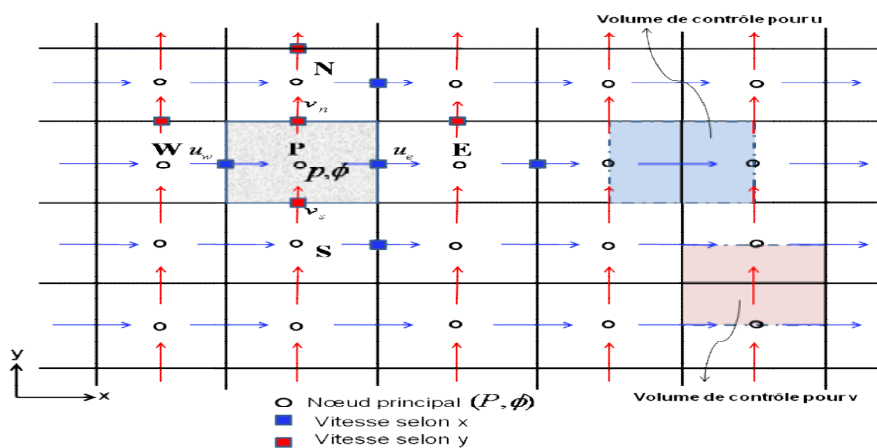


Figure 3: Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses.

Finalement, on décompose le maillage principale (fig. 3) en trois maillage secondaires, un pour les quantités scalaires (P, ϕ) et pour l'équation de conservation de masse et deux autres pour les deux composantes de la vitesse (u, v).

Figure : volume de contrôle pour la composante u et ces voisines.

Figure : volume de contrôle pour la composante v et ces voisines.

Le maillage décalé a été proposé par Harlow et Welch [5] en 1965 pour la méthode MAC (Marker And Cell) qui était destinée à la simulation numérique de l'écoulement à surface libre. Ce maillage est très ramassé au sens où les vitesses discrètes sont disposées de manière rapprochée autour des nœuds de pression. Il donne lieu à des approximations compactes qui font intervenir des points très voisins. Le maillage décalé jouit de propriétés de convergence spatiale qui en font un maître choix [4].

3.3. DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale (5) est intégrée dans le temps sur le volume de contrôle Ω_{cv} entourant le nœud courant P , on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div} (\rho \phi \vec{u}) dt d\Omega - \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div} (\Gamma \text{grad} \phi) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega \quad (6)$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dt d\Omega + \int_t \int_{A_{cv}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A} dt - \int_t \int_{A_{cv}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A} dt = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega \quad (7)$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle Ω_{cv} .

3.3.1. Terme transitoire

Pour l'intégration de ce terme particulier, on considère uniquement la variation en temps, en assimilant la variable ϕ à sa valeur au centre du volume de contrôle :

$$I_1 = \int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \phi d\Omega dt = \left\{ (\rho \phi)_P - (\rho \phi)_P^0 \right\} \Delta\Omega \quad (8)$$

Où Ω désigne le volume de contrôle de ϕ et $\Delta\Omega$ sa mesure ($\Delta\Omega = \Delta x \Delta y$) dans le cas 2D et l'exposant 0 indique que la quantité est considérée au pas de temps précédent.

3.3.2. Terme convectif

$$I_2 = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n dt = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) (d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) dt$$

$$= \{ (\rho \phi u A)_e - (\rho \phi u A)_w + (\rho \phi v A)_n - (\rho \phi v A)_s \} \Delta t \quad (9)$$

On définit la variable $F_i = (\rho v A)_i$, qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface (i) , $i = (e, w, n, s)$.

Tableau 2 : Expression des coefficients convectifs

Face	e	w	n	s
Flux de masse convectif	$F_e = \rho_e u_e A_e$	$F_w = \rho_w u_w A_w$	$F_n = \rho_n v_n A_n$	$F_s = \rho_s v_s A_s$

Il vient que :

$$I_2 = \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} \Delta t \quad (10)$$

3.3.3. Terme diffusif

Le gradient de ϕ aux interfaces est finalement calculé en supposant que ϕ varie linéairement entre chaque point du maillage (figure 3.4). On obtient ainsi:

$$I_3 = \int_t \int_{A_{CV}} (\Gamma \text{grad } \phi) d\vec{A} dt = \left\{ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_s \right\} \Delta t$$

(11)

$$I_3 = \left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta y)_n} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta y)_s} A \right)_s \Delta t \quad (12)$$

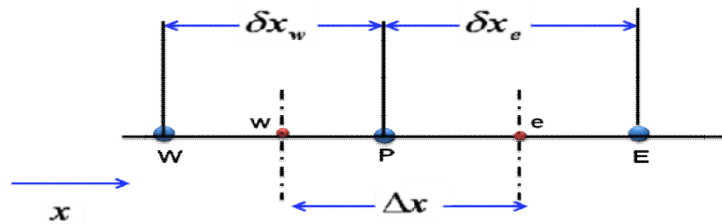


Figure 4 : interpolation pour le gradient de ϕ

On pose $D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{\delta x_i}$ qui représente le coefficient diffusif, où $i = (e, w, n, s)$

Tableau 3 : Expressions des coefficients diffusifs

Face	E	w	n	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}$

On obtient finalement :

$$I_3 = (D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S)) \Delta t \quad (13)$$

Calcul de la conductance Γ :

En général $\Gamma_e \neq \Gamma_w$, la conductivité thermique étant fonction de la température $\Gamma = \Gamma(T)$, ou même fonction de l'espace $\Gamma = \Gamma(x)$ pour les matériaux composites.

Si l'on considère le flux à l'interface "e" (figure 5), il peut être écrit ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e}{\Gamma_e}} \quad (14)$$

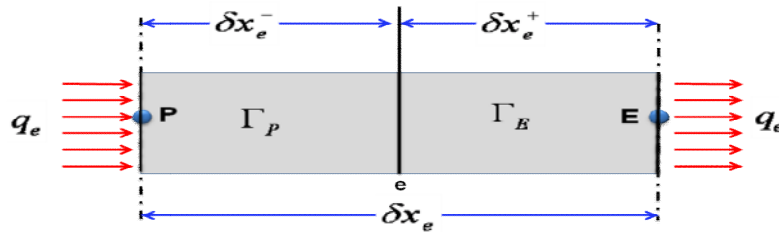


Figure 5 : diffusivité pour un matériau composite

De la relation (14) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\Gamma_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \delta x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P \delta x_e^+ + \Gamma_E \delta x_e^-} \quad (15)$$

Si on définit les paramètres : $f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$ et $1-f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$, la relation (15) devient :

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1-f_e) \Gamma_E} \quad (16)$$

3.3.4. Terme source

L'intégration de ce terme est donné par :

$$I_4 = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_\phi d\Omega = \bar{S} \Delta t \Delta \Omega \quad (17)$$

Où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume considéré.

Souvent le terme source S_ϕ dépend de la variable ϕ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_p . La méthode de Pantakar [4] est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_p \quad (18)$$

Où S_C représente la partie constante de \bar{S} (qui ne dépend pas de ϕ_p), alors que S_P est le coefficient de ϕ_p (S_P ne représente pas \bar{S} évalué au point P).

L'utilisation des expressions de I_1, I_2, I_3 et I_4 permet d'écrire l'équation (7) sous forme discrétisée:

$$\left\{ (\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0 \right\} \Delta \Omega + \left\{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \right\} \Delta t - \left(D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) \right) \Delta t = (S_C + S_P \phi_p) \Delta t \Delta \Omega \quad (19)$$

3.3.5. Équation de continuité

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit aussi résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (20)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle Ω_{CV} conduit à :

$$\int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \rho d\Omega \right) dt + \int_{dt} \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) d\Omega \right) dt + \int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) d\Omega \right) dt = 0 \quad (21)$$

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s = 0 \quad (22)$$

Ce qui donne:

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (23)$$

Effectuons l'opération $[(19) - (\phi_P \times (23))]$, on obtient :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta \Omega \right\} \phi_P + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} - \\ (D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S) = S_C \Delta \Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (24)$$

3.4. Schémas numériques

Soit l'équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi$$

Cette équation, une fois discrétisée implicitement en temps, en tenant compte de la discrétisation l'équation de continuité :

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n$$

Prend la forme :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta\Omega \right\} \phi_P + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} -$$

$$(D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_P + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_P + D_s \phi_S) = S_C \Delta\Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{II.3})$$

Dans cette équation, l'inconnue $\phi_i, i=e,w,n,s$ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (E,W,N,S) . L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine tel que : schéma CDS, upwind, exponentiel, hybride, puissance, et qui sont détaillés ci-après.

3.4.1. Schéma centré (CDS)

Ce schéma consiste en des interpolations linéaires entre les nœuds voisins [8]. L'erreur de troncature du CDS est du second ordre. Le schéma est performant dans les régions où la diffusion domine et/ou pour les maillages fins. Le CDS peut produire des solutions oscillatoires.

Si on définit les paramètres :

$$f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e} \quad (\text{II.4})$$

et

$$1-f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e} \quad (\text{II.5})$$

on obtient :

$$\phi_e = f_e \phi_P + (1-f_e) \phi_E \quad (\text{II.6})$$

On aura donc :

Tableau II.1 : Valeurs de ϕ par interpolation linéaire

$\phi_e = f_e \phi_P + (1-f_e) \phi_E$	$\phi_w = f_w \phi_W + (1-f_w) \phi_P$
--	--

$\phi_n = f_n \phi_P + (1 - f_n) \phi_N$	$\phi_s = f_s \phi_S + (1 - f_s) \phi_P$
--	--

Pour un maillage uniforme on obtient :

Tableau II.2 : Valeurs de ϕ pour un maillage uniforme

Face	e	w	N	s
Valeur de ϕ	$(\phi_P + \phi_E)/2$	$(\phi_W + \phi_P)/2$	$(\phi_N + \phi_P)/2$	$(\phi_P + \phi_S)/2$

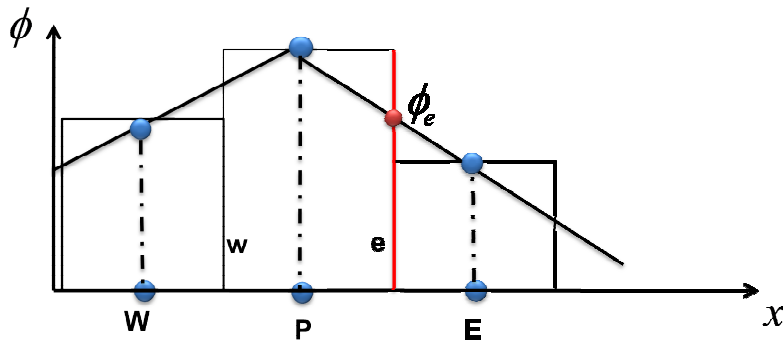


Figure II.1 : Interpolation linéaire entre les nœuds voisins

3.4.2. Schéma amont (Upwind scheme, upstream differencing)

En regardant le sens de l'écoulement on choisit la valeur du nœud en amont [8].

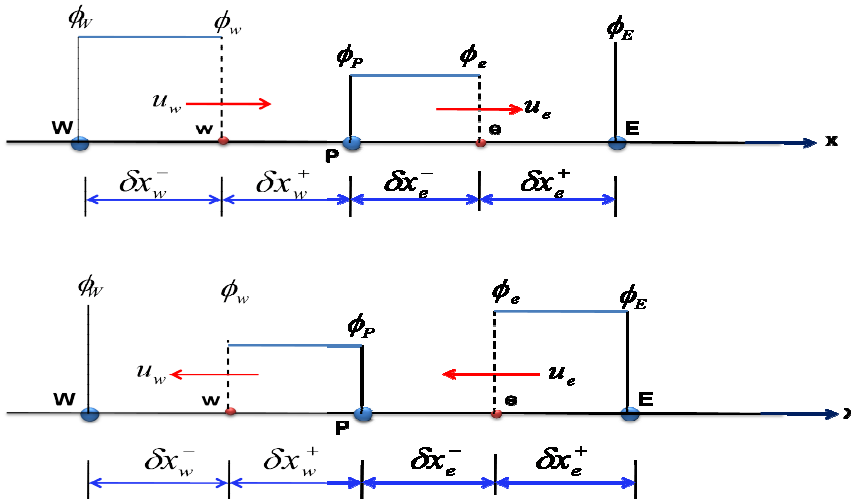


Figure II.2 : interpolation selon le schéma Upwind

Selon que l'écoulement soit dans la direction positive ou négative, on aura :

Tableau II.3 : Valeurs de ϕ aux interfaces

$(F_e, F_w, F_n, F_s) \succ 0$	$(F_e, F_w, F_n, F_s) \prec 0$
$\phi_e = \phi_P$ $\phi_w = \phi_W$ $\phi_n = \phi_P$ $\phi_s = \phi_S$	$\phi_e = \phi_E$ $\phi_w = \phi_P$ $\phi_n = \phi_N$ $\phi_s = \phi_P$

On obtient alors :

$$F_e \phi_e = \langle F_e, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_e, 0 \rangle \phi_E$$

$$F_w \phi_w = \langle F_w, 0 \rangle \phi_W - \langle -F_w, 0 \rangle \phi_P$$

$$F_n \phi_n = \langle F_n, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_n, 0 \rangle \phi_N$$

$$F_s \phi_s = \langle F_s, 0 \rangle \phi_S - \langle -F_s, 0 \rangle \phi_P$$

Cette méthode conduit à des solutions physiquement réalistes.

De sorte que l'opérateur $\langle A, B \rangle = \max(A, B)$ note la plus grande valeur entre A et B.

3.4.3. Schémas utilisant la solution exacte

On introduit la variable J définie aux frontières du volume de contrôle, par exemple à l'Est par :

$$J_e = (\rho u A)_e \phi_e - \Gamma_e (A \frac{\partial \phi}{\partial x})_e = F_e \phi_e - \Gamma_e (A \frac{\partial \phi}{\partial x})_e \quad (\text{II.11})$$

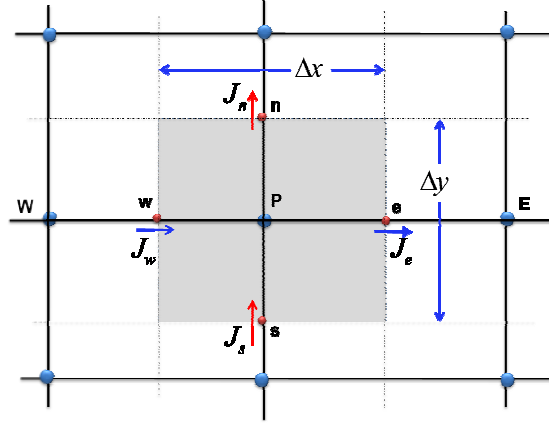


Figure II.3 : Volume de contrôle pour le flux total J_i

Le flux total J_i contient :

- le flux convectif causé par le mouvement du fluide,
- le flux de diffusion créée par le gradient de ϕ .

Il vient que l'équation II.1, peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi - \Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$

En considérant une direction i :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S_\phi$$

tel que :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y}$$

L'équation (II.12) discrétisée pourra s'écrire dans le cas bidimensionnel, en linéarisant le terme source :

$$\left\{ (\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0 \right\} \Delta\Omega + \{ J_e - J_w + J_n - J_s \} \Delta t = (S_C + S_P \phi_P) \Delta\Omega \Delta t \quad (\text{II.15})$$

Si on effectue une combinaison des équations (II.15- ϕ_p II.2), on obtient l'équation suivante pour ϕ_p :

$$\left\{ \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} - S_p \Delta\Omega + (-F_e + F_w - F_n + F_s) \right\} \phi_p + \{ J_e - J_w + J_n - J_s \} = S_c \Delta\Omega + \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \phi_p^0 \quad (\text{II.16})$$

Solution exacte :

L'équation $\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right)$ (dans la direction ox) peut être résolue exactement si Γ_ϕ est supposé constant (ρu est initialement constant.

L'équation de continuité: $\frac{d}{dx} \rho u = 0$).

Si un domaine $0 \leq x \leq L$ est utilisé, avec des conditions aux limites :

$$\phi = \phi_0 \quad \text{pour } x = 0$$

$$\phi = \phi_L \quad \text{pour } x = L$$

la solution de l'équation $\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right)$ est :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(Pe x / L) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (\text{II.17})$$

Où Pe est le nombre de Péclet défini par :

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma} = \frac{F}{D} \quad (\text{II.18})$$

Le résultat de cette interpolation dépend donc de la nature de l'écoulement caractérisée par le nombre de Péclet qui indique l'importance relative de la convection et de la diffusion :

- si la convection est fortement dominante (Pe grand), l'interpolation se fait en adoptant la valeur de la cellule amont.

- si la diffusion est fortement dominante (Pe faible), c'est la valeur de la cellule aval qui est adoptée.

3.4.3.1. Schéma exponentiel (exponential scheme)

Dans ce cas, on utilise un profil se situant entre les points P et E pour l'évaluation du flux total convection-diffusion, avec ϕ_P et ϕ_E qui remplacent ϕ_0 et ϕ_L , et la distance $\delta x_e = x_E - x_P$ qui remplace L .

On a donc :

$$\frac{\phi - \phi_P}{\phi_E - \phi_P} = \frac{\exp(Pe \cdot x / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (\text{II.19})$$

$$\phi = \phi_P + \frac{\exp(Pe \cdot x / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} (\phi_E - \phi_P) \quad (\text{II.20})$$

Utilisons cette formule pour déterminer J_e , On a :

$$(\phi)_e = \phi_P + \frac{\exp(Pe \cdot x_e / \delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1} (\phi_E - \phi_P) \quad (\text{II.21})$$

$$\left(\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right)_e = \Gamma_e \left(\frac{P}{\delta x_e} \frac{\exp(Px_e / \delta x_e)}{\exp(P) - 1} (\phi_E - \phi_P) \right) \quad (\text{II.22})$$

$$J_e = (\rho u \phi)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (\text{II.23})$$

Remplaçant ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ dans l'équation (II.23) par leurs expressions données

respectivement par (II.21) et (II.22), et en posant $(\rho u)_e = F_e$, $\left(\frac{\Gamma}{\delta x} \right)_e = D_e$ et $Pe = \frac{F_e}{D_e}$ on

arrive à:

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe) - 1} \right) \quad (\text{II.24})$$

En suivant la même procédure pour l'évaluation du reste des termes : J_w , J_n , J_s et posons :

$$A^+[D,F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1}$$

on arrive finalement à :

$$J_e = F_e \phi_P + A^+[D_e, F_e](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.26})$$

$$J_w = F_w \phi_W + A^+[D_w, F_w](\phi_W - \phi_P) \quad (\text{II.27})$$

$$J_n = F_n \phi_P + A^+[D_n, F_n](\phi_P - \phi_N) \quad (\text{II.28})$$

$$J_s = F_s \phi_S + A^+[D_s, F_s](\phi_S - \phi_P) \quad (\text{II.29})$$

Ce schéma n'est pas utilisé tel quel, car les exponentielles sont couteuse à calculer. Ce sont plutôt les deux schémas qui suivent qui sont employés.

3.4.3.2. Schéma Hybride (Hybrid Scheme)

Le schéma Hybride [9] consiste à rapprocher le comportement des coefficients $A^+[D,F]$ du schéma exponentiel, par la reproduction de leur régime de limitation correctement.

On a, pour une direction (ox) :

$$J_e = F_e \phi_P + A^+[D_e, F_e](\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{J_e}{D_e} = P_e \phi_P + \frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e}(\phi_P - \phi_E) \quad (\text{II.31})$$

Le coefficient $A^+[D_e, F_e] = \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1}$ cité dans le schéma exponentiel peut être écrit

sous la forme :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (\text{II.32})$$

La variation de $\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e}$ avec P_e est représentée dans la figure II.4, on a alors :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow 0 \quad \text{pour } P_e \rightarrow \infty$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow -P_e \quad \text{pour } P_e \rightarrow -\infty \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} \rightarrow 1 - \frac{P_e}{2} \quad \text{pour } P_e = 0$$

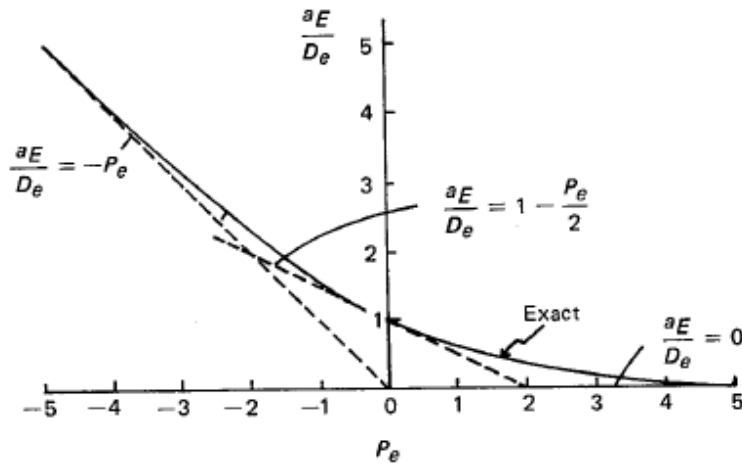


Figure II.4 : Variation de $\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e}$ en fonction de P_e [9].

On trace les trois tangentes du profil de la solution exacte, on arrive à [9] :

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = 0 \quad \text{pour } P_e \succ 2$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \quad \text{pour } -2 \geq P_e \leq 2$$

$$\frac{A^+[D_e, F_e]}{D_e} = -P_e \quad \text{pour } P_e \prec -2 \quad (\text{II.38})$$

Qui peut s'écrire :

$$A^+[D_e, F_e] = 0 \quad \text{for } P_e \succ 2$$

$$A^+[D_e, F_e] = D_e - \frac{F_e}{2} \quad \text{for } -2 \geq P_e \geq 2$$

$$A^+[D_e, F_e] = -F_e \quad \text{for } P_e \prec -2 \quad (\text{II.41})$$

On obtient finalement la relation générale [9]:

$$A^+[D_e, F_e] = \text{Max}(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0) \quad (\text{II.42})$$

Même procédure pour estimer le reste des valeurs de $A^+[D, F]$ pour toutes les faces.

On a donc :

$$A^+[D_e, F_e] = \text{Max}(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0) \quad (\text{II.43})$$

$$A^+[D_w, F_w] = \text{Max}(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0) \quad (\text{II.44})$$

$$A^+[D_n, F_n] = \text{Max}(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0) \quad (\text{II.45})$$

$$A^+[D_s, F_s] = \text{Max}(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0) \quad (\text{II.46})$$

3.4.3.3. Schéma puissance (Power law scheme)

Ce schéma est également une version approchée du schéma exponentiel, plus précis que le schéma hybride. Il a été introduit par Patankar [10] pour fournir une stabilité pour la simulation numérique. Le comportement du schéma puissance est similaire au CDS pour les faibles nombres de Péclet, et au schéma Upwind pour les grands nombres de Péclet. Bien qu'il ait une précision du premier ordre concernant l'erreur de troncature, le schéma puissance est une formulation conservative et ne souffre pas du problème d'oscillations numériques.

La computation de l'exponentiel $A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1}$ est une opération très couteuse. Une approximation du terme $A^+[D, F]$ a été introduite conduisant à [10]:

$$A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1} = D \max\left(0, (1 - 0.1|F|/D)^5\right) + \max(0, -F) \quad (\text{II.47})$$

Bilan :

Si on pose $Pe = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_p^{n+1} \phi_p^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b \quad (\text{II.48})$$

Où les coefficients de l'équation (II.48) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0]$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0]$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0]$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p$$

$$a_p^0 = \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta\Omega + a_p^0 \phi_p^0$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $A(|P|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau II.5) [10].

Tableau II.5 : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas.

Schéma	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponentiel	$ P / (\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P)^5]$

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. Cette discrétisation concerne l'expression des coefficients J aux faces des volumes de contrôle. Ceux-ci sont interpolés entre les deux nœuds que sépare la face de telle sorte que l'équation stationnaire 1D de convection-diffusion soit vérifiée entre ces deux points, et ce, indépendamment du problème que l'on résout.

Le schéma hybride [8] et le schéma puissance [9] utilisé dans cette étude, sont dérivés directement du schéma exponentiel. Ils reposent tous deux sur l'approximation des coefficients où apparaît l'exponentiel, qui est coûteuse en temps de calcul. En fonction du nombre de Péclet, le schéma hybride effectue une approximation linéaire par morceaux de la fonction $A(P)$ et le schéma puissance une approximation polynomiale.

4. COUPLAGE VITESSE-PRESSION

4.1. Introduction :

La difficulté principale pour la résolution mathématique des équations de la MDF provient du rôle particulier d'une des variables principales la pression, les équations de quantité de mouvement sont couplées par la pression, qui agit par les composantes de son gradient. Mais il n'y a pas d'équation propre pour cette variable.

A l'opposé les composantes du vecteur vitesse qui disposent toutes d'équations de transport (les composantes de l'équation de quantité de mouvement doivent satisfaire de plus en plus l'équation de continuité).

La solution du problème de mécanique des fluides est un champ de vitesse et de pression respectant les équations de quantité de mouvement et la continuité. L'équation de continuité se présente donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression.

La résolution des équations de Navier-Stokes ne peut pas s'effectuer séparément par composante car la contrainte représentée par l'équation de continuité porte sur les trois composantes de la vitesse ou de la quantité de mouvement. Si toutefois la résolution est fractionnée par composante, on parle de prédiction de la vitesse et celle-ci doit être suivie d'une étape de correction pour satisfaire par exemple ($\text{div} \vec{V} = 0$) en incompressible.

Il existe plusieurs méthodes que l'on peut classer en deux familles : l'une où l'on se débarrasse du problème de la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et l'autre où l'on compose avec la pression en établissant une équation spécifique. Dans le premier cas on parle de formulation en Vorticité-Potentiel Vecteur en 3D ou Vorticité-Fonction de Courant en 2D ($\Omega - \Psi$) et dans le second cas on a une formulation en variables primitives Vitesse-Pression (P, V). L'équation de l'énergie peut être aussi couplée pour certaines applications (convection naturelle par exemple).

Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse et pression dans les deux équations de quantité de mouvement. Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement. Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qu'est la pression (les deux autres étant les deux composantes de la vitesse). En d'autres termes, si le gradient de pression est connu à priori on peut calculer le champ vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement. Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

4.2. Algorithme SIMPLE et SIMPLER

Des techniques de couplage des équations de Navier-Stokes équivalentes à la technique de projection ont été élaborées et mise en œuvre par Spalding et Patankar à l'Impérial Collège de Londres dans les années 1960-1970. Elles ont donné lieu à de multiples versions intitulées SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEST,

L'algorithme le plus universel et le plus utilisé est sans doute l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding [3], ensuite ses variantes telles que : SIMPLEC (van Doormal and Raithby [10]), PISO (Issa [11]) et SIMPLER (Patankar [4]) que nous allons détailler dans ce travail.

La supériorité de l'algorithme SIMPLER par rapport à SIMPLE réside dans le fait que la déduction de l'équation de la pression ne fait intervenir aucune simplification. Dans SIMPLE, la déduction de l'équation de correction de la pression passe par l'annulation du terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$. Par conséquent le champ de pression dans SIMPLER est plus proche de la réalité que celui de SIMPLE, puisqu'en général l'estimation d'un champ de vitesse initial est plus facile que celle d'un champ de pression. Notons, ici que l'algorithme SIMPLER ne nécessite pas de champ de pression initial. La pression est directement générée à partir de l'initialisation de la vitesse. Par conséquent des coefficients de sous relaxation plus consistants peuvent être utilisés pour les vitesses. Mieux encore, aucune sous relaxation n'est nécessaire pour la pression. Il est vrai qu'une itération suivant l'algorithme SIMPLER nécessite environ 30% de temps plus que celle de SIMPLE, mais cet effort est largement compensé par la réduction consistante en nombre d'itérations nécessaires pour la convergence.

Cependant, en termes de vitesse de convergence des calculs, l'algorithme SIMPLER est de 30 à 50% plus efficace que SIMPLE selon Anderson [12] et Jang [13].

4.2.1. Algorithme SIMPLE

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement sur le volume de contrôle (maillage décalé) de centre e et de limites P et E donne :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.1})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.2})$$

Soit un champ de pression initial p^* . La solution provisoire de l'équation précédente sera notée u^* (notons que u^* ne vérifie pas l'équation de continuité).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.3})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.4})$$

A ce stade, aucune des deux variables n'est correcte. Toutes les deux nécessitent une correction :

$$u = u^* + u' \quad (\text{III.5})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{III.6})$$

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.7})$$

où u' et p' sont les corrections qu'il faut estimer.

La relation entre u' , v' et p' est obtenue par la soustraction de (III.3 et III.4) de (III.2 et III.1).

L'introduction des équations (III.5, III.6 et III.7) dans (III.3 et III.4) et en tenant compte de (III.1 et III.2), il s'en suit:

$$u_e = u_e^* + d_e (p_P' - p_E') \quad (\text{III.8})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (p_P' - p_N') \quad (\text{III.9})$$

Où :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \text{ et } d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.10})$$

Notons ici que pour linéariser l'équation, le terme $\sum a_{nb} u_{nb}'$ a été tout simplement négligé. Normalement, ce terme doit s'annuler lors de la convergence de la procédure. C'est-à-dire que cette omission n'influe pas sur le résultat final, mais elle fausse un peu le résultat temporaire. C'est d'ailleurs la seule simplification faite dans l'algorithme SIMPLE. Elle a été corrigée dans les variantes plus évoluées (SIMPLER et SIMPLEC).

L'introduction de l'expression corrigée (III.8 et III.9) dans l'équation de continuité (III.2), donne l'équation de correction de la pression, qu'on écrit sous la forme suivante:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III.11})$$

où :

$$a_E = (\rho A d)_e ; \quad a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.12})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; \quad a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.13})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.14})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.15})$$

Enfin, l'algorithme SIMPLE est résumé comme suit:

1. Choisir un champ de pression initial p^* .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement (III.3 et III.4) :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*) A_n + b_v$$

pour déduire un champ de vitesse u^* et v^* .

3. Calculer le terme source de la masse b de l'équation (III.15) :

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

et résoudre l'équation (III.11) de correction de la pression :

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b$$

4. Corriger les champs de pression et de vitesse via les équations (III.5, III. 6 et III.7) et (III.8 et III.9) :

$$p = p^* + p'$$

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N)$$

5. Résoudre les autres équations de transports ϕ et mettre à jour les propriétés, les coefficients,.....
6. Remplacer l'ancien champ de pression p trouvée à l'étape 4 par le nouveau p^* et revenir à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

4.2.2. Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées. À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées (III.50) et (III.53) sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.16})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.17})$$

Les équations (III.16, III.17) peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.18})$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.20})$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} \quad (\text{III.22})$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E)$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.24})$$

En reportant les expressions précédentes (III.23 et III.24) dans l'équation discrète de conservation de la masse (III.2) on obtient directement une équation en pression :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.29})$$

Considérons maintenant une estimation du champ de pression : $P^* = P$.

À partir du champ de pression obtenu P^* , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* et v^* :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.30})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.31})$$

Où :

$$u_e^* = \hat{u}_e + d_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.32})$$

$$v_n^* = \hat{v}_n + d_n (P_P^* - P_N^*) \quad (\text{III.33})$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir les équations de correction de pression P' (comme dans SIMPLE). L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression.

En conservant l'équation de correction de vitesse de SIMPLE, on écrit :

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E') \quad (\text{III.34})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N') \quad (\text{III.35})$$

Ce qui donne l'équation de correction de pression :

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (\text{III.36})$$

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.37})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.38})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.39})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.40})$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de b s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source b soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de p' n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source b est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit:

- 1- Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs : u^*, v^*)
- 2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les « pseudo vitesse » (Eq. III.21, III.22)

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v}{a_n}$$

- 3- évaluer le terme source de la masse de l'équation (III.29)

$$b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

et résoudre l'équation de pression (III.25)

$$a_p P_p = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

- 4- Utiliser le champ de pression ($P^* = P$) pour résoudre les équations de quantité de mouvement u^*, v^* (III.30,31), (ne pas corriger la pression).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v$$

5- Calculer le terme source de la masse b , (III.40)

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

de l'équation (III.40) et résoudre les équations (III.36) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b$$

6- Corriger le champ de vitesse via l'équation (III.34 et 35) , mais ne pas corriger la pression.

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E')$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N')$$

7- Résoudre les autres équations de transport ϕ (énergie, masse,...).

8- Retourner à l'étape -2-, avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression). Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

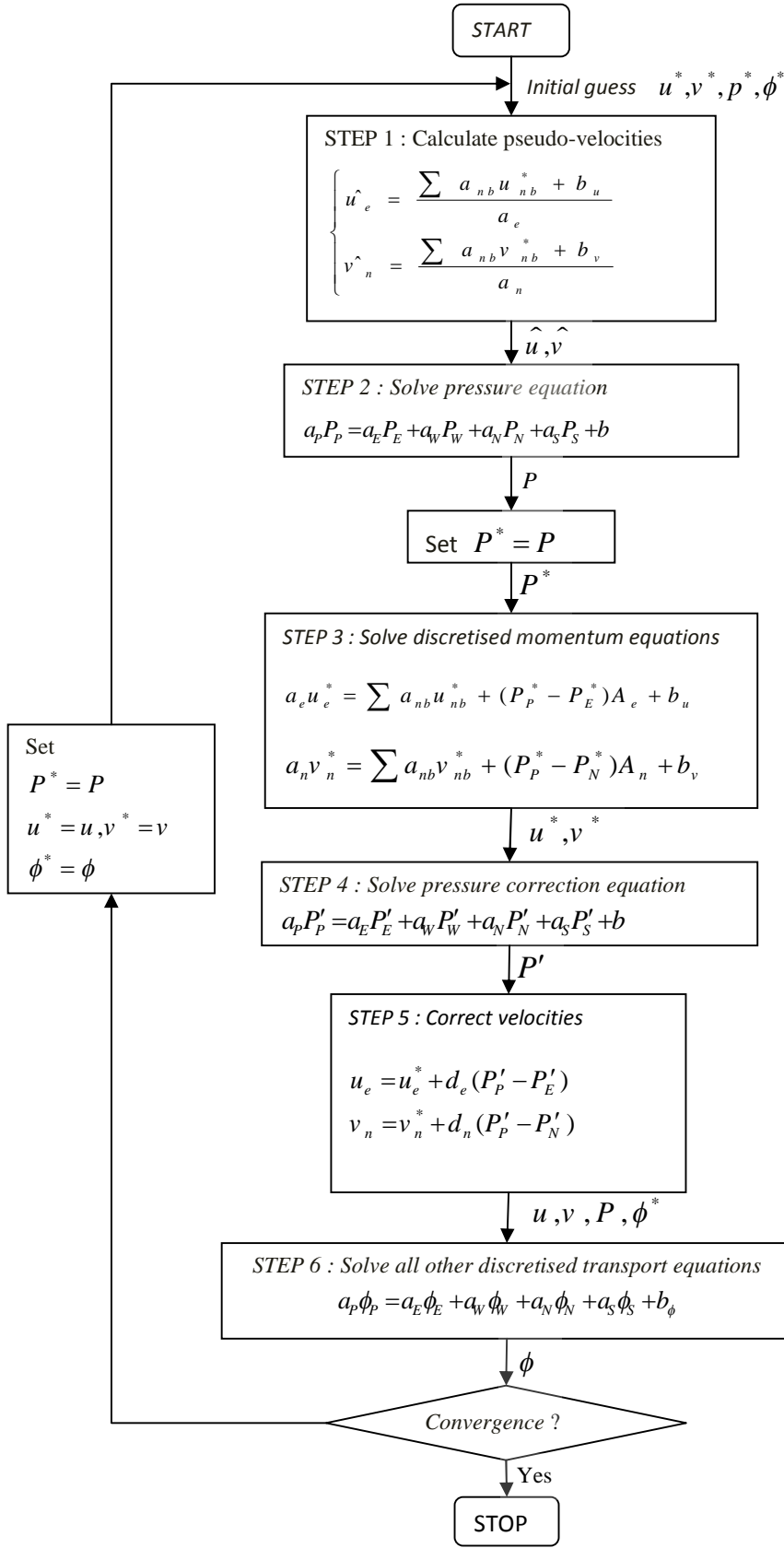


Figure 6 : Algorithm SIMPLER

4.2.3. Algorithme SIMPLER transitoire

Pour décrire les phénomènes transitoires, une discrétisation temporelle est réalisée, en plus de la discrétisation spatiale. Elle est caractérisée par le pas de temps Δt . L'algorithme *SIMPLER*, utilisé pour la solution des problèmes en régime stationnaire, peut être utilisé pour les problèmes en régime instationnaire. Les équations de quantité de mouvement, contiennent maintenant des termes instationnaires.

Dans les régimes instationnaires, avec formulation implicite; la procédure itérative *SIMPLER* est appliquée à chaque niveau du temps jusqu'à ce que la convergence soit accomplie. La figure (3.10) expose la structure de l'algorithme.

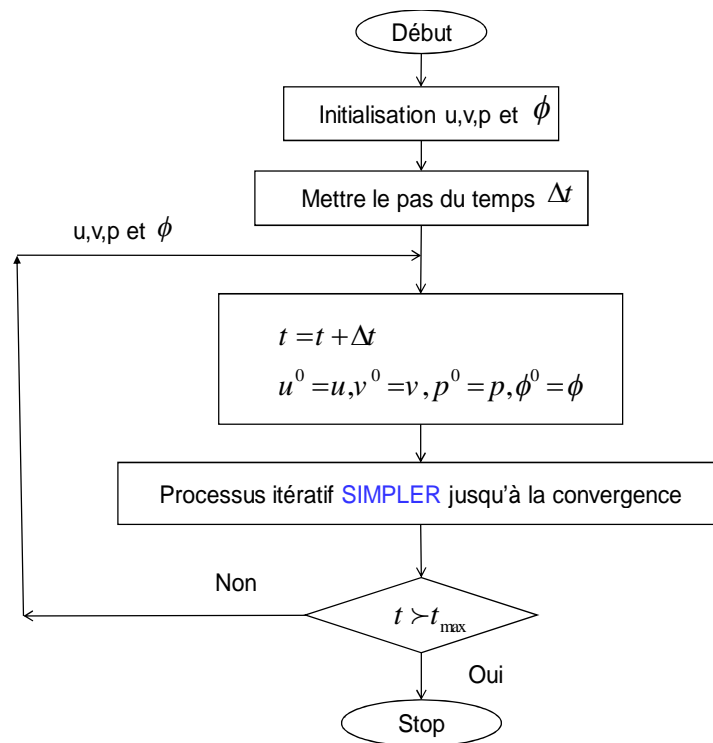


Figure 7 : Algorithme SIMPLER transitoire.

4.2.4. RELAXATION

Le processus itératif utilisé dans *SIMPLER* exige le contrôle du taux de variation des inconnues au cours de chaque itération. Ceci est réalisé par des méthodes dites de sous-relaxation [12] :

Soit ϕ_p^* la valeur de ϕ_p à l'itération courante. Si ϕ_p satisfait à l'équation:

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (33)$$

Alors, pour que le système soit résolu pour l'itération courante, on estime une valeur de ϕ_p donnée par :

$$\phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (34)$$

Le changement dans ϕ_p d'une itération à la suivante est donné par :

$$\Delta \phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \quad (35)$$

Le changement de ϕ_p s'effectue d'une fraction α définie par:

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (36)$$

Après réarrangements des termes, on trouve :

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_p \phi_p^* \quad (37)$$

Ainsi la nouvelle valeur de la grandeur ϕ_p dépend de la valeur précédente ϕ_p^* et de sa correction $\Delta \phi = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^*$ en utilisant le coefficient de sous-relaxation α dont la valeur est strictement inférieure à 1.

5. Formulation vorticité-fonction de courant :

5.1. Introduction :

Cette méthode est généralement utiliser pour la simulation des écoulement 2D. et afin d'éliminer la variable pression des équations de mouvement.

Les équations gouvernant l'écoulement en 2D sont :

$$\text{Equation de continuité : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{EQM/X : } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \quad (2)$$

$$\text{EQM/Y : } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} \quad (3)$$

Par cette formulation, on transforme les variables u, v en variables vorticité et fonction de courant :

$$\text{La vorticité est définie par : } \vec{\omega} = \overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Comme en 2D le rotationnel du vecteur vitesse d'un écoulement plan dans plan (Oxy) est défini par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

Et la fonction de courant : définie par la condition d'incompressibilité $\vec{V} = \overrightarrow{rot}(\psi(x, y)\vec{k})$, ce qui nous permet de donner :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dérivant l'équation (2) par rapport à y et l'équation (3) par rapport à x et la différence entre les résultats nous donne l'équation de vorticité :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

.....

.....

En fin on obtient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}$$

On peut écrire cette équation sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}$$

Elle est parabolique en temps.

5.2. Equation de fonction de courant :

En introduisant l'équation (5) dans l'équation (4) nous obtenons l'équation régissant la fonction de courant :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ et } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\omega = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y}$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

En utilisant la formulation vorticité fonction de courant, on a transformé le probleme de résolution des équations de NS pour un fluide incompressible en variables primitives qui est un probleme mixte elliptique parabolique en 2D, en un probleme parabolique en

temps pour l'équation de vorticité et un probleme elliptique pour l'équation de la fonction de courant ( quation de Poisson).

Pour la détermination du champ de pression par cette formulation on effectue les opérations suivantes sur les équations de mouvement :

Dérivant l'équation (2) par rapport à x et l'équation (3) par rapport à y et en prenant la somme des résultats :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

.....

.....

.....

En fin on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Qui peut exprimer par rapport à la fonction de courant :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)$$

La formulation vorticité fonction de courant se résume :

Equation de transport de vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right\}$$

Une équation de poisson pour la fonction de courant :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

Une équation de poisson pour la pression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S$$

$$\text{Avec : } S = 2\rho \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)$$

(14)

5.3. Méthode de résolution par la méthode des volumes finis :

La formulation vorticité fonction de courant consiste en 3 équations différentielles à dérivées partielles pour les variables ω, ψ et p

L'équation de la vorticité est une équation parabolique en temps ; tandis que l'équation de Poisson pour la fonction de courant et pour la pression, le temps n'est qu'un paramètre. Pour la résolution des problèmes stationnaire, l'équation de la vorticité est traitée pour chaque pas du temps jusqu'à une valeur asymptotique et l'équation de pression est traitée une fois que la solution du régime stationnaire est atteinte.

6. RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DES EQUATIONS DISCRETISEES

6.1. Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas [14] en 1949, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnel (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tridiagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Un système tridiagonal peut s'écrire sous la forme générale, (voir [15] pour plus de détails) :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \quad (38)$$

Sous forme d'une matrice, ce système s'écrit

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \quad (39)$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour $i=2$, on utilise les équations :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad Q_2 = \frac{d_2 + c_2 \phi_1}{a_2} \quad (40)$$

- Pour i variant de 3 à $N-1$, on utilise les équations :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (41)$$

avec $P_N = 0$ et $Q_N = \phi_N$ (où ϕ_N est une condition aux limites).

La dernière étape détermine les inconnues, pour i variant de $N-1$ à 1, on utilise l'équation : $\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$

ϕ_1 et ϕ_N sont des valeurs aux limites du domaine.

6.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA)

L'algorithme de Thomas (TDMA) peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel [9]. Considérons le maillage envisagé dans la figure (3.11) et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (42)$$

Pour résoudre ce système, l'algorithme de Thomas est appliqué pour une ligne choisie, par exemple la ligne Nord-Sud (N-S). L'équation de transport discrétisée est réarrangée sous la forme :

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (48)$$

Le membre droit de l'équation (48) est supposé temporairement connu. L'équation (48) est de la même forme que l'équation (38), avec :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i$$

$$a_i = -a_S$$

$$b_i = a_P$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b$$

(49)

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction (N-S) de la ligne choisie pour des valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ comme indiqué sur la figure (8).

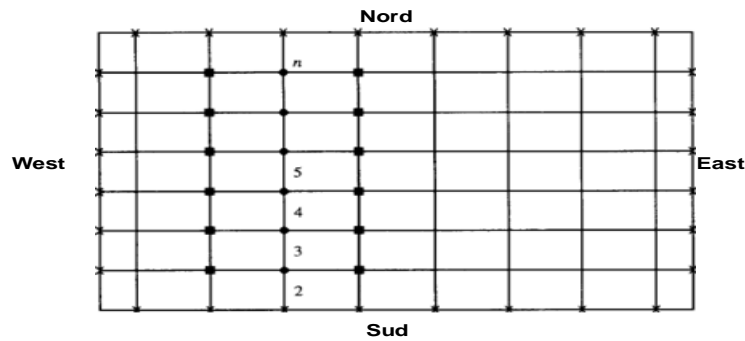


Figure 8 : Application ligne par ligne de la méthode TDMA

•

P

oints auxquels les valeurs sont calculées

■

P

oints auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues

✕

V

aleurs connues à la frontière

A gauche de l'équation (48), il n'y a que le système tridiagonal qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Thomas. La solution est d'abord calculée sur la deuxième ligne des volumes de contrôle, on suppose que les valeurs de la première ligne sont connues (valeurs connues à la frontière) et les valeurs de la troisième ligne sont considérées être temporairement connues. Après que le vecteur $[\phi_2]$ ait été calculé avec l'algorithme de Thomas, on passe au vecteur $[\phi_3]$ et on suppose que la deuxième ligne est déjà calculée (à l'itération précédente) et les valeurs de la quatrième ligne sont supposées temporairement connues, puis plus généralement au vecteur $[\phi_j]$ où l'ensemble de la zone de résolution est ainsi balayé.

La procédure de calcul ligne par ligne est répétée jusqu'à atteindre la convergence de la solution.

Travaux pratiques VOLUMES FINIS

TP N⁰ I : Maillage 2D :

Soit un domaine rectangulaire à deux dimensions de longueur 1 m et de largeur 0.5 m.

Le maillage du domaine étudié correspond à un réseau de $N_x \times N_y$ nœuds.

Ecrire un programme FORTRAN qui permet de construire et tracer un maillage à 2D.
(Utiliser le logiciel graphique *TecPlot* pour tracer le maillage).

Algorithme :

INPUT : Longueur (XL) et largeur (YL) du domaine étudié, nombre de nœuds suivant
x (N_x) et suivant y (N_y),

$$\text{PAS d'espace suivant } x : \Delta x = \frac{XL}{n-1} \text{ et suivant } y : \Delta y = \frac{YL}{n-1}$$

Construction du maillage :

FOR $i = 1, N_x$ **DO**

$$x(i) = \Delta x \cdot (i - 1)$$

END FOR

FOR $j = 1, N_y$ **DO**

$$y(j) = \Delta y \cdot (j - 1)$$

END FOR

OUTPUT : écrire $x(i)$, $y(j)$

STOP

TP N⁰ II : Maillage 3D :

Soit un domaine de forme cubique de longueur $2m$, de largeur $1m$ et de hauteur $0.5 m$.

Le maillage du domaine étudié correspond à un réseau de $N_x \times N_y \times N_z$ nœuds.

Ecrire un programme FORTRAN qui permet de construire et tracer un maillage à 3D.
(Utiliser le logiciel graphique **TecPlot** pour tracer le maillage).

Algorithme :

INPUT : Longueur (XL), largeur (YL) et hauteur (ZL) du domaine étudié, nombre de nœuds suivant x (N_x), suivant y (N_y) et suivant z (N_z)

PAS d'espace suivant x : $\Delta x = \frac{XL}{n-1}$, suivant y $\Delta y = \frac{YL}{n-1}$ et suivant z

$$\Delta z = \frac{ZL}{n-1}$$

Construction du maillage :

FOR $i = 1, N_x$ **DO**

$x(i) = \Delta x \cdot (i - 1)$

END FOR

FOR $j = 1, N_y$ **DO**

$y(j) = \Delta y \cdot (j - 1)$

END FOR

FOR $k = 1, N_z$ **DO**

$z(k) = \Delta z \cdot (k - 1)$

END FOR

OUTPUT : écrire $x(i)$, $y(j)$, $z(k)$

STOP

TP III : Résolution de l'équation de chaleur 2D

On considère l'équation de la chaleur (conduction bidirectionnelle de chaleur en régime instationnaire (non permanent))

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) ; a \text{ est la diffusivité thermique.}$$

Résoudre cette équation numériquement par la méthode des volumes finis (on utilise un schéma explicite). Etablir un code Fortran.

Application : on considère une plaque de forme rectangulaire d'aluminium de longueur $L = 1 \text{ m}$ et de largeur $H = 0.5 \text{ m}$, (voir figure 1), de conductivité thermique $\lambda = 237 \text{ W / m.K}$, de chaleur spécifique $c_p = 0.888 \text{ kJ / kg.K}$ et de masse volumique $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg / m}^3$

La plaque est à la température initiale $T(0, x) = 0 \text{ K}$. On impose à ses extrémités gauche et droite une température de $T(t, x = 0, y) = 30 \text{ K}$ et $T(t, x = L, y) = 5 \text{ K}$ respectivement. On suppose en plus que les coté supérieure et inférieure sont supposés adiabatiques (cotés isolés thermiquement : $q(t, x, y = 0) = q(t, x, y = H) = 0 \text{ W}$)

Utiliser le code établit précédemment pour tracer dans un graphe l'évolution des isothermes à l'état final (stationnaire). (on considère que le régime permanent est atteint lorsque le temps $t \rightarrow \infty$).

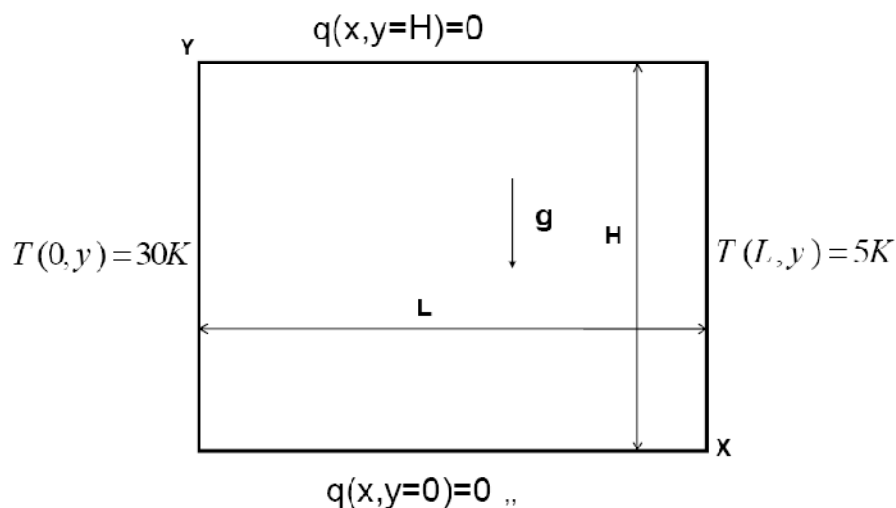


FIGURE 1 : configuration physique

Programmes FORTRAN

Programme 1 :

```

PROGRAM GRID2D
REAL XL,YL,X(50),Y(50),Delx,Dely
INTEGER i,j,NX,NY
OPEN(15,FILE='GRIDE.dat')
READ(*,*)XL,YL
READ(*,*)NX,NY

Delx=XL/(FLOAT(NX-1))
Dely=YL/(FLOAT(NY-1))
X0=0.
Y0=0.

DO i=1,NX
X(i)=X0+(i-1)*Delx
write(*,*)x(i)
ENDDO

DO j=1,NY
Y(j)=Y0+(j-1)*Dely
write(*,*)y(j)
ENDDO

write(15,*) 'TITLE ="MAILLAGE"'
write(15,*) 'VARIABLES ="X","Y"'

write(15,*) 'ZONE I=',NX,'J=',NY,'F=POINT'

DO i=1,NX
DO j=1,NY
WRITE(15,*)X(i),Y(j)
ENDDO
ENDDO

END

```

Programme 2 :

```

PROGRAM GRID2D
REAL XL,YL,ZL,X(50),Y(50),Z(50),Delx,Dely,Dels
INTEGER i,j,k,NX,NY,NZ
OPEN(15,FILE='GRIDE.dat')
READ(*,*)XL,YL,ZL
READ(*,*)NX,NY,NZ

Delx=XL/(FLOAT(NX-1))
Dely=YL/(FLOAT(NY-1))
Dels=ZL/(FLOAT(NZ-1))

X0=0.
Y0=0.
Z0=0.

DO i=1,NX
X(i)=X0+(i-1)*Delx
write(*,*)x(i)
ENDDO

DO j=1,NY
Y(j)=Y0+(j-1)*Dely
write(*,*)y(j)
ENDDO

DO k=1,NZ
Z(k)=Z0+(k-1)*Dels
write(*,*)z(k)
ENDDO

write(15,*) 'TITLE ="MAILLAGE"'
write(15,*) 'VARIABLES ="X","Y","Z"'

write(15,*) 'ZONE I=',NX,'J=',NY,'K=',NZ,'F=POINT'

DO i=1,NX
DO j=1,NY
DO k=1,NZ

WRITE(15,*)X(i),Y(j),Z(k)
ENDDO
ENDDO
ENDDO

END

```

Programme 3 :

```

PROGRAM CDVF
PARAMETER (NI=200,NJ=200)
DIMENSION X (NI) , Y (NJ) , XP (NI) , YP (NJ) , TETA (NI, NJ)
DIMENSION XK (NI, NJ)
DIMENSION AN (NI, NJ) , AS (NI, NJ) , AE (NI, NJ) , AW (NI, NJ) ,
1SU (NI, NJ) , SP (NI, NJ) , AP (NI, NJ)
OPEN (UNIT=11, FILE='CONDUCT.dat')
OPEN (UNIT=12, FILE='GRIDVF.dat')
OPEN (UNIT=13, FILE='MAILLAGE.dat')

```

```

      XL=1.          ! LONGUEUR EN M
      YL=0.5         ! LARGEUR EN M
      NX=50          ! NOMBRE DE POINTS SUIVANT X
      NY=50          ! NOMBRE DE POINTS SUIVANT Y

      NXP=NX-1
      NYP=NY-1

      XP(1)=0.
      DX=XL/FLOAT(NXP-1)
      DO 1 I=2,NXP
1  XP(I)=XP(I-1)+DX

      YP(1)=0.
      DY=YL/FLOAT(NYP-1)
      DO 2 J=2,NYP
2  YP(J)=YP(J-1)+DY

      X(1)=XP(1)
      DO 5 I=2,NX-1
5  X(I)=0.5*(XP(I)+XP(I-1))
      X(NX)=XP(NXP)

      Y(1)=YP(1)
      DO 10 J=2,NY-1
10 Y(J)=0.5*(YP(J)+YP(J-1))
      Y(NY)=YP(NYP)

```

```

      write(13,*) 'TITLE ="MAILLAGE-VF"'
      write(13,*) 'VARIABLES ="X","Y"'
      write(13,*) 'ZONE I=',NX,'J=',NY,'F=POINT'
      DO J=1,NX
      DO I=1,NY
      WRITE(13,1000)X(I),Y(J)

      ENDDO
      ENDDO

      write(7,*) 'VARIABLES ="XP","YP"'
      write(7,*) 'ZONE I=',NXP,'J=',NYP,'F=POINT'
      DO J=1,NXP
      DO I=1,NYP
      WRITE(7,1000)XP(I),YP(J)

      ENDDO
      ENDDO

```



```

S=0. !-1.5          ! TERME SOURCE
TINY=1.0E-15
NMAX=2000          !NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS

DT=1.0/(2.0*(1.0/DX**2 + 1.0/DY**2)) ! VALEUR MAXIMALE PREVUE PAR LE CRITERE DE STABILITE
EPS=0.0001 !0.1*DT ! CRITERE DE CONVEGENCE FIXE EN FONCTION DU PAS DT
WRITE(*,*) ' LONGUEUR : ',XL
WRITE(*,*) ' LARGEUR : ',YL
WRITE(*,*) ' DT : ',DT
WRITE(*,*) ' EPS : ',EPS

! Coeff de conductivite
DO I=1,NX
DO J=1,NY
KK(I,J)=237.
ENDDO
ENDDO
! CONDITIONS INITIALES
DO I=1,NX
DO J=1,NY
TETA(I,J)=0.0
ENDDO
ENDDO
! CONDITIONS AUX LIMITES
DO j=1,NY
TETA(1,j)=30.

TETA(NX,j)=5.
ENDDO

! DO I=1,NX
! TETA(I,NY)=-5.
! ENDDO

DO ITER=1,NMAX ! NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS
ERR=TINY

DO i=2,NX-1
TETA(i,NY)=TETA(i,NY-1)
TETA(i,1)=TETA(i,2)
ENDDO

DO J=2,NY-1
DO I=2,NX-1
AW(I,J)=0.5*(KK(I-1,J)+KK(I,J))*DY/DX
AE(I,J)=0.5*(KK(I,J)+KK(I+1,J))*DY/DX
AN(I,J)=0.5*(KK(I,J)+KK(I,J+1))*DX/DY
AS(I,J)=0.5*(KK(I,J-1)+KK(I,J))*DX/DY
SU(I,J)=S*DX*DY
SP(I,J)=0.0
ENDDO
ENDDO

!CL
DO J=2,NY-1
DO I=2,NX-1
TETAOLD=TETA(I,J)
AP(I,J)=AW(I,J)+AE(I,J)+AN(I,J)+AS(I,J)-SP(I,J)

TETA(I,J)=(AW(I,J)*TETA(I-1,J)+AE(I,J)*TETA(I+1,J)+
IAN(I,J)*TETA(I,J+1)+AS(I,J)*TETA(I,J-1)+SU(I,J))/AP(I,J)

ERRLOC=ABS(TETA(I,J)-TETAOLD)/TETA(I,J)
ERR=MAX(ERRLOC,ERR)
ENDDO
ENDDO

WRITE(*,*) ' ITERATION : ',ITER , ' ERR=' ,ERR
IF(ERR.LE.EPS) GOTO 100

ENDDO
100 CONTINUE

1000 FORMAT(20E14.5)
write(11,*) 'TITLE ="CONDUCT-VF"'
write(11,*) 'VARIABLES ="X(m) ", "Y(m) ", "T(C) "'
write(11,*) 'ZONE I=',NX, 'J=',NY, 'F=POINT'
DO J=1,NY
DO I=1,NX
WRITE(11,1000)X(I),Y(J),TETA(i,j)

ENDDO
ENDDO
END

```