Cours de Traitement Du Signal - Séries de Fourier

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

6 septembre 2007

Plan du cours

Fonction signe

- *signum* : $sgn(t) =$
  - $-1, \forall t < 0$
  - $1, \forall t > 0$
- Valeur à l'origine arbitraire : $-1 < sgn(0) < 1$
- Par convention : $sgn(0) = 0$

Fonction de Heaviside

- Saut unité : $\epsilon(t) =$
  - $0, \forall t < 0$
  - $1, \forall t > 0$
- Valeur à l'origine arbitraire : $0 < \epsilon(0) < 1$
- Par convention : $\epsilon(0) = 1/2$ ou $\epsilon(0) = 1$
- Remarque : $\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.sgn(t)$

Fonction porte

Fonction rectangulaire normalisée

- $rect(t) =$
  - $1, |t| < \frac{1}{2}$
  - $0, |t| > \frac{1}{2}$
- Remarque : $rect(t) = \epsilon(t + \frac{1}{2}) - \epsilon(t - \frac{1}{2})$

Fonction porte généralisée

- Retard : $t \rightarrow (t - \tau)$
- Allongement : $t \rightarrow \frac{t}{T}$
- $\Pi_T^A(t - \tau) = A.rect(\frac{t-\tau}{T})$

Fonctions périodiques

- $\forall t, f(t + T_0) = f(t)$
- Période : plus petit T_0 non nul
- Cas général : pas de modèle simple
  - Exemple : machines tournantes (roulements...)

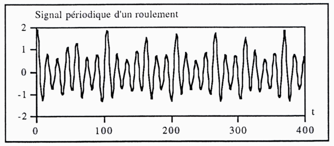

Fig. 1.25 *Exemple de signal périodique complexe provenant d'un roulement*

- Cas particulier : fonctions sinusoïdales
  - $f(t) = A.sin(\omega t + \Phi)$
  - fréquence $\omega = 2\pi.f$
  - période $T = \frac{1}{f}$

Historique

- Daniel Bernoulli : idée de décomposition en série trigonométrique (étude des cordes vibrantes)
- Joseph Fourier, 1822 : résolution de l'équation de la chaleur (Théorie analytique de la chaleur)
- Les Séries de Fourier constituent la branche la plus ancienne de l'analyse harmonique, mais n'en demeurent pas moins un domaine vivant, aux nombreuses questions ouvertes. L'étude de leurs particularités est allée de pair, pendant tout le XIXe siècle, avec les progrès de la théorie de l'intégration.
- Généralisation par la Transformée de Fourier

Produit scalaire

Définition

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t).\overline{y(t)}dt$$

Propriétés

- Norme : $||x(t)||^2 =< x(t), \overline{x(t)} >$
- Symétrie hermitienne : $< x(t), y(t) >= \overline{< y(t), x(t) >}$
- Signaux ortogonaux sur $[t_1, t_2] \Leftrightarrow < x(t), y(t) >= 0$
- Exemples...

Décomposition des signaux

Principe

- Trouver une base de signaux $\phi_i(t)$
- $\forall n \neq m, < \phi_n, \phi_m >= 0$
- Choix : $\phi_n(t) = e^{j.n.\omega.t}$

Développement complexe en Séries de Fourier

Conditions

- Fonctions périodiques
- Fonctions de carré intégrable sur une période

Représentation complexe

- Définition :

$$S_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n.e^{j.\omega.n.t}$$

- Calcul des coefficients :

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-j.\omega.n.t}dt$$

Développement en Séries de cos/sin

- Définition :

$$S_x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n.\cos(\omega.n.t) + B_n.\sin(\omega.n.t)$$

- Calcul des coefficients :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(\omega.n.t)dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(\omega.n.t)dt$$

Propriétés

- f réelle et paire (sur une période)
  $\Rightarrow \forall n, b_n = 0, c_n = \frac{a_n}{2} = c_{-n}$
- f réelle et impaire (sur une période)
  $\Rightarrow \forall n, a_n = 0, c_n = \frac{-j.b_n}{2} = -c_{-n}$
- dérivation : si $y = x'$ alors $S_y = \sum_n Y_n.e^{j.\omega.n.t}$ avec

$$Y_n = j.\omega.n.X_n$$

- si $\forall t, y(t) = x(-t)$, alors $Y_n = X_{-n}$
- conjugaison : si $\forall t, y(t) = \overline{x(t)}$ alors $Y_n = \overline{X_{-n}}$
  - signal réel : $X_n = \overline{X_{-n}}$
- addition d'une constante : si $\forall t, y(t) = x(t) + K, K \in R$ alors $Y_0 = X_0 + K$ et $\forall n \neq 0, Y_n = X_n$

Représentation de la décomposition

Notion de spectre

- Tracé de $|X_n|$ en fonction de f ou n
- Tracé de $arg(X_n)$ en fonction de f ou n
- Signal réel $\Rightarrow X_n = \overline{X_{-n}}$
  - $\Rightarrow |X_n| = |X_{-n}|$
  - $\Rightarrow arg(X_n) = -arg(X_{-n})$

Exemples

Une petite applet...

Aspect Energétique

Théorème de Parceval

$$\frac{1}{T}\int_T x\left(t\right).\overline{y\left(t\right)}dt = \sum_n X_n.\overline{Y_n}$$

Application au calcul d'énergie

- On pose : $y = x$
- $\frac{1}{T}\int_T x\left(t\right).\overline{x\left(t\right)}dt = \sum_n X_n.\overline{X_n}$