Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil
Année Universitaire 2019-2020

Module: Méthodes Numériques Durée: 1 heure

Nom::...........................
Prénom:.......................
Groupe:..........

corrigé de rattrapage

N.B. : Toutes les calculettes sont autorisées (té l. portables et documents interdits).

Exercice n°1 : (9 points) Soit $f(x) = x^2 - 3$.

1. Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1; 2]$.
2. En utilisant la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$ avec une précision de $\epsilon = 10^{-2}$:
   a) Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la racine de $f(x) = 0$.
   b) Trouver la racine α de $f(x) = 0$.

Réponses: On a: $f(x) = x^2 - 3$.

1) **L'existance:** la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur l'intervalle $[1; 2]$, on a : $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$, donc $f(1) \times f(2) < 0) \Longrightarrow \exists\alpha \in]1; 2[: f(\alpha) = 0$. **L'unicité** : $\forall x \in [1; 2]$: $f'(x) = 2x > 0 \Longrightarrow f$ est croissante et donc la racine est unique.

2) $\epsilon = 0.01$.

a) Nombre d'itérations nécessaires:

$$n \geq \frac{\ln \frac{b-a}{2\epsilon}}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{1}{0.02}}{\ln 2} = \frac{3.912}{\ln 2} = 5,643\,8 \text{ ...., on prend } n = 6.$$

1. **b)**

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{b_k+a_k}{2}$	$signe\,(f\,(x_k))$	$\frac{b_k-a_k}{2}$
0	1	2	1.5	-	0.5
1	1.5	2	1.75	+	0.25
2	1.5	1.75	1.625	-	0.125
3	1.625	1.75	1.6875	-	0.0625
4	1.6875	1.75	1.71875	-	0.03125
5	1.71875	1.75	1.734375	+	0.015625
6	1.71875	1.734375	1.7265625		0.0078125

$\frac{b_k-a_k}{2} \leq \epsilon$, alors $\alpha \approx 1.7265625$

<u>Exercice n°2 :</u> (11 points) On considère le système (S) défini par :

$$(S)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

1. Ecrire le systeme (S) sous forme matrice augment ée $\left[A \vdots b\right]$.
2. Déterminer une matrice augmentée triangulaire supé rieure ´ $\left[\tilde{A} \vdots \tilde{b}\right]$ par la mé thode d' élimination de Gauss.
3. Résoudre le système obtenu. '
4. Deduire le déterminant de ´ A.

Réponses

1. $Ax = b \Longleftrightarrow \left[A \vdots b\right] \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 6 & \vdots & 11 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}.$

2) $\left[A \vdots b\right] \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 6 & \vdots & 11 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_2 - l_1. \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & -8 \end{bmatrix}.$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left[\tilde{A} \vdots \tilde{b}\right].$$

donc $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

3) $Ax = b \Longleftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [] = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \\ -x_3 = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

4) $\det A = \det \tilde{A}. = 1 \times 1 \times (-1) = -1.$

Responsable du module : Merini abdelaziz **Bon courage**