Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil
Année Universitaire 2019-2020

Module: Méthodes Numériques

Corrigé de l'examen final

Exercice n°1 : (6 points)
Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

1. Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[0;1]$.
2. En utilisant la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[0;1]$ avec une précision de $\epsilon = 10^{-1}$:
   a) Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la racine de $f(x) = 0$.
   b) Trouver la racine de $f(x) = 0$.

Réponses
On a: $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

1) **L'existance** : la fonction f est continue sur R et donc elle est continue sur l'intervalle $[0;1]$. 0.75 point
On a : $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$, donc $f(0) \times f(1) < 0) \Longrightarrow \exists\alpha \in]0;1[$: $f(\alpha) = 0$.
L'unicité : $\forall x \in [0;1]$: $f(x)$)= $3x^2 + 2 > 0 \Longrightarrow f$ est croissante et donc la racine est unique. 0.5 point

2) $\epsilon = 0.1$.

a) Nombre d'itérations nécessaires: $n \geq \dfrac{\ln \dfrac{b-a}{2\epsilon}}{\ln 2} = \dfrac{\ln \dfrac{1}{0.2}}{\ln 2} = 2,\,321\,9$, on prend $n = 3$. 0.75 point

b)

k	a_k	b_k	$c_k = \frac{b_k+a_k}{2}$	$signe\,(f\,(x_k))$	$\frac{b_k-a_k}{2}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	-	0.25
2	0.25	0.5	0.375	-	0.125
3	0.375	0.5	0.4375		0.0625

3.5 points

0.5 point

$\frac{b_k-a_k}{2} \leq \epsilon$, alors $\alpha \approx 0.4375$.

Exercice n°2 : (14 points)
On considère le système (S) défini par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

1. Ecrire le systeme sous la forme $AX = b$.
2. Montrer que la matrice A admet une décomposition unique $A = LU$, o ù L est une matrice triangulaire inférieure avec une diagonale unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.
3. Déterminer les matrices L et U.
4. La résolution du système $AX = b$ devient $AX = b \Longleftrightarrow LUX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$.
   -En utilisant la décomposition précédente, résoudre le syst ème $AX = b$

5. En déduire le déterminant de A

Réponses

1) $AX = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$ 1point

2) Il faut prouver que les déterminats de tous les sous matrices sont inversibles c'est à dire :

$\det A_{11} = |1| \neq 0$, $\det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ et $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$ 1point

3) On cherche à trouver les deux matrices L et U définie comme suit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = LU \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$ 0.5point

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & u_{22} + l_{21}u_{12} & u_{23} + l_{21}u_{13} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & u_{33} + l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} \end{pmatrix}$$ 2 points

Par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U

$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{31} = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{22} + l_{21}u_{12} = 3 \\ u_{23} + l_{21}u_{13} = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_{22} = 1 \\ u_{23} = 3 \end{cases}$ 4.5 points

et $\begin{cases} l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \\ u_{33} + l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l_{32} = 1 \\ u_{33} = 2 \end{cases}$

D'où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ 1point

4) La résolution du système $AX = b$ devient $AX = b \Longleftrightarrow LUX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$

$LY = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 6 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -4 \end{cases}$ 1.5points

$UX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_3 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ 1.5 points

5) $\det A = \det(LU) = \det L \times \det U = 1 \times 2 = 2.$ 1point