Cours de Traitement Du Signal - Transformée de Fourier

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

6 septembre 2007

Plan du cours

1. Rappels
2. Transformée de Fourier
   - Introduction
   - Définition
   - Exemple
   - Propriétés
   - Représentation de la Transformée de Fourier
3. Définition généralisée de la Transformée de Fourier
   - Introduction
   - Impulsion de Dirac

Développement en Séries de Fourier

Conditions

- Fonctions périodiques
- Fonctions intégrables sur une période

Représentation complexe

- Définition :

$$S_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n.e^{j.\omega.n.t}$$

- Calcul des coefficients :

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-j.\omega.n.t}dt$$

Propriétés

- f réelle et paire (sur une période)
  $\Rightarrow \forall n, b_n = 0, c_n = \frac{a_n}{2} = c_{-n}$
- f réelle et impaire (sur une période)
  $\Rightarrow \forall n, a_n = 0, c_n = \frac{-j.b_n}{2} = -c_{-n}$
- dérivation : si $y = x'$ alors $S_y = \sum_n Y_n.e^{j.\omega.n.t}$ avec

$$Y_n = j.\omega.n.X_n$$

- si $\forall t, y(t) = x(-t)$, alors $Y_n = X_{-n}$
- conjugaison : si $\forall t, y(t) = \overline{x(t)}$ alors $Y_n = \overline{X_{-n}}$
  - signal réel : $X_n = \overline{X_{-n}}$
- addition d'une constante : si $\forall t, y(t) = x(t) + K, K \in R$ alors $Y_0 = X_0 + K$ et $\forall n \neq 0, Y_n = X_n$

Représentation de la décomposition

Notion de spectre

- Tracé de $|X_n|$ en fonction de f ou n
- Tracé de $arg\left(X_n\right)$ en fonction de f ou n
- Signal réel $\Rightarrow X_n = \overline{X_{-n}}$
  - $\Rightarrow |X_n| = |X_{-n}|$
  - $\Rightarrow arg\left(X_n\right) = -arg\left(X_{-n}\right)$

Problématique

- Représentation spectrale des signaux périodiques $\Rightarrow$ développement en série
- Signaux non périodiques ?
  - exemple : signal transitoire

Justification intuitive

- Idée : considérer un signal non périodique comme un signal périodique avec $T_0 \Rightarrow \infty$
- Fonctions sinusoïdales espacées de $f_0 = \frac{1}{T_O} \rightarrow 0$

Définition

$$X\left(f\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t\right).e^{-j.2\pi.f.t}dt$$

$$x\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(f\right).e^{j.2\pi.f.t}df$$

Notations

- X est la transformée de Fourier de x : $X = TF\left(x\right)$
- x est la transformée inverse de Fourier de X : $x = TF^{-1}\left(X\right)$
- Notations abusives :
  - $X\left(f\right) = TF\left(x\left(t\right)\right)$
  - $x\left(t\right) = TF^{-1}\left(X\left(f\right)\right)$

Remarques

- La transformée de Fourier est une fonction complexe
- La transformée de Fourier met en évidence la dualité temp/fréquence
  - $\Rightarrow$ $x\left(t\right)$ et $X\left(f\right)$ caractérisent le même signal (pas de pertes d'information)
- La transformée de Fourier n'est pas toujours définie au sens des fonctions
  - $\Rightarrow$ Une condition suffisante : f de *carré intégrable* (énergie finie)
  - Pas de problème pour les signaux "physiques" *ie* observables
  - Pour les signaux idéaux $\Rightarrow$ définition généralisée de la transformée de Fourier (au sens des distributions)

Signal "porte"

- $\forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] x(t) = a, a \in R$
- ailleurs, $x(t) = 0$

Transformée de Fourier de x

- $X(f) = a.T.\dfrac{sin(\pi.f.T)}{\pi.f.T}$
- La transformée de Fourier d'une fonction "porte" est en "sinus cardinal"

Propriétés

- $TF \circ TF^{-1} = TF^{-1} \circ TF = Id$
- Linéarité : $TF(\lambda x + \mu y) = \lambda TF(x) + \mu TF(y)$
- Conjugaison : si $\forall t, y(t) = \overline{x(t)}$ alors $Y(f) = \overline{X(-f)}$
- Affinité : si $\forall t, y(t) = x(a.t), a \in R$ alors $Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- Translation : si $\forall t, y(t) = x(t+\tau), \tau \in R$ alors $Y(f) = e^{j.2\pi.f.\tau} X(f)$
- Dérivation : si $\forall t, y(t) = x'(t)$ alors $Y(f) = j.2\pi.f.X(f)$
- Modulation : si $\forall t, y(t) = x(t).e^{j.2\pi.f_0.t}, f_0 \in R$ alors $Y(f) = X(f - f_0)$
- Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\overline{Y(f)}df$$

Produit de convolution

Définition (rappel)

$$(x \otimes y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau)\,d\tau$$

Propriétés

- $TF[(x \otimes y)(t)] = X(f).Y(f)$
- $TF[x(t).y(t)] = (X \otimes Y)(f)$

Applications

- Etudes des systèmes linéaires
- Filtrage, Modulation...

Représentation de la Transformée de Fourier

Problématique

- Transformée de Fourier des signaux périodiques, constants... non définie au sens des fonctions
- Problème général des signaux à "énergie infinie"
- Théorie des distributions $\Rightarrow$ impulsion de Dirac

Définitions

Définition de la distribution de Dirac

$$< x(t), \delta(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)dt = x(0)$$

Définition "physique" et représentation

- Limite d'une fonction "porte" quand $\frac{1}{T} \Rightarrow 0$
- $\delta(0)" = " + \infty$
- $\forall t \neq 0, \delta(t) = 0$
- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt = 1, t_1 < 0 < t_2$

Propriétés

Propriétés temporelles

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t)\, dt = x(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$
- $x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$
- $x(t).\delta(t - t_0) = x(t_0).\delta(t - t_0)$

Propriétés fréquentielles

- $\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j.2\pi.f.t} df$
- $\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j.2\pi.f.t} dt$

Propriétés

Convolution

- $x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$
- $x(t) \otimes \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- $\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$

Transformée de Fourier

- $TF[\delta(t)] = 1$
- $TF[1] = \delta(f)$

Application : SLI

- Réponse impulsionnelle
- Transmittance

Transformée de Fourier généralisée

- Idée : réutiliser les résultats de la décomposition en Séries
- Résultats de la théorie des distributions :
  - $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
  - $1 \longleftrightarrow \delta(f)$
  - $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j.2\pi.f.t_0}$
  - $e^{j.2\pi.f_0.t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0)$

Exemples

- Transformée de Fourier d'une valeur constante
- Transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale

Fonctions périodiques

- $\forall t, x(t+k.T) = x(t)$
- f développable en séries
  $\Rightarrow X_n = \frac{1}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-j.2\pi.n.t/T}dt$
- Transformée de Fourier généralisée de x :

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n.\delta(f-f_n)$$

Spectre d'une fonction périodique

- Lien avec les résulats du développement en séries
- Modèle de spectre de raies

Produit d'une fonction périodique par une fonction observable

- Soit $x(t)$ un signal à énergie finie (observable)
- Soit $y(t)$ un signal périodique : $y(t+k.T) = y(t)$
- Soit $z(t) = x(t).y(t)$
- z est à énergie finie et :

$$Z(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_n.X(f-n/T)$$

Exemple

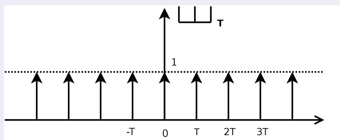
- $y(t) = cos(2\pi.f_0.t)$
- $Z(f) = \frac{1}{2}(X(f+f_0) + X(f-f_0))$

Peigne de Dirac

Définition

- Suite d'impulsions de Dirac se répétant avec une période T
- Notation mathématiques : $\sqcup\!\sqcup_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-n.T)$

Représentation



Fonction d'échantillonage

- Le "peigne" de Dirac permet de représenter l'opération d'échantillonage.
- Echantillonage : prélèvement d'échantillons sur un signal continu $x(t)$ à une fréquence d'échantillonage f_e :

$$x_e(t) = x(t).Ш_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n.T_e).\delta(t - n.T_e)$$

Représentation graphique

Opération de répétition

- Utilisation du peigne de Dirac pour représenter les fonctions périodiques
- $x(t)$, fonction périodique de période T peut être vue comme la répétition cyclique de $x_T(t)$, signal élémentaire représentant sa *période principale*
- $x(t) = rep_T[x_T(t)] = x_T(t) \otimes Ш_T(t)$

Exemple

- Suite périodique d'impulsions rectangulaires
- $x(t) = rep_T[A.rect(t/\Delta)] = A.rect(t/\Delta) \otimes Ш_T(t)$

Transformée de Fourier du peigne de Dirac

Développement en série

- La fonction peigne de Dirac est développable en série
- $Ш_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n.e^{j.2\pi.n.t/T}$
- $\Delta_n = \frac{1}{T}$

Transformée de Fourier du peigne de Dirac

$$TF(Ш_T(t)) = \frac{1}{T}.\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T}Ш_{1/T}(f)$$

Enveloppe spectrale

- Fonctions périodiques : $x(t) = x_T(t) \otimes Ш_T(t)$
- Calcul de la transformée de Fourier de x :

$$X(f) = \frac{X_T(f)}{T}.Ш_{1/T}(f)$$

- La fonction $\frac{X_T(f)}{T}$ est l'enveloppe spectrale des poids des raies du spectre de x
- Lien avec le développement en séries :

$$X_n = \frac{X_T(n/T)}{T}$$