2018/2019

Université Colonel AMO de BOUIRA
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées (FSSA)
Domaine : Sciences et Technologie (ST)

Niveau : 1ère Année

## Examen du module de Maths 01 / durée : 1h30min

### Questions de cours (05pts) :

1. Répondre par vrai ou faux :
   - Toute fonction est une application. F
   - Une fonction peut être continue mais non dérivable en un point. V
   - Si une fonction est deux fois dérivable en un point, elle est de classe $C^2$. F $C^2$ : $f''$ est continue
   - Le développent limité d'une fonction paire comprend dans sa partie régulière des puissances impaires. F
2. Enoncer le théorème des accroissements finis. f continue et dérivable [illegible] $f(a)$ [illegible]
3. Donner l'interprétation géométrique de nombre de dérivée.
4. Donner la contraposée de $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Rightarrow (x + y \neq xy + 1)$.

### Exercice 1 (06pts) :

I. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

II. Soient $E = [0,1]$ et $F = [-1,0]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.
On considère une application $f : E \to F$, définie par $f(x) = x^2 - 1$.

a. Déterminer $f^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right)$ et $f\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$.

b. Montrer que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

### Exercice 2 (05 pts) :

A. Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies par : $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$; $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5$; $h(x) = \sqrt{4-2x}$

Déterminer les ensembles $D_f, D_g, D_h, D_f \cup D_h, C_{D_g}^{D_f}, D_g \setminus D_h$. $D_g - D_f$

B. Déterminer les nombres $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b, & si\, x < 2, \\ a, & si\ x = 2, \\ bx^2 + 2x + 5 & si\, x > 2 \end{cases}$$

Soit continue sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 3 (04 pts) :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x\, ln\,(\cos x)}{1 + x\sqrt{1+x} - e^{\sin x}}$

1- Donner les développements limités en 0à l'ordre 3des fonctions : $x ln(\cos x)$ et $(1 + x\sqrt{1+x} - e^{\sin x})$.

2- Calculer la limite suivante: $\lim_{x \to 0} f(x)$.

### Données

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 * 4}x^2 + \frac{1 * 3}{2 * 4 * 6}x^3 \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1 * 3 * 5 \ldots (2n-3)}{2 * 4 * 6 \ldots 2n}x^n + o(x^n).$$

Raisonement direct

Bon courage

Corrigé de

Question de cours :

1- . Toute fonction est une application → F (0.5)

. Une fonction peut être continue mais non dérivable → V (0.5)

. si une fonction est deux fois dérivable en un point est $C^2$ → F (0.5)

. Le D.L d'une fonction paire comprend ... impaires → F (0.5)

2- Le théorème des accroissements finis :

soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in ]a,b[$ tq $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ (1)

3- On a $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le nombre dérivé. (1)

$\Rightarrow$ si f est dérivable en $x_0$ alors soit C la courbe de f. et C admet une tangente en $(x_0, f(x_0))$ de pente $f'(x_0)$ et l'équation de cette tangente est : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

4- La contraposée est : $x+y=xy+1 \Rightarrow x=1$ ou $y=1$. (1)

Exo1 :

I. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$ : $4^n+6n-1$ est divisible

il s'agit de montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{N} : 4^n+6n-1=9k$

. Pour n=0, on a :

(0.5) $4^0+6.0-1=0.9=0$ → est vraie

donc $\exists k=0\in\mathbb{N}$ : $4^0+6\times0-1=9.k$

. On suppose que $P_n$ est vraie : $\forall n\in\mathbb{N}: \exists k\in\mathbb{N} / 4^n+6n-1=9k$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie ie : $\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}+6(n+1)-1=$

On a :

$4^{n+1}+6(n+1)-1 = 4\,4^n+6n+5$ (1.5)

$=4(9k-6n+1)+6n+5$

$=36k-18n+9.$

$=9k'$ avec $(k'=4k-2n+1)\in\mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)$

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}$ : $4^n+6n-1$ est divisible par 9.

$g:[0,1]\to[-1,0]$ , $f(x)=x^2-1$

c) $f^{-1}(]-\frac{1}{2},0[) = \{x \in [0,1] \text{ tq } \exists y \in ]-\frac{1}{2},0[ \text{ et } y = f(x)\}$

On a $-\frac{1}{2} < y < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < f(x) = x^2 - 1 < 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

$\Rightarrow f^{-1}(]-\frac{1}{2},0[) = ]\frac{1}{\sqrt{2}},1[$ 0,5

- $f(]0,\frac{1}{2}[) = \{y \in [-1,0] \mid \exists x \in ]0,\frac{1}{2}[ \text{ et } y = f(x)\}$

On a $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{4}$
$\Rightarrow -1 < x^2 - 1 < -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 < f(x) = y < -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow f(]0,\frac{1}{2}[) = ]-1,-\frac{3}{4}[$ 0,5

2 - Montrons que $f$ est bijective

- $f$ est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ 1

On a $f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 - 1 = x'^2 - 1$
$\Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$ comme $x, x' \in [0,1]$
$\Rightarrow x > 0, x' > 0$

alors $f$ est injective

- $f$ est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in [-1,0], \exists x \in [0,1] / f(x) = y$

$y = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = y \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$

donc $\forall y \in [-1,0]$ $\exists x = \sqrt{y+1} \in [0,1]$ tq $f(x) = y$ 1
$\Rightarrow f$ est surjective

$f$ est injective et surjective donc elle est bijective 0,5
donc est inversible et $f^{-1} : F \longrightarrow E$
0,5 $x \longmapsto \sqrt{x+1}$

Exo 2 :

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5$, $h(x) = \sqrt{4 - 2x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}$ 0,5, $D_g = \mathbb{R}$ 0,5, $D_h = ]-\infty, 2]$ 0,5 $/ x \leq 2 /$

- $D_f \cup D_h = ]-\infty,-2[ \cup ]-2,2[ \cup ]2,+\infty[ \cup ]-\infty,2]$
$= \mathbb{R}$ 0,5

- $C_{D_g}^{D_f} = \{x \in D_g \mid x \notin D_f\} = \{2,-2\}$ 0,5, $D_g \setminus D_h = ]2,+\infty[$ 0,5

2/ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 2 \\ a & x = 2 \\ bx^2 + 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est continue

$f$ est continue en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ les fonctions $x^2 + x + b$ et $bx^2 + 2x + 5$ sont des polynomes donc continues sur ces deux intervalles
- La continuité en $x_0 = 2$

$\lim_{x \to 2^<} f(x) = \lim_{x \to 2^>} f(x) = f(2) = a$.

. $\lim_{x \to 2^<} f(x) = \lim_{x \to 2^<} x^2 + x + b = b + 6 = a$ (0,5)

. $\lim_{x \to 2^>} f(x) = \lim_{x \to 2^>} bx^2 + 2x + 5 = 4b + 9 = a$ (0,5)

. $\lim_{x \to 2^>} f(x) = \lim_{x \to 2^<} f(x) = a$ (0,5) (0,5)

d'où $\begin{cases} 6 + b = a \\ 4b + 9 = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 5}$ et $\boxed{b = -1}$

**Exo3**

1- Le $DL_3(0)$ de $x\ln(\cos x)$ et $\sqrt{1+x} - e^{\sin x}$

. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ (1)

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ (0,5)

$\Rightarrow 1 + x\sqrt{1+x} - e^{\sin x} = - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$ (1)

et $x\ln(\cos x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ (0,5)

2- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{8}} = \frac{8}{2} = 4$ (1)