Université A.M.O de Bouira

Faculté des Sciences. Dépt. S.T.

2019/2020

Durée: 1h30

Examen de Maths I

Questions de cours (03pts) : Répondre par vrai ou faux :

1. Si une application bijective alors l'équation $y = f(x)$ admet unique solution.
2. Toute fonction continue sur un intervalle est bijective sur le même intervalle.
3. La fonction $\sin x$ admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$. F
4. Si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0
5. La fonction $\ln x$ admet un développent limité au voisinage de 0.
6. Deux fonctions équivalentes admet la même limite au voisinage de x_0 F

continue → non dérivable

Exercice 1 (05pts) :

I. 1- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^n \geq 1 + 2n$.

2- Montrer par contraposition que: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1)$.

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation équivalence sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la classe d'équivalence de 1.

$x \mathcal{R} 1$

Exercice 2 (04 pts) :

Soit $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ une application définie par: $f(x) = 1 + x^2$

a. Déterminer les deux ensembles suivants $f([-1,0])$ et $f^{-1}(]1,5[)$.

b. Calculer $f(1), f(-1)$. f est-elle injective ?

c. Montrer que f est surjective.

Exercice 3 (08 pts) :

A. Soit f une fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^x & si\ x > 0. \end{cases}$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

$\frac{1-e^x}{x}$

B. 1- Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes:

$$x \sin^2 x \quad \text{et} \quad \ln(1 + \sin x)$$

2- En déduire la limite suivante: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1+\sin x)}{x \sin^2 x}$

$\lim_{x \to 0}$

Indication

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$3^{n+1} - 2n \geq 3 - 1 \geq 2$

Bon courage

2- R est symétrique soit $x, y \in \mathbb{R}$

Ona $xRy \Rightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$

$\Rightarrow -(y^3 - x^3) = -3(y-x)$ (0,5)

$\Rightarrow y^3 - x^3 = 3(y-x)$

$\Rightarrow xRy \Rightarrow$ R est symétrique

3- R est transitive $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Ona $\begin{cases} xRy \\ \text{et} \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \text{ ① et} \\ y^3 - z^3 = 3(y-z) \text{ ②} \end{cases}$ (0,5)

① + ② $\Rightarrow x^3 - z^3 = 3(x-z)$

$\Rightarrow xRz \Rightarrow$ R est transitive

de 1), 2) et 3), Ona R est une relation d'équivalence

b- la classe de 1

$\bar{1} = \{x \in \mathbb{R} / xR1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 1 = 3(x-1)\}$ (1)

$= \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 3x + 2 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x^2 + x - 2) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x = 1 \text{ ou } x = -2\}$.

Exo 2 :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$ tq $f(x) = 1 + x^2$

a- $f([-1,0]) = \{f(x) \mid x \in [-1,0]\}$.

$= \{f(x) \mid 0 \leq x^2 \leq 1\}$ (1)

$= \{f(x) \mid 1 \leq 1 + x^2 \leq 2\} = [1,2]$.

$f^{-1}(]1,5[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in]1,5[\}$.

$= \{x \in \mathbb{R} / 1 < x^2 + 1 < 5\}$ (1)

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} =]-2, 2[$

b- $f(1) = 2$ et $f(-1) = 2$ (0,5)

Comme $f(1) = f(-1)$ et $1 \neq -1$ alors f n'est pas injective

(0,5)

Corrigé de l'examen

Questions de cours :

1 → Vraie (0,5) ; 4 → Vraie (0,5)
2 → fausse (0,5) ; 5 → fausse (0,5)
3 → fausse (0,5) , 6 → Vraie (0,5)

Exo 1 :

I. 1 montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2n$.
pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la proposition $3^n \geq 1+2n$. (0,5)

- pour $n = 0$, On a $3^0 = 1 + 2.0 \Rightarrow 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie
- soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie (ie $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$).

On a $3^n \geq 1 + 2n \Rightarrow 3 \cdot 3^n \geq 3 + 6n$
$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n + 4n$ (1)
$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n$
$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2 + 2n$ comme $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2(1+n)$.
$\Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $3^n \geq 1 + 2n$ est vraie.

2 - Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1$.
La contraposée de la proposition est : $x \geq 1 \Rightarrow x^5 + x \geq 2$. (0,5)
On a $x \geq 1$ ... (1) et
$x \geq 1 \Rightarrow x^2 > 1$
$\Rightarrow x^4 > 1$
$\Rightarrow x^5 > 1$ ... (2) (0,5)

(1) + (2) $\Rightarrow x^5 + x \geq 1 + 1$.
$\Rightarrow x^5 + x \geq 2$

par le principe de contraposition, On a montré que $x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1$

II a/ montrons que ($\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x R y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$) est une relation d'équ
1- R est réflexive : soit $x \in \mathbb{R}$, On a
$x^3 - x^3 = 3(x - x) = 0$ donc On a $x R x$ d'où R est reflexive.
(0,5)

c. Montrons que f est surjective
soit $y \in [1, +\infty[$
$y = f(x) \Rightarrow y = x^2 + 1$
$\Rightarrow x^2 = y - 1$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$ et comme $y \in [1, +\infty[$ alors
$\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x)$ alors f est surjective

1

Exo 3

A-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a- La continuité de f

- sur $]-\infty, 0[$. La fonction f est continue (rapport de deux fonctions continues) 0,5
- Sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue (somme de deux fonctions continues) 0,5
- La continuité en 0 : On a 0,5

$\lim\limits_{x \to 0^<} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^>} 1 - e^x = 0 = f(0)$ 0,5 $\Rightarrow$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

d'où f est continue en 0 donc f continue sur $\mathbb{R}$.

La Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

- sur $]-\infty, 0[$, la fonction f est dérivable (rapport de deux fonctions dérivables) 0,5
- sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable (somme " " ") 0,5
- La dérivabilité en 0, On a :

$f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^<} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^<} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) \dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2}$ 0,5

et

$f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^>} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^>} \dfrac{1 - e^x}{x} = -1$ 0,5

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 d'où n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
0,5

c- La fonction f n'est pas de $C^1(\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0.
0,5

B/ 1- Le développement limité à l'ordre 3 de $x\sin^2 x$, $\ln(1+\sin x)$
0×0

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ 0,5

donc

* $x\sin^2 x = x\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^3) = x^3 + o(x^3)$. 0,5

$\ln(1+\sin x) = \ln\left(1+\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right)$

$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$ 0,5

$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 0,5

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+\sin x)}{x\sin^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + x^3/3\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + x^3/6\right)}{x^3}$ 0,5

$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3/6}{x^3} = \frac{1}{6}$ 0,5