Cours de Traitement Du Signal - Convolution/corrélation

guillaume.hiet@rennes.supelec.fr

ESTACA

6 septembre 2007

Plan du cours

Définition

Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction y lorsqu'on la déplace sur une autre fonction x : c'est un *mélangeur* de fonction. C'est un outil important en TDS (filtrage...)

Signal continu

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).y(t-\tau)d\tau$$

Signal discret

$$z[k] = x[k] \otimes y[k] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n].y[k-n]$$

Propriétés

Commutativité

- changement variable $\tau = t - u$
  $\Rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u).y(u)du$
- $x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$

Distributivité

$$[x_1(t) + x_2(t)] \otimes y(t) = x_1(t) \otimes y(t) + x_2(t) \otimes y(t)$$

Associativité

$$[x_1(t) \otimes y_1(t)] \otimes y_2(t) = x_1(t) \otimes [y_1(t) \otimes y_2(t)]$$

Exemple

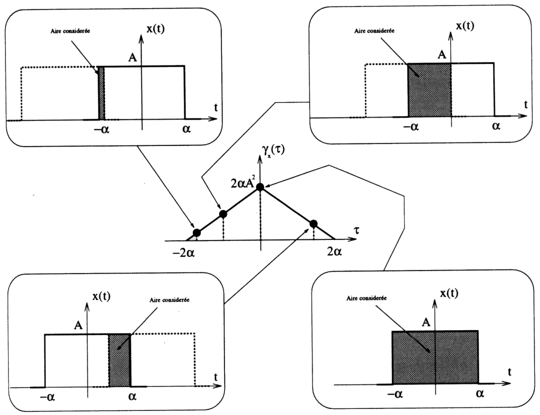

Figure 1. *Convolution d'un signal porte par lui-même*

Définition

Mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. La définition dépend du type de signal

Signaux à énergie finie

Autocorrélation

$$R^0_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\overline{x}(t-\tau)dt$$

Intercorrélation

$$R^0_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\overline{y}(t-\tau)dt$$

Interprétation

- R^0_{xx} et R^0_{xy} homogènes à une énergie
- Energie croisée entre un signal et un autre retardé

Signaux à énergie finie

Propriétés pour les signaux **réels**

- $R^0_{yx}(\tau) = R^0_{xy}(-\tau)$
- $R^0_{xx}(\tau) = R^0_{xx}(-\tau)$ autocorrélation paire
- $|R^0_{yx}(\tau)|^2 \leqslant R^0_{xx}(\tau).R^0_{yy}(\tau)$
- $R^0_{xx}(\tau) \leqslant R^0_{xx}(0)$ (E_{Tot})
- $R^0_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow$ signaux totalement décorrélés, signaux orthogonaux

Signaux à puissance moyenne totale finie

Autocorrélation

$$R_{xx}^{\infty}(\tau) = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{+\frac{\Delta T}{2}} x(t).\overline{x}(t-\tau)dt$$

Intercorrélation

$$R_{xy}^{\infty}(\tau) = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{+\frac{\Delta T}{2}} x(t).\overline{y}(t-\tau)dt$$

Interprétation

- R_{xx}^{∞} et R_{xy}^{∞} homogènes à une puissance
- Puissance croisée entre un signal et un autre retardé

Signaux à puissance moyenne totale finie

Propriétés pour les signaux **réels**

- $R_{yx}^{\infty}(\tau) = R_{xy}^{\infty}(-\tau)$
- $R_{xx}^{\infty}(\tau) = R_{xx}^{\infty}(-\tau)$ autocorrélation paire
- $|R_{yx}^{\infty}(\tau)|^2 \leqslant R_{xx}^{\infty}(\tau).R_{yy}^{\infty}(\tau)$
- $R_{xx}^{\infty}(\tau) \leqslant R_{xx}^{\infty}(0)$ (P_{MoyTot})
- $R_{xy}^{\infty}(\tau) = 0 \Rightarrow$ signaux totalement décorrélés, signaux orthogonaux